Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2023. № 4 (58). С. 86–120

Е. В. Мурашкин, Ю. Н. Радаев

МУЛЬТИВЕСОВАЯ ТЕРМОМЕХАНИКА ГЕМИТРОПНЫХ МИКРОПОЛЯРНЫХ ТЕЛ

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия

Аннотация. Статья посвящена вопросам детерминирования алгебраических весов микро- и наномасштабных мультивесовых характеристик термомеханики гемитропных микрополярных тел. Обсуждаются фундаментальные понятия псевдоинвариантых элементов объема и площади нечетных целых весов в трехмерном пространстве. Развиваемая теория гемитропной микрополярной термоупругости формулируется в терминах контравариантного псевдовектора спинорных перемещений положительного нечетного веса при условии постулирования абсолютной инвариантности абсолютной термодинамической температуры, массы и массовых плотностей: энтропии, внутренней энергии, свободной энергии Гельмгольца, контролируемого и неконтролируемого производства энтропии. Предложены мультивесовые псевдотензорные формулировки принципа виртуальных перемещений и приведенного уравнения баланса энергии. Получены и проанализированы мультивесовые формулировки псевдовекторных дифференциальных уравнений статики и динамики гемитропного термоупругого тела. Обсуждаются вопросы взаимовлияния алгебраических весов определяющих псевдоскаляров с целью учета их трансформации в результате преобразования трехмерного пространства, меняющего ориентацию координатного базиса на противоположную.

Ключевые слова: алгебраический вес, псевдотензор, наномасштаб, микромасштаб, теплопроводность, микрополярность, тензорный элемент объема, мультивесовая формулировка, псевдовектор потока тепла, зеркальное отражение, гемитропное тело

DOI: 10.37972/chgpu.2023.58.4.010

УДК: 539.374

Мурашкин Евгений Валерьевич
`e-mail:` murashkin@ipmnet.ru, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.
Радаев Юрий Николаевич
`e-mail:` y.radayev@gmail.com, radayev@ipmnet.ru, доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 23-21-00262 “Связанная термомеханика микрополярных полуизотропных сред”

Поступила 20.09.2023

1. Введение и предварительные сведения. Все более широкое применение метаматериалов (биокомпозитов) [1–3], обладающих микро- и наноструктурными особенностями, в промышленном производстве, медицине, строительстве требует развития методов математического моделирования термомеханических процессов их формоизменения. Термомеханические модули таких материалов за счет их нечетных алгебраических весов проявляют чувствительность к изменениям ориентации трехмерного пространства. Поэтому при построении математических моделей, учитывающих указанные микроструктурные особенности материалов, следует использовать аппарат псевдотензорного исчисления [4–11] и методы микрополярной термомеханики [12–18].

Следует отметить, что построение математических моделей, учитывающих микро- и наноструктурные характеристические длины материалов, может быть проведено различными способами [19–24]. Фундаментальной определяющей характеристикой, связанной с характерным размером микроструктуры (гранулы, соты, диполи жидких кристаллов, полимерные молекулы, клеточные структуры и т.д.) и задающей микро- и наномасштаб в таких моделях, является характерная микродлина, обозначаемая L в работах [18, 21–24] или l в статьях Нейбера [19, 20]. Как было ранее показано [25, 26] определяющие постоянные l и L связаны прямой пропорциональной зависимостью с точностью до физически безразмерного множителя.

При построении моделей микрополярной термомеханики стандартная характерная длина микро- и нанострутктурных состояний: для макромеханики имеет порядок $L \sim 1$м, для микромеханики — $L \sim 10^{-6}$м, а для наномеханики — $L \sim 10^{-9}$м. Важно отметить, что характерная длина микрополярной теории L является одним из важнейших масштабных определяющих микрополярных модулей, которому может быть естественным образом приписан нечетный алгебраический вес, т.е. ее можно трактовать как определяющий псевдоскаляр, реагирующий на изменение ориентации координатного базиса (с левой на правую, и, наоборот, с правой на левую).

