

М. А. Лаврентьева, Л. В. Левина, В. Б. Пеньков

ЭФФЕКТИВНЫЙ ПОДХОД ДЛЯ АНАЛИЗА ТЕРМОЭЛАСТОСТАТИЧЕСКИХ СОСТОЯНИЙ 3D-ОБЪЕКТОВ

Липецкий государственный технический университет, г. Липецк, Россия

Аннотация. Состояние однородной теплопроводной линейно-упругой изотропной равновесной среды описывается уравнениями теплопроводности, Коши, равновесия, законом Дюамеля-Неймана. Выделены наборы характеристик, составляющих внутреннее и граничное состояние тела. Введены скалярные произведения, определяющие пространства внутренних и граничных состояний как гильбертовы. Установлен их изоморфизм. Назначены универсальные алгоритмы формирования базисов пространств, позволяющих применять метод граничных состояний при постановках краевых задач, решение которых может не допускать декомпозицию. Сформулирована и решена задача о «колбасе», в которой тело, заключенное в оболочку, испытывает напряженное состояние за счет разности температурных деформаций волокон сцепленных сред. Выполнено иллюстрирование и проведено комментирование результатов счета.

Ключевые слова: метод граничных состояний, МГС, внутреннее состояние тела, граничное состояние, термоупругость, термоэластостатика.

DOI: 10.37972/chgpu.2023.58.4.004

УДК: 539.3

Введение. Определяющие соотношения линейной изотропной однородной термоупругой уравновешенной среды описаны в классических руководствах по механике деформируемого твердого тела [1, 2]. Применение современного эффективного метода

© Лаврентьева М. А., Левина Л. В., Пеньков В. Б., 2023

Лаврентьева Мария Алексеевна

e-mail: masy1997@gmail.com, студент кафедры прикладной математики, Липецкий государственный технический университет, г. Липецк, Россия.

Левина Любовь Владимировна

e-mail: satakina_lyubov@mail.ru, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры прикладной математики, Липецкий государственный технический университет, г. Липецк, Россия.

Пеньков Виктор Борисович

e-mail: vbrenkov@mail.ru, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры общей механики, Липецкий государственный технический университет, г. Липецк, Россия.

Поступила 10.12.2023

граничных состояний подробно изложено в монографии [3]. Важные аспекты, касающиеся организации базисов пространств внутренних и граничных состояний для произвольных ограниченных и неограниченных, односвязных и многополостных тел, отражены в работе [4]. Вопросы, связанные с эффективным построением частных решений задач термостатики и эластостатики, рассмотрены в статье [5]. Ниже внимание уделено общему алгоритму решения задач термоэластостатики, позволяющему эффективно строить решения задач как со связанными, так и с несвязанными на границе тела характеристиками упругих и температурных полей. Возникла необходимость в конструировании избыточных наборов характеристик элементов пространств внутренних и граничных состояний для МГС и определении скалярных произведений в соответствующих гильбертовых пространствах состояний, позволяющих эффективно проводить ортогонализацию их базисов, генерировать разрешающую бесконечную систему линейных алгебраических уравнений (БСУ) относительно коэффициентов Фурье, выписывать результаты решения в численно-аналитической форме.

1. Термоэластостатическое состояние однородной изотропной среды.

Физически однородная теплопроводная линейно-упругая изотропная среда занимает область $V \subset R^3$ с границей ∂V . Геометрические характеристики области V не ограничиваются: возможны односвязная ограниченная область, однополостная неограниченная, многополостные неограниченные и ограниченные варианты.

Термостатическое состояние описывается уравнением Пуассона, которое в тензорно-индексной форме записи имеет вид

$$T_{,ii} + \frac{1}{k}Q = 0, x \in V \quad (1.1)$$

Здесь T — температура, отсчитываемая от некоторого фиксированного уровня T_0 , k — параметр температуропроводности, Q — объемная плотность тепловых источников в теле, $x = \{x_1, x_2, x_3\}$ [1].

Упругое состояние описывается набором характеристик $\xi^E = \{u_i, \varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}\} \in \Xi^E$. Здесь в списке представлены компоненты вектора перемещений u_i , компоненты тензоров упругих деформаций ε_{ij} и напряжений σ_{ij} , ξ^E — элемент пространства внутренних состояний Ξ^E упругого тела.

Компоненты тензора деформаций и вектора перемещений линейной среды связаны уравнением Коши [2]

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (1.2)$$

Учет температурного расширения $\varepsilon_{ij}^T = 2T\delta_{ij}$ вносит поправку в закон Гука в форме Ламе, превращая его в закон Дюамеля-Неймана

$$\sigma_{ij} = \lambda\theta\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} - (3\lambda + 2\mu)\alpha T\delta_{ij} \quad (1.3)$$

Здесь $\theta = \varepsilon_{kk}$ — объемная упругая деформация, λ, μ — упругие параметры Ламе, δ_{ij} — символ Кронекера, α — параметр температурного расширения среды.

