

С. А. Скобельцын, М. В. Окороков

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРАВЛЕНИЯ ОСИ КОНЕЧНОГО ЦИЛИНДРА СО СФЕРИЧЕСКИМИ ЗАГЛУШКАМИ ПО РАССЕЯНИЮ ЗВУКОВОЙ ВОЛНЫ

*Тульский государственный университет, г. Тула, Россия*

**Аннотация.** Рассматривается задача идентификации направления оси конечного упругого цилиндра по рассеянному акустическому полю. Предполагается, что цилиндр имеет сферические заглушки, а его материал является однородной упругой средой. Цилиндр погружен в идеальную жидкость. При фиксированном положении центра цилиндра, ориентация его оси определяется по измерениям акустического давления при рассеянии цилиндром плоской гармонической звуковой волны. Идентификация угловых параметров направления оси выполняется на основе минимизации отклонения наблюдаемого давления от расчетного.

**Ключевые слова:** дифракция звука, конечный упругий цилиндр, ближнее акустическое поле, метод граничных элементов, теоретико-числовые сетки, обратная задача рассеяния.

DOI: 10.37972/chgpu.2023.58.4.008

УДК: 539.3:534.26

**1. Введение.** Важной сферой использования решений задач о дифракции звука на различных объектах являются проблемы определения свойств среды и параметров объектов – обратные задачи акустики. Изучение акустического поля при рассеянии звуковой волны объектом позволяет идентифицировать: положение объекта; его размеры, форму, ориентацию; свойства материала объекта. Подобные проблемы решаются в сейсмологии, гидроакустике, ультразвуковой интроскопии.

Известен ряд работ, посвященных решению задачи о рассеянии звуковых волн упругими объектами простой формы: плоскими слоями, круговыми цилиндрами, шарами и др., например [1–7]. В работах Стентона [8–10] рассматривалось рассеяние звука

---

© Скобельцын С. А., Окороков М. В., 2023

*Скобельцын Сергей Алексеевич*

e-mail: skbl@ Rambler.ru, доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики и информатики, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

*Окороков Максим Витальевич*

e-mail: maxik\_okorokov@mail.ru, аспирант кафедры прикладной математики и информатики, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Исследование выполнено в рамках госзадания № 073-03-2022-117/7 по теме “Теоретико-числовые методы в приближенном анализе и их приложения в механике и физике”.

Поступила 20.12.2023

деформируемыми конечными цилиндрами с круговым сечением. В решении используется представление рассеянного поля в виде интеграла Гельмгольца [11, 12]. При определении распределения акустических источников на поверхности препятствия решается интегральное уравнение Фредгольма второго рода.

В данной работе предлагается решение задачи определения ориентации оси конечного упругого цилиндра со сферическими заглушками по рассеянному полю плоской звуковой волны. Решение проводится на основе интеграла Гельмгольца подобно [9, 13]. Особенностью предлагаемого решения является то, что вычисление интегралов при определении давления в рассеянном поле выполняется с использованием квадратур на основе теоретико-числовых сеток, что позволяет несколько сократить объем вычислений.

**2. Постановка задачи.** Пусть в неограниченную область  $\Omega_0$ , заполненную идеальной жидкостью с плотностью  $\rho_0$  и скоростью звука  $c_0$ , помещено упругое тело  $\Omega$ , представляющее собой конечный цилиндр высотой  $2h$  с круговым сечением радиуса  $a$ . Торцы цилиндра закрыты сферическими заглушками радиуса  $a$ . Материал цилиндра – однородная упругая среда с плотностью  $\rho$  и модулями упругости Ламе  $\lambda$  и  $\mu$ . Из окружающей жидкости на шар падает плоская гармоническая звуковая волна с круговой частотой  $\omega$  и потенциалом вектора смещения  $\Psi_p$ . Считается, что положение центра тела  $O$  фиксировано в пространстве и известно. Требуется по наблюдаемому рассеянному акустическому полю на некоторой апертуре в окрестности  $\Omega$  определить ориентацию оси цилиндра  $L$  по отношению к направлению распространения падающей волны. Геометрия задачи представлена на рис. 1, а. На рис. 1, б показана схема введения систем координат.