Определяющие и дифференциальные уравнения в частных производных, составляющие модель гемитропной микрополярной термоупругости содержат слагаемые, отличающиеся степенями характерной длины. Например, в мультивесовые формулировки указанных уравнений входят слагаемые, имеющие порядок малости L^2, L^1 и L^0. Отмеченное обстоятельство следует учитывать при численных расчетах, т.к. в случае $L^2 \sim 10^{-18}$ м вклад, вносимый соответствующими слагаемыми в общую сумму, может оказаться меньше чем общая вычислительная погрешность. Указанная особенность, в принципе, позволяет применить к исследованию системы дифференциальных уравнений микрополярной термоупругости теорию сингулярных возмущений [27, 28].

Алгебраический вес характерной микродлины зависит от способа определения кинематических характеристик микрополярного тела, например, от алгебраического веса псевдовектора спинорных перемещений. Кинематику микрополярного тела можно задать с помощью одной из трех знаменитых теорем Шаля [29, 30]. Однако, как показывает литературный поиск, при формулировке основных положений линейной микрополярной теории упругости [12, 15, 16] по-существу используется только одна (вторая) теорема Шаля. Отметим, перспективы использования винтовой (третьей) теоремы Шаля–Моцци, в которой кинематика микрополярного тела представляется как скользящий поворот. Однако, как показывает литературный поиск, указанная теорема совсем не используется при математическом моделировании микрополярного континуума. В классических работах [13–16] по микрополярной упругости и термоупругости обычно оперируют с двумя независимыми полями трансляционных и спинорных перемещений (микроповоротов), последнее из которых наиболее просто задается псевдовектором нечетного алгебраического веса. Возможны различные способы задания псевдовектора спинорных перемещений. В частности, представлению с помощью контравариантного псевдовектора $\overset{[+1]}{\phi}{}^{k}$ положительного веса $+1$ посвящены работы [21–24], а моделям микрополярных тел, в которых использовался ковариантный псевдовектор $\overset{[-1]}{\phi}{}_{k}$ отрицательного веса -1, посвящены работы [31,32]). Указанные псевдовекторы легко преобразуются к абсолютным векторам спинорных перемещений ϕ^k (или ϕ_k) с помощью правила баланса алгебраических весов [32–35].

Система связанных определяющих и дифференциальных уравнений в частных производных микрополярной термоупругости может быть получена как следствие принципа виртуальных перемещений в сочетании с правилом множителей Лагранжа и приведенного уравнения баланса энергии. Интегральные формулировки указанного вариационного принципа существенным образом зависят от способа измерения элементарных объемов и площадей. Такой выбор существенным образом влияет на алгебраический вес приписываемый основным характеристикам микро-, нано- термомеханических состояний микрополярного континуума таким, как массовая плотность, тепловой поток, объемные плотности внутренней энергии, свободной энергии Гельмгольца и энтропии, а также — на веса связанных с ними определяющих псевдоскаляров. При этом, экстенсивные термодинамические параметры, проявляющие свойства количественной аддитивности, задаваемые в объеме, постулируются абсолютными скалярами. С другой стороны, приписывание того или иного веса псевдовектору спинорных перемещений, также приводит к изменению сопутствующих алгебраических весов, приписываемых определяющим псевдоскалярам.

Детерминирование алгебраических весов псевдоинвариантных элементов объема и площади, а также веса псевдовектора спинорных перемещений требует особой аккуратности, т.к. это приводит к тому, что определяющие постоянные оказываются псевдоскалярами, а характеристики микро- и нано- структурных термомеханических состояний проявляют псевдотензорные свойства. Исследованию вариантов использования псевдотензорного формализма при построении моделей теорий микрополярной термоупругости посвящены работы [36–41]. Так например, если при выводе основных уравнений теории микрополярной термоупругости использовать естественные элементы объема и площади,[1] как было показано ранее в работе [40] тепловой поток, тензор силовых напряжений, плотность массы и теплоемкость также оказываются псевдотензорными величинами положительного нечетного веса. С другой стороны, при выборе дублетного элемента объема и соответствующего элемента площади тензор силовых напряжений оказывается псевдотензором отрицательного веса -1, тензор моментных

[1]Отметим, что использование естественных элементов объема характерно для вариационных функционалов физических теорий поля [42, 43]. Несмотря на то, что тензорные элементы объема и площади, даже в N-мерном пространстве, наиболее просто задаются в терминах псевдотензоров [36–39], описание обычно проводится с использованием формализма кососимметричных дифференциальных форм [27,44–46], существенно искажающих очевидные свойства указанных объектов и их псевдотензорную

напряжений — псевдотензором отрицательного веса -2, тепловой поток — псевдовектором алгебраического веса -1, массовая плотность — псевдоскаляром алгебраического веса -1, что было продемонстрировано в работе [41].