При наличии объемных сил X_i поле напряжений подчинено уравнениям равновесия

$$\sigma_{ij,j} + X_i = 0. \quad (1.4)$$

Если объемные силы порождены только полем температуры, то

$$X_i = -(3\lambda + 2\mu)\alpha T_{,i}. \quad (1.5)$$

Система дифференциальных уравнений Ламе принимает вид

$$\mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu) u_{j,ji} - (3\lambda + 2\mu) \alpha T_{,i} = 0. \quad (1.6)$$

Совместно с (1.1) она образует замкнутую систему уравнений в частных производных относительно температуры и перемещений. Структура этой системы подсказывает следующий порядок решения: сначала определить температурное состояние $\xi^T = \{T, T_{,i}\} \in \Xi^T$ как элемент пространства внутренних состояний термостатического пространства Ξ^T и ему отвечающее граничное состояние $\gamma^T = \left\{T, \frac{dT}{d\mathbf{n}}\right\} \in \Gamma^T$, затем восстановить упругие состояния ε^E, γ^E . Это возможно, если набор $\xi = \xi^E \cup \xi^T = \{u_i, \varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}, T, T_{,i}\} \in \Xi, x \in V$ не «завязывается» в граничных условиях через компоненты изоморфного ему граничного состояния $\gamma = \gamma^E \cup \gamma^T = \left\{u_i, p_i, T, \frac{dT}{d\mathbf{n}}\right\} \in \Gamma, x \in \partial V$. В противном случае декомпозиция термоэластостатической задачи становится невозможной и возникает необходимость решения задачи в пространствах $\Xi \leftrightarrow \Gamma$. В общем случае декомпозицию проводить необязательно.

2. Универсальный вариант метода граничных состояний для решения термоэластостатических задач. Пространства состояний Ξ, Γ являются линейными. Они изоморфны при условии, что информация о граничном состоянии γ единственным образом восстанавливает внутреннее состояние ξ . Это возможно, если жесткая составляющая движения тела V зафиксирована. Например, полюс $O(0, 0, 0)$ является неподвижным для всех элементов пространства Ξ и вектор малого поворота вокруг полюса O равен нулю. Будем полагать таковыми все элементы счетного базиса пространства Ξ . Это обеспечивается при формировании исходного базиса пространства.

Чтобы линейное бесконечномерное пространство Ξ было гильбертовым, необходимо снабдить его скалярным произведением. Это обеспечит его метрику, полноту и плотность. Классическими примерами таковых пространств является гильбертовы пространства эластостатических и термостатических внутренних состояний Ξ^E, Ξ^T .

Эластостатика. Внутренне и граничные состояния для тела V имеют наборы

$$\xi^E = \{u_i^E, \varepsilon_{ij}^E, \sigma_{ij}^E\} \in \Xi^E, \gamma^E = \{u_i^E, p_i^E\} \in \Gamma^E. \quad (2.1)$$

Их изоморфизм $\xi^E \leftrightarrow \gamma^E$ достигается при $p_i^E = \sigma_{ij}^E n_j$, где $\{n_j\}$ — компоненты вектора внешней нормали к границе ∂V тела и упомянутой выше нормировкой жёсткого движения тела.

Скалярное произведение изоморфных пар элементов в пространствах $\Xi^E \leftrightarrow \Gamma^E$ равны между собой в силу принципа возможных перемещений:

$$(\xi^{E(m)}, \xi^{E(n)})_E = \int_V \sigma_{ij}^{E(m)} \varepsilon_{ij}^{E(n)} dV = \int_{\partial V} p_i^{E(m)} u_i^{E(n)} dS = (\gamma^{E(m)}, \gamma^{E(n)})_E \quad (2.2)$$

благодаря чему возник термин «гильбертов изоморфизм».

При организации базисов используются общие решения Аржаных-Слободянского [2] системы уравнений Ламе

$$\mu u_{i,jj}^E + (\lambda + \mu) u_{j,ji}^E = 0 \quad (2.3)$$

Конструированию базисов способствует наличие базисов гармонических многочленов и их инверсий [4].

Термостатика. Избыточные наборы элементов пространств внутренних и граничных состояний имеют вид

$$\xi^T = \{T, T_{,i}\} \in \Xi^T, \gamma^T = \left\{T, \frac{dT}{d\mathbf{n}}\right\} \in \Gamma^T \quad (2.4)$$

Они изоморфны ($\xi^T \leftrightarrow \gamma^T$) благодаря равенству $\frac{dT}{d\mathbf{n}} = T_{,i}n_i$ и фиксированию общего отсчетного уровня температуры T_0 .