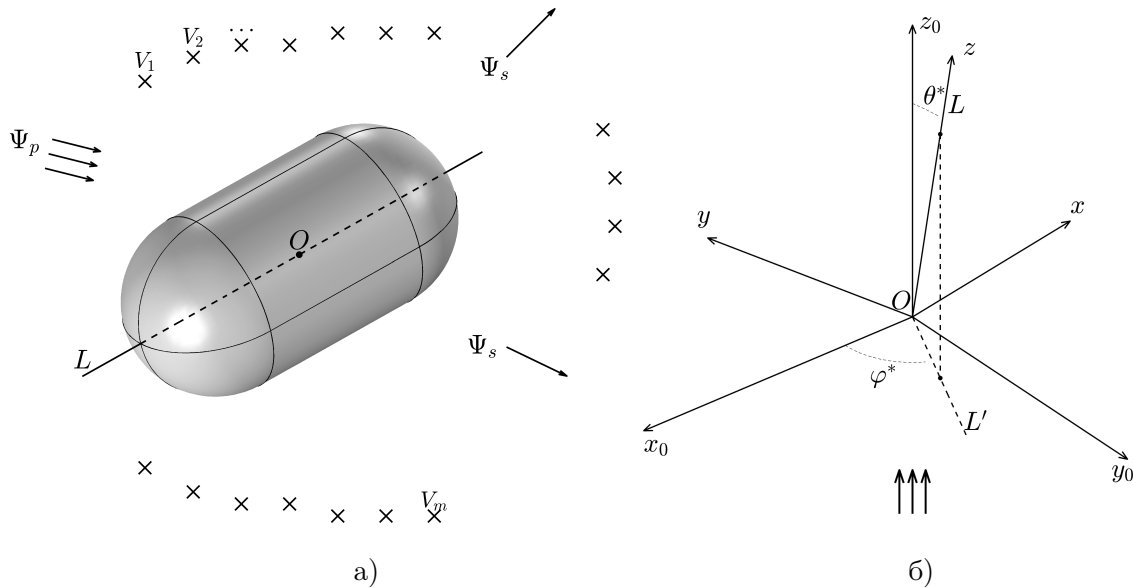


Рис. 1. а) – геометрия задачи ; б) – системы координат

Направление распространения и частоту падающей волны определяет волновой вектор  $\mathbf{k}_0$  такой, что  $|\mathbf{k}_0|=k_0=\omega/c_0$  – волновое число падающей волны. Тогда потенциал смещения в падающей волне может быть представлен в комплексной форме так

$$\Psi_p = \exp[i(\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r} - \omega t)] \quad (1)$$

где без ограничения общности амплитуда  $\Psi_p$  полагается равной 1;  $\mathbf{r}$  – радиус-вектор точки наблюдения;  $t$  – время;  $i$  – мнимая единица. В дальнейшем временной множитель  $\exp(-i\omega t)$  у  $\Psi_p$  и всех параметров движения, зависящих от времени, будем опускать (колебания предполагаются гармоническими).

В результате отражения звука шаром образуется рассеянное акустическое поле. Будем характеризовать его потенциалом смещения в рассеянной волне. На рис. 1, а и в тексте ниже он обозначается  $\Psi_s$ .

Апертура наблюдения рассеянного акустического поля представляется множеством  $m$  точек измерения акустического давления  $V = \{V_1, V_2, \dots, V_m\}$ .

Предполагается, что величины:

$$\mathbf{k}_0, \quad \rho_0, \quad c_0, \quad a, \quad h, \quad \rho, \quad \lambda, \quad \mu, \quad m; \quad (2)$$

$$\text{положение точек } O \text{ и } V_k \quad (k = 1 \dots m) \quad (3)$$

известны. Также известно акустическое давление в точках наблюдения (измерения):

$$p_1^*, \quad p_2^*, \quad \dots, p_m^*. \quad (4)$$

Требуется по совокупности данных (2), (3), (4) определить ориентацию оси цилиндра  $L$  по отношению к направлению распространения падающей волны.

Для решения задачи введены две декартовых систем координат. Основная система координат (система отсчета)  $x_0, y_0, z_0$  введена так, чтобы ее начало располагалось в фиксированном центре цилиндра – точке  $O$ , а ось  $Oz_0$  направлена по направлению распространения падающей волны. Вторая система координат  $x, y, z$  – локальная для тела  $\Omega$  – вводится так, что ее начало также находится в точке  $O$ , а ось  $Oz$  направлена по оси вращения цилиндра  $L$ . На рис. 1, б показано введение двух углов  $\theta^*$  и  $\varphi^*$ , определяющих направление  $Oz$  (а, значит, и  $L$ ) в системе отсчета. Угол  $\theta^*$  – угол между осью  $Oz$  и осью  $Oz_0$ . Угол  $\varphi^*$  – между проекцией оси  $Oz$  (или  $L$ ) на плоскость  $z_0 = 0$  и осью  $Ox_0$ . Таким образом, углы  $\theta^*$  и  $\varphi^*$  идентифицируют направление оси цилиндра. Они выступают в качестве неизвестных в исходной задаче.