2. Элементарные тензорные объемы и площади в трехмерном пространстве. Настоящая статья существенным образом опирается на результаты, терминологию и понятия современной геометрии и тензорного анализа [6,8,47]. В дальнейшем изложении, где это не очевидно, сверху корневого символа псевдотензора в квадратных скобках будем отмечать его вес, а снизу в круглых скобках его ранг. Нулевой вес абсолютных тензоров и веса некоторых фундаментальных псевдотензоров в обозначениях отражаться не будут. Введем в рассмотрение функцию w.g.t, действующую на псевдотензор и равную значению веса этого псевдотензора. Например, для псевдоскаляра $\overset{[\mathrm{g}]}{a}$ алгебраического веса g получим

$$\mathrm{w.g.t}\,(\overset{[\mathrm{g}]}{a}) = \mathrm{g}.$$

В трехмерном Евклидовом пространстве зададим ковариантный ортогональный базис векторами: $\underset{1}{\boldsymbol{\imath}}, \underset{2}{\boldsymbol{\imath}}, \underset{3}{\boldsymbol{\imath}}$. Смешанное произведение векторов базиса [47] позволяет определить фундаментальный ориентирующий псевдоскаляр e и две псевдоскалярные единицы согласно следующим соотношениям [32]:

$$e = \underset{1}{\boldsymbol{\imath}} \cdot (\underset{2}{\boldsymbol{\imath}} \times \underset{3}{\boldsymbol{\imath}}), \qquad \overset{[+1]}{1} = e, \qquad \overset{[-1]}{1} = e^{-1}\,, \tag{1}$$

тем самым, дискриминируя локальные базисные системы на право- и лево- ориентированные согласно условиям:

$\overset{[+1]}{1} > 0$ для правоориентированных,
$\overset{[+1]}{1} < 0$ для левоориентированных.

Целые степени псевдоскалярных единиц обладают свойством ковариантного постоянства, т. е.

$$\nabla_k \overset{[\pm\mathrm{g}]}{1} = \overset{[\pm\mathrm{g}]}{0}\,,$$

где ∇_k — оператор ковариантного дифференцирования в метрике g_{js}.

Псевдотензор $\underset{(n)}{\overset{[\mathrm{g}]}{T}}{}^{h_1h_2\ldots h_s\cdot\ldots\cdot}_{\cdot\ldots\cdot k_1k_2\ldots k_r}$ алгебраического веса g ранга $n = s + r$ с помощью степеней псевдоскалярной единицы можно преобразовать к абсолютному тензору того же ранга согласно

$$\underset{(n)}{T}{}^{h_1h_2\ldots h_s\cdot\ldots\cdot}_{\cdot\ldots\cdot k_1k_2\ldots k_r} = \overset{[-\mathrm{g}]}{1}\,\underset{(n)}{\overset{[\mathrm{g}]}{T}}{}^{h_1h_2\ldots h_s\cdot\ldots\cdot}_{\cdot\ldots\cdot k_1k_2\ldots k_r}. \tag{2}$$

В последнем равенстве выполняется правило баланса весов (the weights balance rule) [33–35]. Действительно, имеем

$$\mathrm{w.g.t}\left(\underset{(n)}{T}{}^{h_1h_2\ldots h_s\cdot\ldots\cdot}_{\cdot\ldots\cdot k_1k_2\ldots k_r}\right) = \mathrm{w.g.t}\left(\overset{[-\mathrm{g}]}{1}\,\underset{(n)}{\overset{[\mathrm{g}]}{T}}{}^{h_1h_2\ldots h_s\cdot\ldots\cdot}_{\cdot\ldots\cdot k_1k_2\ldots k_r}\right) = -\mathrm{g} + \mathrm{g} = 0.$$