Скалярные произведения изоморфных пар элементов пространств $\Xi^T \leftrightarrow \Gamma^T$ равны между собой благодаря свойствам гармонических функций, из которых собственно и набирается базис:

$$(\xi^{T(m)}, \xi^{T(n)})_{\Xi^T} = \int_V T_{,i}^{(m)} T_{,i}^{(n)} dV = \int_{\partial V} T^{(m)} \frac{dT^{(n)}}{dn} dS = (\gamma^{T(m)}, \gamma^{T(n)})_{\Gamma^T} \quad (2.5)$$

Базис пространства Ξ^T состоит именно из гармонических функций, поскольку каждый элемент его отвечает уравнению Лапласа

$$T_{,ii} = 0$$

Термоэластостатика. Для универсального описания элементов ξ, γ пространств внутренних и граничных состояний их избыточные наборы удобно представлять в формах

$$\xi = \{u_i^E, u_i^T, \varepsilon_{ij}^E, \varepsilon_{ij}^T, \sigma_{ij}^E, \sigma_{ij}^T, T, T_{,i}\} \in \Xi, x \in V, \gamma = \left\{u_i^E, u_i^T, p_i^E, p_i^T, T, \frac{dT}{d\mathbf{n}}\right\} \in \Gamma, x \in \partial V \quad (2.6)$$

где индексные символы "E", "T" указывают на принадлежность соответствующих объектов к «чисто упругим» и «чисто температурным» следствиям. В частности, здесь присутствуют «приобретенные» деформации

$$\varepsilon_{ij}^T = \alpha T \delta_{ij}, \quad (2.7)$$

образованные температурным расширением среды, и «потерянные» напряжения

$$\sigma_{ij}^T = (3\lambda + 2\mu)\alpha T \delta_{ij}, \quad (2.8)$$

не востребованные для формирования «приобретенных» деформаций.

«Чисто упругие» поля ξ^E, γ^E отвечают уравнению Коши (1.2), уравнениям равновесия (1.4) без учета температурных объемных сил X_i^T , и обобщенному закону Гука

$$\sigma_{ij}^E = \lambda \theta^E \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}^E, \theta^E = \varepsilon_{kk}^E \quad (2.9)$$

и, как следствие, уравнениям Ламе (записанных без учета объемных сил X_i^E) (2.3).

Поскольку частное решение для неоднородных уравнений Ламе строится с высокой точностью [5], то базисы пространства состояний Ξ^E набираются при использовании набора гармонических многочленов

$$\Phi = \{x, y, z, xy, xz, yz, x^2 - y^2, x^2 - z^2, xyz, \dots\} \quad (2.10)$$

Общее решение Аржаных–Слободянского для внутренности односвязной ограниченной области дает:

$$u_i^E = 4(1 - \nu)\varphi_i + x_j \varphi_{i,j} - x_i \varphi_{j,j}, \varphi_k \in \Phi \quad (2.11)$$

где ν — коэффициент Пуассона.

Для внешности односвязной ограниченной полости решения Аржаных–Слободянского выражаются через инверсии гармонических многочленов [6]

$$u_i^E = 4(1 - \nu)\varphi_i - (x_j\varphi_j)_{,i}, \varphi_k \in \Psi, \quad (2.12)$$

$$\Psi \in \left\{ \frac{1}{r}, \frac{x}{r^3}, \frac{y}{r^3}, \frac{z}{r^3}, \frac{yz}{r^5}, \frac{xz}{r^5}, \dots \right\}, r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

В многополостном случае базис наполняется линейно-независимыми вариантами, обусловленными выбором центром инверсий внутри каждой отдельной полости.

К назначению скалярного произведения следуют подойти аккуратно. Коммутативность скалярного произведения

$$(\xi^{E(m)}, \xi^{E(n)})_E = (\xi^{E(n)}, \xi^{E(m)})_E$$

не может быть переписана напрямую при организации свертки $\langle \sigma_{ij}^{(m)}, \varepsilon_{ij}^{(n)} \rangle = \int_V \sigma_{ij}^{(m)} \varepsilon_{ij}^{(n)} dV$ в задаче термоэластостатики, поскольку $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^E + \varepsilon_{ij}^T$, $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^E - \sigma_{ij}^T$ и, следовательно,