Направление осей  $x, y$  не жестко фиксируется и может быть выбрано из соображений наибольшей простоты связи с системой отсчета. Например, будем считать, что система координат  $x, y, z$  получается из системы отсчета двумя поворотами: вначале – вокруг  $Oz_0$  на угол  $\varphi^*$ , а затем – вокруг  $Oy$  на угол  $\theta^*$ . Тогда связь локальной системы координат с глобальной может быть выражена соотношениями:

$$\begin{aligned} x &= \cos \theta^* \cos \varphi^* x_0 + \cos \theta^* \sin \varphi^* y_0 - \sin \theta^* z_0; & y &= -\sin \varphi^* x_0 + \cos \varphi^* y_0; \\ z &= \sin \theta^* \cos \varphi^* x_0 + \sin \theta^* \sin \varphi^* y_0 + \cos \theta^* z_0. \end{aligned}$$

С использованием координат локальной системы координат поверхность  $\Gamma$  упругого тела  $\Omega$  может быть представлена объединением трех поверхностей:

$\Gamma_1 = \{(x, y, z) : z < -h, x^2 + y^2 + (z + h)^2 = a^2\}$  – поверхность одной заглушки (при  $z < -h$ );

$\Gamma_2 = \{(x, y, z) : z > h, x^2 + y^2 + (z - h)^2 = a^2\}$  – поверхность второй заглушки (при  $z > h$ );

$\Gamma_3 = \{(x, y, z) : -h \leq z \leq h, x^2 + y^2 = a^2\}$  – цилиндрическая поверхность средней части  $\Omega$ .

Для нахождения углов  $\theta^*$  и  $\varphi^*$ , идентифицирующих действительное направление оси цилиндра, по аналогии с [14] построим задачу поиска минимума функции двух переменных  $\delta(\theta, \varphi)$ . Функция строится как квадрат нормы разности расчетных значений давления в точках  $V: p_1, p_2, \dots, p_m$  при ориентации оси  $L$ , определяемой углами  $\theta$  и  $\varphi$ , и измеренных значений давления (4) (при действительном направлении оси  $L$ , определяемом углами  $\theta^*$  и  $\varphi^*$ )

$$\delta(\theta, \varphi) = \sum_{k=1}^m (p_k - p_k^*)^2. \quad (5)$$

Таким образом, задача поиска углов  $\theta^*$  и  $\varphi^*$  может быть сформулирована так

$$(\theta', \varphi') = \arg \min_{(\theta, \varphi) \in D} \delta(\theta, \varphi). \quad (6)$$

где  $D$  – область допустимых значений  $(\theta, \varphi)$ . Не делая дополнительных ограничений на ориентацию цилиндра, с учетом его симметрии следует положить

$$D = \{(\theta, \varphi) : 0 \leq \theta \leq \pi/2, 0 \leq \varphi < 2\pi\}.$$

Заметим, задача может иметь не единственное решение. Это может быть связано с объективными причинами: выбором состава искомым параметров; физическими эффектами при сочетании свойств падающей волны, геометрии и свойств материала препятствия; выбором множества  $V$ . Например, в рассматриваемом случае нельзя ожидать однозначного определения  $\varphi^*$  при  $\theta^* = 0$  (правда, эту проблему можно преодолеть, используя несколько направлений распространения исходной волны). Однако, точное решение  $(\theta^*, \varphi^*)$  должно быть среди множества решений (6). Кроме того, решение  $(\theta', \varphi')$  может отличаться от  $(\theta^*, \varphi^*)$  из-за ошибок измерений значений (4) и погрешностей используемых методов решения задач дифракции и минимизации.

**3. Решение задачи.** Для решения задачи (6) прежде всего надо вычислить значения  $p_k(\mathbf{r} | \theta, \varphi)$ . Величина  $p_k(\mathbf{r} | \theta, \varphi)$  или, просто,  $p(\mathbf{r})$  есть звуковое давление в точке  $\mathbf{r}$  в суммарном акустическом поле, сформировавшемся в результате рассеяния плоской звуковой волны (1) упругим препятствием  $\Omega$ , ось вращения которого зафиксирована углами  $(\theta, \varphi)$ . Согласно [15] давление определяется через потенциал смещения  $\Psi = \Psi_p + \Psi_s$  так

$$p = \rho_0 \omega^2 \Psi.$$

В результате дифракции звука на упругом цилиндре формируется рассеянное акустическое поле, которое определяется потенциалом смещений  $\Psi_s$ . Потенциал  $\Psi_s$  должен удовлетворять уравнению Гельмгольца [15]

$$\mathbf{r} \in \Omega_0 : \quad \Delta \Psi_s + k_0^2 \Psi_s = 0, \quad (7)$$

где  $\Delta$  – оператор Лапласа. Кроме того, потенциал смещений  $\Psi_s$  должен удовлетворять условиям излучения на бесконечности

$$\Psi_s = O\left(\frac{1}{r}\right), \quad r \left( \frac{\partial \Psi_s}{\partial r} - ik_0 \Psi_s \right) = O\left(\frac{1}{r}\right) \quad \text{при } r \rightarrow \infty, \quad (8)$$

где  $r = |\mathbf{r}|$ .