Одним из фундаментальных геометрических объектов связанных с ориентаией пространства являются символы перестановок (альтернирующие символы) в трехмерном пространстве определяющиеся согласно правилу

$$\epsilon_{ijk} = \epsilon^{ijk} = \begin{cases} +1, & \text{для троек } i, j, k = 123, 231, 312; \\ -1, & \text{для троек } i, j, k = 132, 213, 321; \\ \ \ 0, & \text{во всех остальных случаях.} \end{cases}$$

Как известно, символы перестановок являются одновременно ковариантным псевдотензором третьего ранга нечетного алгебраического веса -1 и контравариантным псевдотензором третьего ранга нечетного алгебраического веса $+1$, т.е. на основании их определения справедливо следующее равенство

$$\overset{[-1]}{\epsilon}_{lsk} = \overset{[+1]}{\epsilon}{}^{lsk},$$

нарушающие принятые в псевдотензорной алгебре соглашения о балансе индексов и равенстве алгебраических весов равных друг другу псевдотензоров. Кроме того, что для символов перестановок требуются неконвенциональные правила жонглирования индексами:

$$\begin{aligned} \overset{[-1]}{\epsilon}_{ijk} &= \overset{[-2]}{1} g_{il} g_{js} g_{kr} \overset{[+1]}{\epsilon}{}^{lsr}, \\ \overset{[+1]}{\epsilon}{}^{ijk} &= \overset{[+2]}{1} g^{il} g^{js} g^{kr} \overset{[-1]}{\epsilon}_{lsr}. \end{aligned} \tag{3}$$

Опираясь на правило (3), определим спецсимволы [32]

$$\begin{aligned} \overset{[-1]}{\epsilon}{}_{i\cdot k}^{\cdot p\cdot} &= g^{pj} \overset{[-1]}{\epsilon}_{ijk}, & \overset{[+1]}{\epsilon}{}_{i\cdot k}^{\cdot p\cdot} &= g_{il} g_{kr} \overset{[+1]}{\epsilon}{}^{lpr}, \\ \overset{[+1]}{\epsilon}{}^{i\cdot k}_{\cdot p\cdot} &= g_{pj} \overset{[+1]}{\epsilon}{}^{ijk}, & \overset{[-1]}{\epsilon}{}^{i\cdot k}_{\cdot p\cdot} &= g^{il} g^{kr} \overset{[-1]}{\epsilon}_{lpr}. \end{aligned} \tag{4}$$

Нетрудно показать, что спецсимволы, определенные согласно (4), удовлетворяют соотношению, полученному в соответствии с правилом баланса алгебраических весов,

$$\overset{[-1]}{\epsilon}{}_{i\cdot k}^{\cdot p\cdot} = \overset{[-2]}{1} \overset{[+1]}{\epsilon}{}_{i\cdot k}^{\cdot p\cdot}, \tag{5}$$

поскольку

$$\overset{[-1]}{\epsilon}{}_{i\cdot k}^{\cdot p\cdot} = g^{pj} \overset{[-1]}{\epsilon}_{ijk} = \overset{[-2]}{1} \delta^p_s g_{il} g_{kr} \overset{[+1]}{\epsilon}{}^{lsr} = \overset{[-2]}{1} g_{il} g_{kr} \overset{[+1]}{\epsilon}{}^{lpr} = \overset{[-2]}{1} \overset{[+1]}{\epsilon}{}_{i\cdot k}^{\cdot p\cdot}.$$

Из соотношения (5) следуют также равенства

$$\overset{[+1]}{1} \overset{[-1]}{\epsilon}{}_{i\cdot k}^{\cdot p\cdot} = \overset{[-1]}{1} \overset{[+1]}{\epsilon}{}_{i\cdot k}^{\cdot p\cdot}, \qquad \overset{[+1]}{1} \overset{[-1]}{\epsilon}{}^{i\cdot k}_{\cdot p\cdot} = \overset{[-1]}{1} \overset{[+1]}{\epsilon}{}^{i\cdot k}_{\cdot p\cdot}. \tag{6}$$