$$\begin{aligned} \langle \sigma_{ij}^{(m)}, \varepsilon_{ij}^{(n)} \rangle &= \langle \sigma_{ij}^{E(m)} - \sigma_{ij}^{T(m)}, \varepsilon_{ij}^{E(n)} + \varepsilon_{ij}^{T(n)} \rangle = \\ &= \langle \sigma_{ij}^{E(m)}, \varepsilon_{ij}^{E(n)} \rangle - \langle \sigma_{ij}^{T(m)}, \varepsilon_{ij}^{T(n)} \rangle + \langle \sigma_{ij}^{E(m)}, \varepsilon_{ij}^{T(n)} \rangle - \langle \sigma_{ij}^{T(m)}, \varepsilon_{ij}^{E(n)} \rangle \neq \langle \sigma_{ij}^{(n)}, \varepsilon_{ij}^{(m)} \rangle. \end{aligned}$$

В неравенстве легко убедиться, положив $n = m$.

В качестве скалярного произведения допустимо назначать

$$(\xi^{(m)}, \xi^{(n)})_{\Xi} = \tilde{\alpha}(\xi^{E(m)}, \xi^{E(n)})_E + \tilde{\beta}(\xi^{T(m)}, \xi^{T(n)})_T, \quad (2.13)$$

где $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$ — положительные действительные числа.

Эта комбинация использует всю информацию о пространстве Ξ (с учетом положенных ограничений нормировки элементов). В пространстве Γ ей отвечает равное для изоморфных пар элементов скалярное произведение

$$(\gamma^{(m)}, \gamma^{(n)})_{\Gamma} = \tilde{\alpha}(\gamma^{E(m)}, \gamma^{E(n)})_E + \tilde{\beta}(\gamma^{T(m)}, \gamma^{T(n)})_T. \quad (2.14)$$

Таким образом, оба термоэластостатических пространства $\Xi \leftrightarrow \Gamma$ благодаря $(\xi^{(m)}, \xi^{(n)})_{\Xi} = (\gamma^{(m)}, \gamma^{(n)})_{\Gamma}$ удовлетворяют «гильбертову изоморфизму».

Любой элемент гармонического базиса порождает три состояния пространства Ξ^E (см. общее решение Аржаных–Слободянского [2]), и независимо от этого, один элемент пространства Ξ^T . Их «чистка» формирует базисы соответствующих пространств. Следовательно: каждый элемент пространства гармонических функций позволяет построить: 1) три элемента вида $\xi = \{u_i^E, \{0\}, \varepsilon_{ij}^E, \{0\}, \sigma_{ij}^E, \{0\}, 0, \{0\}\} \in \Xi$; 2) один элемент вида $\xi = \{\{0\}, u_i^T, \{0\}, \varepsilon_{ij}^T, \{0\}, \sigma_{ij}^T, T, T, i\} \in \Xi$, где символом T помечены частные решения от объемных сил температурного характера (1.5).

После ортогонализации базиса, использования разложения Фурье

$$\xi = \sum_k c_k \xi^{(k)}, \gamma = \sum_k c_k \gamma^{(k)} \quad (2.15)$$

и обработки граничных условий система уравнений (1.1), (1.6) приводится к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов

Фурье c_j

$$\sum_j a_{kj} c_j = b_k, \quad (2.16)$$

где коэффициенты a_{kj} определяются через поверхностные интегралы от базисных элементов $\gamma^{(k)}, \gamma^{(j)}$ либо через объемные интегралы от $\xi^{(k)}, \xi^{(j)}$, а правые части используют кроме $\gamma^{(k)}$ еще и содержимое граничных условий.

Решение усеченной БСУ проводится с учетом двух факторов: 1) насыщение суммы Бесселя; 2) невязка построенного граничного состояния с условиями на границе тела.

3. Постановка задачи о «колбасе». Изотропное однородное термоэластостатическое тело занимает область V с границей ∂V . В каждой точке гладкой поверхности определена нормаль $\mathbf{n}$ и две касательные (касательная τ и бикасательная $\mathbf{b}$): $\tau \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0}$, $|\tau| = |\mathbf{n}| = |\mathbf{b}| = 1$, $\mathbf{b} = \mathbf{n} \times \tau$.

Область V по поверхности ∂V сцеплена с тонкой анизотропной оболочкой типа ткани: волокна «основа» и «уток» ориентированы по координатным линиям, определяющим форму тела. Коэффициент линейного температурного расширения α_0 оболочки незначителен по сравнению с таковым α для однородной изотропной линейно упругой среды, содержащейся в области V : $\alpha_0 \ll \alpha$; волокна в окрестности любой точки x оболочки получают относительные удлинения только за счет изменения температуры $T(x)$, равные $\varepsilon = \alpha_0 T$.