Движение частиц упругого цилиндра  $\Omega$  будем описывать общими уравнениями движения сплошной среды [16] при гармонических колебаниях

$$\begin{aligned} \mathbf{r} \in \Omega : \quad & \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = -\rho \omega^2 u_x, \\ & \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} = -\rho \omega^2 u_y, \\ & \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = -\rho \omega^2 u_z, \end{aligned} \quad (9)$$

где  $\sigma_{jk}$  – физические компоненты тензора напряжений  $\sigma$ ;  $u_j$  – компоненты вектора смещений частиц упругой среды.

Связь компонентов тензора напряжений и компонентов вектора смещений выражается законом Гука  $\sigma = \Lambda \cdot \varepsilon$ , где  $\Lambda$  тензор модулей упругости, который содержит компоненты, являющиеся линейными комбинациями  $\lambda$  и  $\mu$ ,  $\varepsilon$  – тензор деформаций, компоненты которого выражаются через компоненты  $\mathbf{u}$  и их производные.

На внешней поверхности тела  $\Gamma$  должны выполняться граничные условия равенства нормальных смещений и напряжений и отсутствия касательных напряжений

$$\mathbf{r} \in \Gamma : \quad u_n = \frac{\partial \Psi}{\partial n}; \quad \sigma_{nn} = -p; \quad \sigma_{n\tau} = 0. \quad (10)$$

где  $u_n$ ,  $\sigma_{nn}$  – нормальные компоненты векторов смещений и напряжений;  $\sigma_{n\tau}$  – касательные компоненты вектора напряжений.

Таким образом, при нахождении  $p(\mathbf{r})$  (решении задачи дифракции плоской звуковой волны упругим телом  $\Omega$ ) требуется найти решения уравнений (7) в  $\Omega_0$  и (9) в  $\Omega$ . Решения должны удовлетворять граничным условиям (10) и условиям излучения на бесконечности (8).

Задача дифракции решалась с использованием граничных интегральных уравнений. Используется подход, который предложен в работе [13]. Особенностью этого подхода является то, что вычисление интегралов при определении давления в рассеянном поле в точках апертуры выполняется с использованием квадратур на основе теоретико-числовых сеток. Это позволяет несколько уменьшить объем вычислений.

Задача минимизации функции двух переменных (5) также решается численно – методом покоординатного спуска в сочетании со случайным выбором начальной точки [17].

**4. Численные исследования.** Для анализа предложенного решения был проведен ряд численных исследований для частных значений параметров падающей волны, геометрических параметров тела и материальных параметров сред.

Сначала были проведены численные эксперименты для анализа влияния параметров  $\theta$  и  $\varphi$  на процесс рассеяния звука.

Здесь представлены расчеты для короткого цилиндра, у которого  $h = a$ . Плотность и модуль упругости материала цилиндра:  $\rho = 2700$  кг/м<sup>3</sup>,  $\lambda = 5.3 \cdot 10^{10}$  Па,  $\mu = 2.6 \cdot 10^{10}$  Па.

Для анализа распределения давления в рассеянном акустическом поле строились поверхности и диаграммы распределения абсолютной величины относительного давления  $p'(\mathbf{R}) = |\Psi/\Psi_p|$  по сферической поверхности  $\mathbf{R} : r = R$  вблизи препятствия. Для сравнения строились также диаграммы для сферического тела с радиусом  $a_0$  таким, что объем сферы и объем исследуемого цилиндра совпадали (при  $h = a$

$a_0 = (4/3)^{1/3}a$ . Свойства материала сферы полагаются равными  $\rho$ ,  $\lambda$ ,  $\mu$ . В расчетах  $R$  полагалось таким, что  $R = 2a_0$ , а  $ka_0 = 5$ .

На диаграммах б) ниже в качестве полярного угла, отсчитываемого от оси  $Oz_0$  в плоскости  $y_0 = 0$  в сторону оси  $Ox_0$  используется параметр  $q$  ( $0 \leq q < 2\pi$ ). При таких предположениях  $p'(q)$  является сечением поверхности  $p'(\mathbf{R})$  и представляет собой функцию в полярных координатах  $(p', q)$ .