Равенства (6) позволяют ввести специальные e–тензоры

$$\begin{aligned} e_{i\cdot k}^{\cdot p\cdot} &= \overset{[+1]}{1} \overset{[-1]}{\epsilon}{}_{i\cdot k}^{\cdot p\cdot} = \overset{[-1]}{1} \overset{[+1]}{\epsilon}{}_{i\cdot k}^{\cdot p\cdot}, \\ e^{i\cdot k}_{\cdot p\cdot} &= \overset{[+1]}{1} \overset{[-1]}{\epsilon}{}^{i\cdot k}_{\cdot p\cdot} = \overset{[-1]}{1} \overset{[+1]}{\epsilon}{}^{i\cdot k}_{\cdot p\cdot}, \end{aligned} \tag{7}$$

являющиеся абсолютными тензорами и оказывающиеся весьма полезными при оперировании с уравнениями микрополярной теории упругости.

Символы перестановок позволяют ввести тензорные элементы объема наиболее простым и понятным способом, что соответствует подходу, предложенному Пуанкаре [48, 49], без привлечения теории внешних дифференциальных форм [27, 44–46]. Заметим, что литературный поиск показывает ограниченное количество работ, обсуждающих указанное обстоятельство. Тензорный элемент объема в трехмерном пространстве можно принять в форме

$$d\tau^{mns} = \overset{[-1]}{d\tau}{}^{123}\overset{[+1]}{\epsilon}{}^{mns}, \tag{8}$$

где $\overset{[-1]}{d\tau}{}^{123}$ — естественный элемент объема,[2] представляющий собой псевдоскаляр веса -1, который определяется следующим образом

$$\overset{[-1]}{d\tau}{}^{123} = dx^1 dx^2 dx^3. \tag{9}$$

Опустив в формуле (8) индексы, т. е. применив правило жонглирования индексами для символов перестановок (3), определим ковариантный тензорный элемент объема в виде

$$d\tau_{mns} = \overset{[+2]}{1}\overset{[-1]}{d\tau}{}^{123}\overset{[-1]}{\epsilon}{}_{mns} = \overset{[+1]}{d\tau}{}_{123}\overset{[-1]}{\epsilon}{}_{mns}, \tag{10}$$

где $\overset{[+1]}{d\tau}{}_{123}$ — дублетный элемент объема [8], представляющий собой псевдоскаляр веса $+1$.

С помощью псевдоскаляров $\overset{[-1]}{d\tau}{}^{123}$, $\overset{[+1]}{d\tau}{}_{123}$ и псевдоскалярных единиц $\overset{[\mp 1]}{1}$ можно образовать абсолютный скаляр $d\tau$, являющийся инвариантным элементом объема

$$d\tau = \overset{[+1]}{1}\overset{[-1]}{d\tau}{}^{123} = \overset{[-1]}{1}\overset{[+1]}{d\tau}{}_{123}.$$

В дальнейшем изложении примем упрощенные обозначения для псевдоинвариантных элементов объема

$$\overset{[-1]}{d\tau} = \overset{[-1]}{d\tau}{}^{123}, \qquad \overset{[+1]}{d\tau} = \overset{[+1]}{d\tau}{}_{123}.$$

Рассмотрим двумерную поверхность, заданную естественной (Гауссовой) параметризацией u^1, u^2. В этом случае контравариантный тензорный элемент площади поверхности принимает вид [36, 37]

$$d\tau^{ij} = \epsilon^{\alpha_1\alpha_2}\partial_{\alpha_1}x^i\partial_{\alpha_2}x^j du^1 du^2 = 2\partial_1 x^{[i}\partial_2 x^{j]} du^1 du^2. \tag{11}$$

Ковариантный тензорный элемент площади $d\tau_{ij}$ можно получить, опустив индексы у $d\tau^{ij}$ в (11).