При отсутствии внешних силовых факторов, кроме нормального воздействия со стороны оболочки, приповерхностные точки тела в области V имеют только нормальные деформации:

$$\hat{\varepsilon} = T \cdot \text{diag}\{\alpha, \alpha - \alpha_0, \alpha - \alpha_0\} \approx \alpha T \cdot \text{diag}\{1, -1, -1\}.$$

Тензор деформаций представлен в «естественной» системе координат $\mathbf{n}, \tau, \mathbf{b}$. Объемная деформация составляет $\theta = \varepsilon_n + \varepsilon_\tau + \varepsilon_b = (2\alpha_0 - \alpha)T \approx -\alpha T$.

Чисто упругие напряжения подчинены закону Гука:

$$\sigma_n = \lambda \theta + 2\mu \varepsilon_n = [2\lambda \alpha_0 + (2\mu - \lambda)\alpha]T \approx (2\mu - \lambda)\alpha T$$

$$\sigma_\tau = \sigma_b = [2\alpha_0(\lambda + \mu) - \alpha(\lambda + 2\mu)]T \approx -\alpha(\lambda + 2\mu)T.$$

При отсутствии внешних механических воздействий (кроме нормального усилия со стороны оболочки) касательная составляющая деформаций и напряжений отсутствуют. Тензор напряжений вблизи границы имеет оценку

$$\hat{\sigma} = \alpha T \cdot \text{diag}\{2\mu - \lambda, \lambda, \lambda\}$$

Тензор напряжений $\hat{\sigma}$ формирует на границе ∂V тела поверхностное усилие

$$\mathbf{p} = \hat{\sigma} \cdot \mathbf{n} = (2\mu - \lambda)\alpha T \cdot \mathbf{n}. \quad (3.1)$$

Рассмотрим вариант граничных условий, когда поверхность ∂V тела V свободна от внешних механических воздействий, а возмущение состояния происходит только

заданным температурным потоком $\frac{dT}{dn}, x \in \partial V$.

Для формирования разрешающей БСУ воспользуемся скалярным произведением в пространстве граничных состояний Γ , полагая $\tilde{\alpha} = \tilde{\beta} = 1$. После ортогонализации

имеем определение для коэффициента Фурье c_k :

$$c_k = \int_{\partial V} p u^{(k)} dS + \int_{\partial V} \frac{dT}{d\mathbf{n}} T^{(k)} dS.$$

Учитывая, что $\sum_{j=1}^{\infty} \delta_{jk} c_j = c_k$, $T = \sum_{j=1}^{\infty} c_j T^{(j)}$ и переходя к тензорно-индексной форме записи, получаем разрешающую систему уравнений в матричной форме, усеченную до размерности N :

$$A\mathbf{c} = \mathbf{b}, \quad (3.2)$$

$$a_{jk} = [\delta_{jk} + \int_{\partial V} p_i^{T(j)} u_i^{E(k)} dS], b_j = \int_{\partial V} \left[\frac{dT}{d\mathbf{n}} T^{(j)} + p_i u_i^{E(j)} \right] dS,$$

где символами T, E помечены составляющие граничных состояний, относящиеся строго к температурным и упругим эффектам.

Ниже рассмотрен вариант граничных условий (ГУ) Неймана $\frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} = \cos 2\varphi$, где φ — угол, отсчитываемый вокруг продольной оси осесимметричного тела (рис. 1) от сечения $y = 0, x > 0$. В безразмерном виде заданы следующие параметры среды: $\lambda = \mu = 1, \alpha = 0.2$.