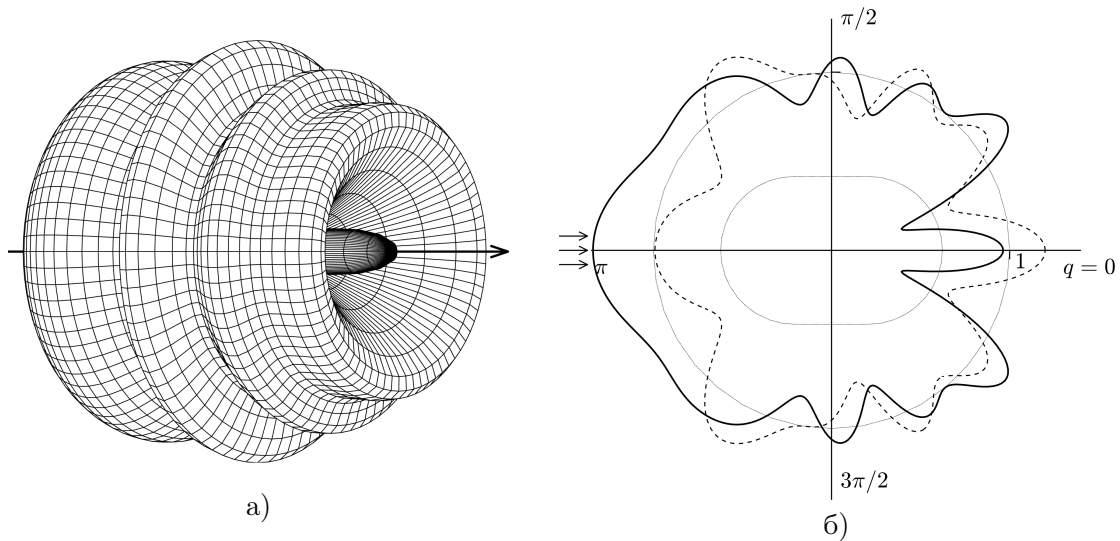


Рис. 2. а) – поверхность  $p'(\mathbf{R})$ ; б) – диаграмма  $p'(q)$  ( $\theta^* = 0$ )

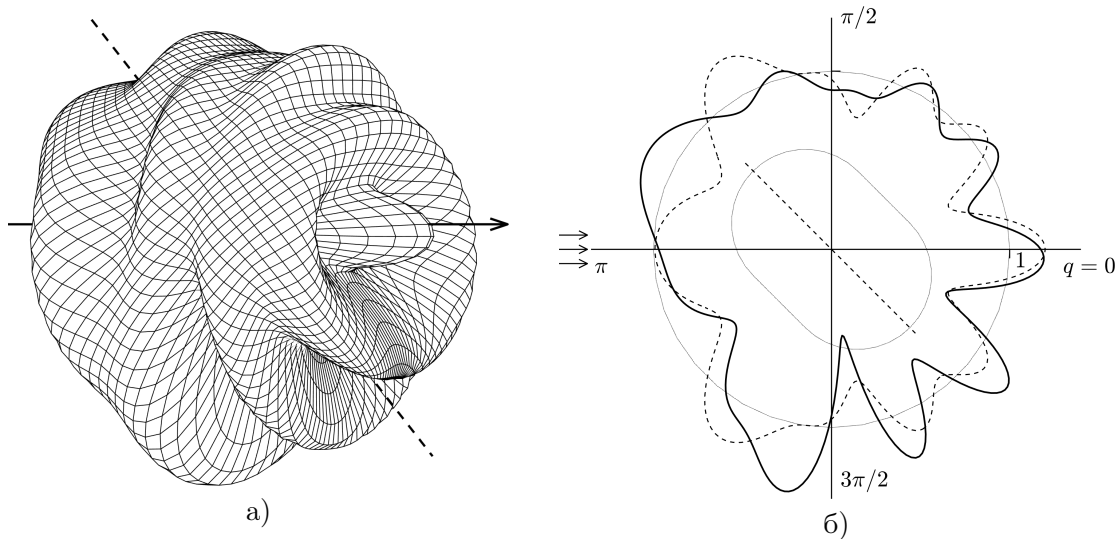


Рис. 3. а) – поверхность  $p'(\mathbf{R})$ ; б) – диаграмма  $p'(q)$  ( $\theta^* = 45^\circ$ )

На рис. 2–4 представлены поверхности  $p'(\mathbf{R})$  (а) и зависимости  $p'(q)$  (б) для трех значений  $\theta^*$  (полагается  $\varphi^* = 0$ ).

Стрелка на изображениях сеточных поверхностей  $p'(\mathbf{R})$  показывает направление распространения падающей волны, а пунктирная прямая (как и на б)) – ориентацию оси цилиндра.

Для интерпретации геометрических соотношений между сечением препятствия и поверхностью  $\mathbf{R}$  на диаграммах а) пунктирной линией в едином масштабе изображены контур сечения цилиндра и окружность  $p'(q) = 1$ .