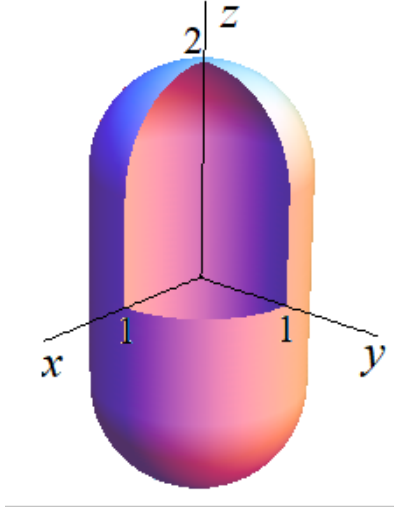


Рис. 1. Рассматриваемое тело

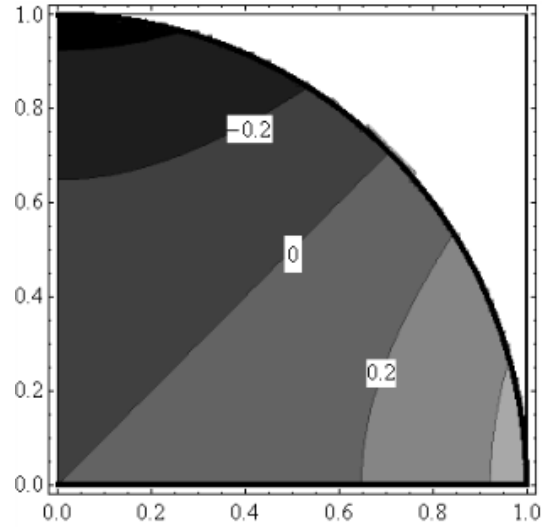


Рис. 2. Распределение температуры в сечении $z = 0$

Отрезок базиса пространства внутренних состояний сформирован набором гармонических многочленов до порядка 5 включительно и составлен из 137 элементов. Поля напряжений $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xz}$ приведены на рис.3 в виде изолиний для трех вариантов сечения: $\varphi \in \left\{0; \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right\}$. На рис. 4 представлены распределения этих же величин в сечениях $z \in \{0; 1; 1.5\}$.

Анализ термоупругого состояния позволяет сделать ряд выводов: 1) в сечении $\varphi = 0$ поток тепла выходит из тела наружу. В цилиндрической части тела это приводит к

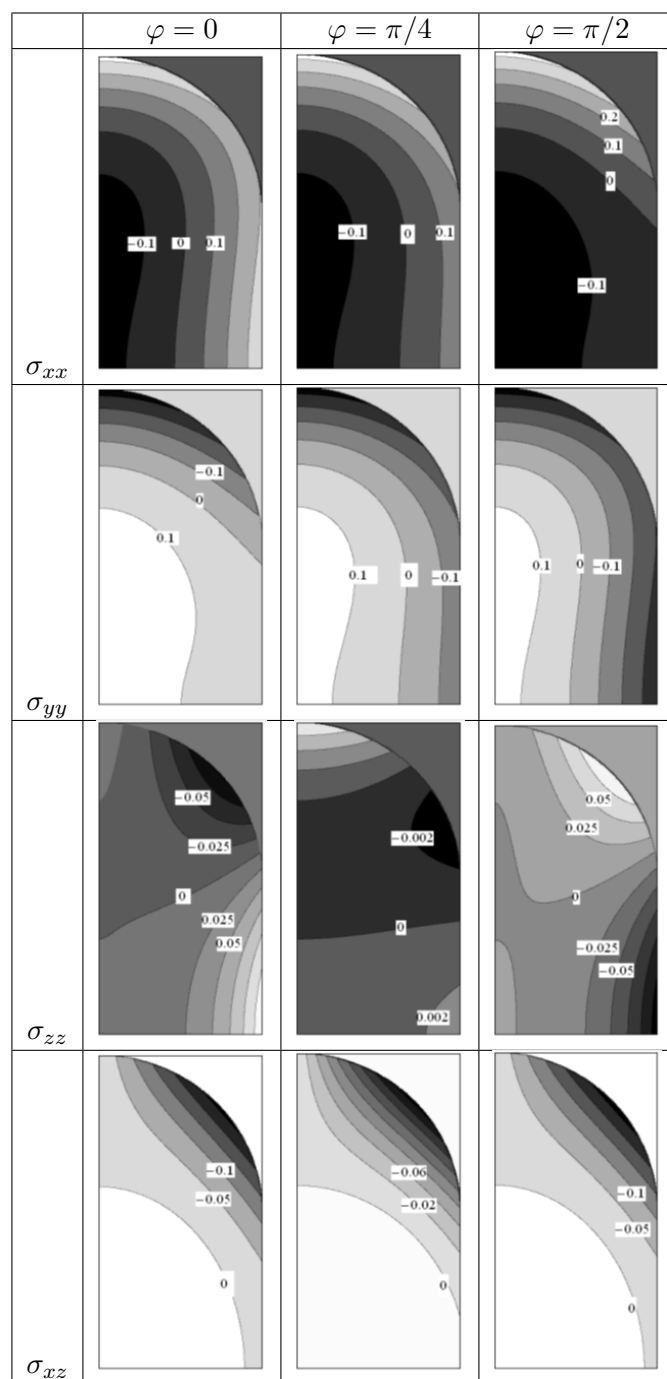


Рис.3. Распределение напряжений в осевых сечениях

ощутимым растягивающим радиальным напряжениям (σ_{xx}), но вблизи оси симметрии $x = y = 0$ они — сжимающие; уровень напряжений σ_{xx} снижается в сечении $\varphi = \pi/4$; 2) окружные напряжения (σ_{yy} при $\varphi = 0$) — растягивающие вблизи оси симметрии и становятся сжимающими около оболочки; 3) осевые напряжения (σ_{zz} при $\varphi = 0$)

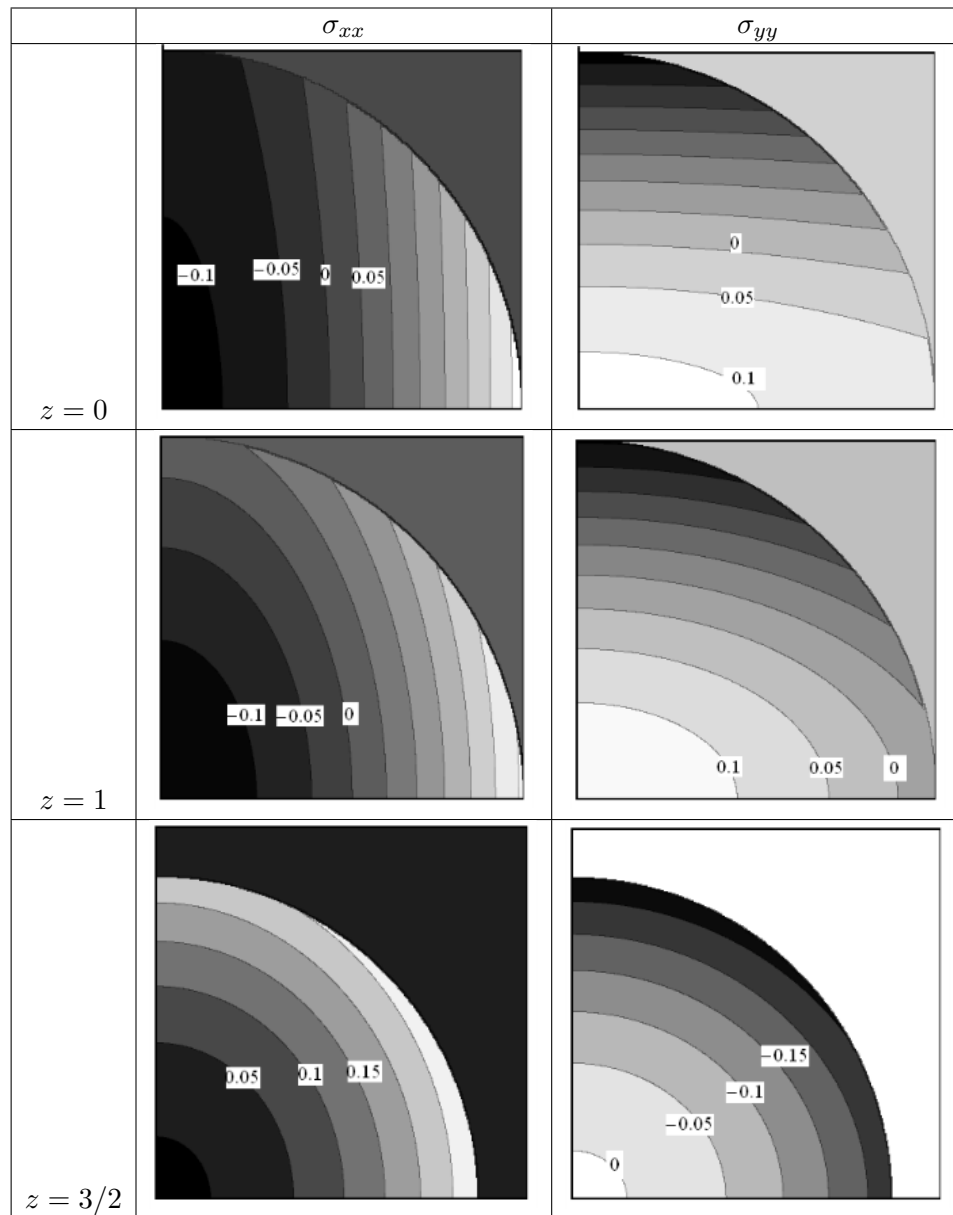


Рис.4. Распределение напряжений в поперечных сечениях

растягивающие у цилиндрической части поверхности и сжимающие вблизи вершин тела; при повороте сечения их уровень заметно снижается; 4) в срединной части тела ($|z| < 1, |x| < 1$) искажения формы тела не наблюдаются. Закругления у вершин ($z \approx 1.5$, вблизи поверхности) становятся более пологими, «распрямляются».

Выводы подтверждаются анализом купор тела в сечениях $z \in \{0; 1; 1.5\}$ (рис.4).

Заключение. 1. Разработан эффективный аппарат анализа термоэластостатического состояния тел произвольной геометрической конфигурации, в котором не производится декомпозиция задачи на последовательность задач термостатики и эластостатики. Этот подход позволяет строить решения задач с граничными условиями, в которых характеристики напряженно-деформированного и температурного состояний «завязаны» в ГУ.