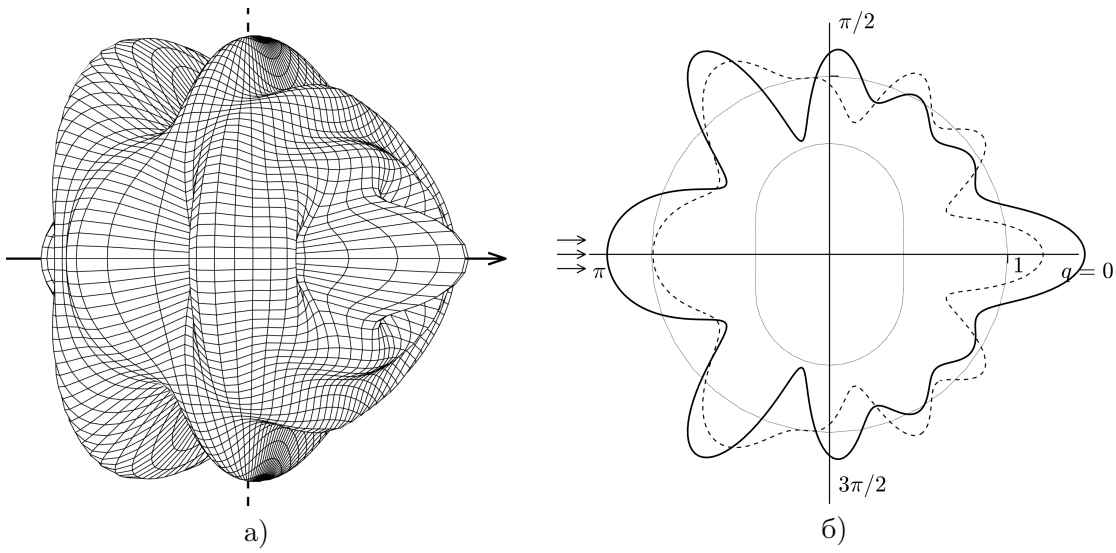


Рис. 4. а) – поверхность  $p'(\mathbf{R})$ ; б) – диаграмма  $p'(q)$  ( $\theta^* = 90^\circ$ )

Значение  $p'(q) = 1$  представляет относительное давление в падающей волне, а расстояние от единичной окружности до линии сечения цилиндра характеризует относительное расстояние точки измерения давления от поверхности тела.

Штриховой линией как база для сравнения представлена диаграмма зависимости  $p'(q)$  для сферического тела радиуса  $a_0$ .

Поверхности и диаграммы на представленных рисунках показывают, что изменение параметра  $\theta$  существенно влияет на форму распределения давления на поверхности наблюдения.

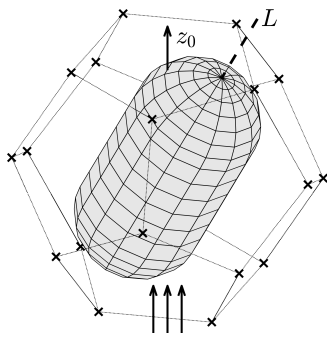


Рис. 5. Расположение точек апертуры  $V$

На рис. 6, 7 представлены линии уровня нормированных значений  $\delta'$  поверхностей функции  $\delta(\theta, \varphi)$  для двух сочетаний  $(\theta^*, \varphi^*)$ . В качестве множества  $V$  для расчетов  $\delta(\theta, \varphi)$  использовалось 20 вершин додекаэдра (см. рис. 5), лежащих на поверхности  $\mathbf{R}$ . Минимальное значение  $\delta' = 0$  достигается ровно в точках, соответствующих  $(\theta^*, \varphi^*)$ .

Это происходит потому, что при моделировании для расчета наблюдаемых значений давления (4) используется тоже решение задачи дифракции (7–10), что и для расчетных значений при произвольных значениях  $(\theta, \varphi)$ .