2. Универсальный подход применен к решению задач о «колбасе», в которой ГУ формируются за счёт взаимодействия оболочки и тела. Построено и иллюстрировано решение задачи, в которой напряженное состояние формируется как следствие установившегося потока тепла через границу области, что обуславливает режим взаимодействия оболочки и тела.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Трёхмерные задачи математической теории упругости / В.Д. Купрадзе, Т.Г. Гегелия, М.О. Башелейшвили [и др.]. Наука, 1976. с. 664.
- [2] Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твёрдого тела. Наука, 1979. с. 744.
- [3] Пеньков В.Б., Саталкина Л.В. Метод граничных состояний с возмущениями: неоднородные и нелинейные задачи теории упругости и термоупругости. LAP LAMBERT Academic Publishing GmbH & Co., 2012. с. 108.
- [4] Алгоритм аналитического решения основных задач для упругих тел с полостями и поверхностными дефектами / В.Б. Пеньков, О.С. Новикова, Л.В. Левина [и др.] // Журнал физики: Серия конференций «Текущие проблемы». 2018. с. 012016.
- [5] Пеньков В.Б., Левина Л.В. Метод опорного базиса построения частного решения линейного неоднородного операторного уравнения математической физики // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. 2022. № 3. С. 91–101.
- [6] Пеньков В.Б., Саталкина Л.В., Шульмин А.С. Применение метода граничных состояний для анализа упругой среды с полостями и включениями // Прикладная математика и механика. 2014. Т. 78, № 4. С. 542–556.

M. A. Lavrentieva, L. V. Levina, V. B. Penkov

AN EFFECTIVE APPROACH FOR ANALYZING THERMOELASTOSTATIC STATES OF 3D-OBJECTS

Lipetsk State Technical University, Lipetsk, Russia

Abstract. The state of a homogeneous, heat-conducting, linearly elastic, isotropic equilibrium medium is described by the equations of heat conduction, Cauchy, equilibrium, and the Duhamel-Neumann law. Sets of characteristics that constitute the internal and boundary state of the body are identified. Scalar products defining the spaces of internal and boundary states as Hilbert spaces have been introduced. Their isomorphism is established. Universal algorithms for forming the bases of spaces have been assigned, allowing the application of the boundary state method in the settings of boundary value problems, the solution of which may not allow decomposition. The problem of the 'sausage' has been formulated and solved, in which a body enclosed in a shell experiences a stressed state due to the difference in temperature deformations of fibers of coupled media. Illustration and commentary of the results of the calculation have been performed.

Keywords: boundary state method, BSM, internal state of the body, boundary state, thermoelasticity, thermoelastostatics.

REFERENCES

- [1] Three-Dimensional Problems of the Mathematical Theory of Elasticity / V. Kupradze, T. Gegelia, M. Basheleishvili et al. Nauka, 1976. p. 664.
- [2] Rabotnov Y. Mechanics of Deformable Solid Body. Nauka, 1979. p. 744.
- [3] Penkov V., Satal'kina L. Boundary State Method with Perturbations: Non-Homogeneous and Nonlinear Problems of the Theory of Elasticity and Thermoelasticity. LAP LAMBERT Academic Publishing GmbH & Co., 2012. p. 108.
- [4] An Algorithm for Analytical Solution of Basic Problems for Elastostatic Bodies with Cavities and Surface Flaws / V. Penkov, O. Novikova, L. Levina et al. // Journal of Physics: Conference Series Current Problems. 2018. p. 012016.
- [5] Penkov V., Levina L. The Method of Support Basis for Constructing a Particular Solution of a Linear Non-Homogeneous Operator Equation in Mathematical Physics // Bulletin of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics. 2022. no. 3. P. 91–101.
- [6] Penkov V., Satal'kina L., Shulmin A. Application of the Boundary State Method for Analysis of Elastic Media with Cavities and Inclusions // Applied Mathematics and Mechanics. 2014. Vol. 78, no. 4. P. 542–556.

Lavrentyeva Maria Alekseevna

e-mail: masy1997@gmail.com, Student, Department of Applied Mathematics, Lipetsk State Technical University, Lipetsk, Russia.

Levina Lyubov Vladimirovna

e-mail: satalkina_lyubov@mail.ru, PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Applied Mathematics, Lipetsk State Technical University, Lipetsk, Russia.

Penkov Viktor Borisovich

e-mail: vbpenkov@mail.ru, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Department of General Mechanics, Lipetsk State Technical University, Lipetsk, Russia.