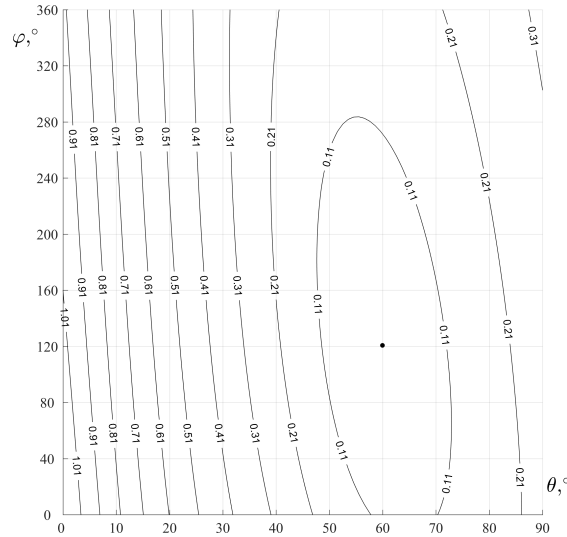
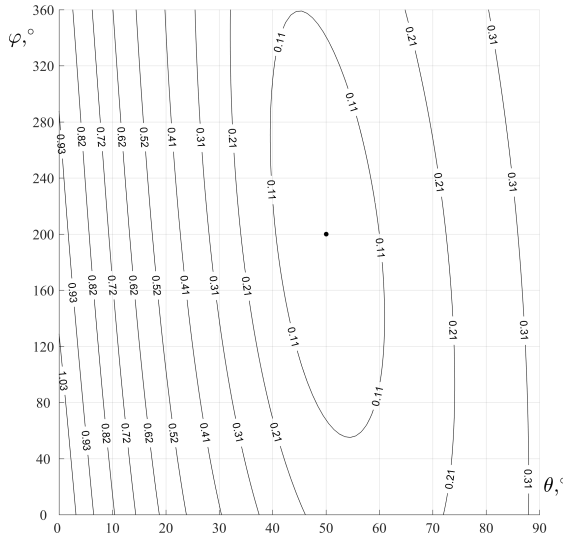


Рис. 6. Линии уровня  $\delta'$ ,  $(\theta^*, \varphi^*) = (50^\circ, 200^\circ)$  Рис. 7. Линии уровня  $\delta'$ ,  $(\theta^*, \varphi^*) = (60^\circ, 120^\circ)$

Для оценки устойчивости и точности алгоритма требуется имитационное моделирование наличия ошибок и «шума» как в наблюдаемых значениях (4), так и в расчетах давления в точках  $V$ .

**5. Заключение.** Полученное решение позволяет выполнять моделирование процедуры идентификация угловых параметров направления оси упругого цилиндра по рассеянию плоской звуковой волны.

Проведенные расчеты показывают, что предложенный алгоритм может быть использован для решения относительно несложных геометрических обратных задач акустики. Однако, для получения рекомендаций к практическому применению требуется его исследование в условиях наличия ошибок и «шума» в численном решении задачи дифракции и измеряемых значениях.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Faran J. J. Sound scattering by solid cylinders and spheres // J. Acoust. Soc. Amer. 1951. no. 23 (4). P. 405–418.
- [2] Лямшев Л. М. Отражение звука от тонких пластин и оболочек в жидкости. Москва: Изд-во АН СССР, 1955. 73 с.
- [3] Лямшев Л. М. Рассеяние звука упругими цилиндрами // Акуст. журн. 1959. № 5 (1). С. 58–63.
- [4] Fiorito R., Madigosky W., Überall H. Resonance theory of acoustic waves interacting with an elastic plate // J. Acoust. Soc. Amer. 1979. no. 66 (6). P. 1857–1866.
- [5] Überall H. Sound scattering by solid cylinders and spheres // Traitement du Signal. 1985. no. 2 (5). P. 353–357.
- [6] Gaunard G. C. Sound scattering by resonantly excited, fluid-loaded, elastic spherical shells // J. Acoust. Soc. Amer. 1991. no. 90 (5). P. 2536–2550.



- [7] Guild M. D., Alu A., Haberman M. R. Cancellation of acoustic scattering from an elastic sphere // J. Acoust. Soc. Amer. 2011. no. 129 (3). P. 1355–1365.
- [8] Stanton T. K. Sound scattering by cylinders of finite length. I. Fluid cylinders // J. Acoust. Soc. Amer. 1988. no. 83 (1). P. 55–63.
- [9] Stanton T. K. Sound scattering by cylinders of finite length. II. Elastic cylinders // J. Acoust. Soc. Amer. 1988. no. 83 (1). P. 64–67.
- [10] Stanton T. K. Sound scattering by cylinders of finite length. III. Deformed cylinders // J. Acoust. Soc. Amer. 1989. no. 86 (2). P. 691–705.
- [11] Колтон Д., Кресс Р. Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. Мир: Москва, 1987. 311 с.
- [12] Шендеров Е. Л. Излучение и рассеяние звука. Судостроение: Ленинград, 1989. 304 с.
- [13] Применение теоретико-числовых сеток в задачах дифракции звука на упругих телах / Н. Н. Добровольский, С. А. Скобельцын, Л. А. Толоконников [и др.] // Чебышевский сборник. 2022. № 23 (5). С. 206–226.
- [14] Skobel'tsyn S. A., Peshkov N. Y. Finding, by means of a scattered sound, the geometric parameters of a finite elastic cylinder located near the half-space border // J. Physics: Conference Series. 2019. no. 1203. P. 1–10.
- [15] Скучик Е. Основы акустики, Т. 1. Мир: Москва, 1976. 520 с.
- [16] Новацкий В. Теория упругости. Мир: Москва, 1975. 872 с.
- [17] Васильев Ф. П. Численные методы решения экстремальных задач. Наука: Москва, 1988. 549 с.

*S. A. Skobel'tsyn, M. V. Okorokov*

## DETERMINATION OF AXIS DIRECTION OF THE FINITE LENGTH CYLINDER WITH SPHERICAL CAPS BY SOUND WAVE SCATTERING

*Tula State University, Tula, Russia*

**Abstract.** The problem of identification the direction of the axis of a finite elastic cylinder by scattered acoustic field is considered. The cylinder is assumed to have spherical plugs. Cylinder material is a homogeneous elastic medium. Body is immersed in an ideal liquid. Location of the cylinders center is assumed to be known. The orientation of the cylinder axis is determined by measuring the acoustic pressure when a plane harmonic sound wave is scattered by the cylinder. Identification of the angular parameters of the axis direction is performed based on minimizing the deviation of the observed pressure from the calculated pressure.

**Keywords:** sound diffraction, finite elastic cylinder, near acoustic field, boundary element method, number theoretic grids, inverse scattering problem.

### REFERENCES

- [1] Faran J. J. Sound scattering by solid cylinders and spheres // J. Acoust. Soc. Amer. 1951. no. 23 (4). P. 405–418.
- [2] Lyamshev L. M. Reflection of sound from thin plates and shells in a liquid. Moscow: Publishing House of the USSR Academy of Sciences, 1955. 73 p. (in Russian).
- [3] Lyamshev L. M. Sound scattering by elastic cylinders // Acoustical Physics. 1959. no. 5 (1). P. 58–63. (in Russian).
- [4] Fiorito R., Madigosky W., Überall H. Resonance theory of acoustic waves interacting with an elastic plate // J. Acoust. Soc. Amer. 1979. no. 66 (6). P. 1857–1866.

---

*Skobel'tsyn Sergey Alekseevich*, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Tula State University, Tula, Russia.

*Okorokov Maksim Vitalievich*, Postgraduate Student, Tula State University, Tula, Russia.

- 
- [5] Überall H. Sound scattering by solid cylinders and spheres // *Traitement du Signal*. 1985. no. 2 (5). P. 353–357.
- [6] Gaunaud G. C. Sound scattering by resonantly excited, fluid-loaded, elastic spherical shells // *J. Acoust. Soc. Amer.* 1991. no. 90 (5). P. 2536–2550.
- [7] Guild M. D., Alu A., Haberman M. R. Cancellation of acoustic scattering from an elastic sphere // *J. Acoust. Soc. Amer.* 2011. no. 129 (3). P. 1355–1365.
- [8] Stanton T. K. Sound scattering by cylinders of finite length. I. Fluid cylinders // *J. Acoust. Soc. Amer.* 1988. no. 83 (1). P. 55–63.
- [9] Stanton T. K. Sound scattering by cylinders of finite length. II. Elastic cylinders // *J. Acoust. Soc. Amer.* 1988. no. 83 (1). P. 64–67.
- [10] Stanton T. K. Sound scattering by cylinders of finite length. III. Deformed cylinders // *J. Acoust. Soc. Amer.* 1989. no. 86 (2). P. 691–705.
- [11] Kolton D., Kress R. *Methods of integral equations in scattering theory*. Mir: Moscow, 1987. 311 p. (in Russian).
- [12] Shenderov E. L. *Radiation and scattering of sound*. Sudostroenie: Leningrad, 1989. 304 p. (in Russian).
- [13] Application of number-theoretic grids in problems of sound diffraction by elastic bodies / N. N. Dobrovolskii, S. A. Skobel'tsyn, L. A. Tolokonnikov et al. // *Chehyshevskii shoniik*. 2022. no. 23 (5). P. 206–226. (in Russian).
- [14] Skobelt'syn S. A., Peshkov N. Y. Finding, by means of a scattered sound, the geometric parameters of a finite elastic cylinder located near the half-space border // *J. Physics: Conference Series*. 2019. no. 1203. P. 1–10.
- [15] Skuchik E. *Acoustics basics*, V. 1. Mir: Moscow. 520 p. (in Russian).
- [16] Nowacki W. *Elasticity theory*. Mir: Moscow, 1975. 872 p. (in Russian).
- [17] Vasiliev F. P. *Numerical methods for solving extremal problems*. Nauka: Moscow, 1988. 549 p. (in Russian).