Антисимметричным абсолютным тензорам $d\tau^{ij}$ и $d\tau_{ij}$ сопутствуют ковариантный и контравариантный псевдовекторы

$$\overset{[-1]}{dA}{}_k = \frac{1}{2}\epsilon_{kij}d\tau^{ij}, \qquad \overset{[+1]}{dA}{}^k = \frac{1}{2}\epsilon^{kij}d\tau_{ij}, \tag{12}$$

[2]Еще раз заметим, важное значение естественных элементов объема при формулировке вариационных функционалов физических теорий поля [42, 43].

Абсолютные векторные элементы площади поверхности можно определить, домножив псевдовекторные элементы площади на соответствующую степень псевдоскалярной единицы

$$dA_k = \overset{[+1]}{1}\overset{[-1]}{dA_k}, \qquad dA^k = \overset{[-1]}{1}\overset{[+1]}{dA^k}. \tag{13}$$

Пседоскалярные элементы площади поверхности задаются следующими формулами

$$\overset{[-1]}{dA} = (\mathrm{sign}\overset{[-1]}{1})\sqrt{g^{sk}\overset{[-1]}{dA_s}\overset{[-1]}{dA_k}}, \qquad \overset{[+1]}{dA} = (\mathrm{sign}\overset{[+1]}{1})\sqrt{g_{sk}\overset{[+1]}{dA^s}\overset{[+1]}{dA^k}}. \tag{14}$$

Оба элемента площади в (14) чувствительны к изменению ориентации координатной системы, что обусловлено знаком фундаментального ориентирующего псевдоскаляра. И тот, и другой элемент площади (14) чувствительны к изменению ориентации координатной системы, что обусловлено знаком фундаментального ориентирующего.

Инвариантный элемент площади поверхности определяются согласно

$$dA = \sqrt{dA^k dA_k} \tag{15}$$

и является строго положительным абсолютным скаляром.

Использовав введенные выше определения для элементов площади (14) и (15), можно показать, что

$$\Big(\overset{[\pm 1]}{dA}\Big)^2 = \frac{1}{2}\overset{[\pm 2]}{1} d\tau^{is} d\tau_{is}, \qquad \Big(dA\Big)^2 = \frac{1}{2} d\tau^{is} d\tau_{is}.$$

Завершая настоящий раздел, рассмотрим возможное детерминирование алгебраического веса массы тела m. Масса элементарного объема тела не отрицательная величина, которую можно вычислять согласно

$$dm = \rho d\tau = \overset{[+1]}{\rho}\overset{[-1]}{d\tau} = \overset{[-1]}{\rho}\overset{[+1]}{d\tau} \geq 0. \tag{16}$$

где ρ — плотность массы.

Из соотношений (16) и условия неотрицательности массы следует очевидный вывод, что массе не может быть приписан какой бы то ни было алгебраический вес, что говорит о ее абсолютной инвариантности. Последнее утверждение является фундаментальным принципом нулевого веса массы.

Масса конечного тела является количественно–аддитивной величиной, рассчитываемой согласно формуле

$$m = \int dm = \int \rho d\tau = \int \overset{[+1]}{\rho}\overset{[-1]}{d\tau} = \int \overset{[-1]}{\rho}\overset{[+1]}{d\tau}. \tag{17}$$

Отметим, что при записи равенств (17) мы воспользовались правилом баланса алгебраических весов. Равенства (17) позволяют определить плотность массы как мультивесовой псевдоскаляр, соответствующий градации элементов объема $(\overset{[+1]}{d\tau}, d\tau, \overset{[-1]}{d\tau})$, соотношением

$$\overset{[-1,0,+1]}{\rho} = \overset{\square}{\rho}. \tag{18}$$

Здесь и далее будем полагать

$$\square = \mathrm{w.g.t}\,(\overset{\square}{\rho}) = \begin{cases} -1, & \text{для } \overset{[+1]}{d\tau}\,; \\ \ \ 0, & \text{для } d\tau; \\ +1, & \text{для } \overset{[-1]}{d\tau}\,. \end{cases} \tag{19}$$

Соотношение (19) определяет мультивесовую характеристику, принимающую значения $(-1,\ 0,\ +1)$ в зависимости от используемого элемента объема. Аналогичное равенство можно задать для элементарный площадей:

$$\boxtimes = \mathrm{w.g.t}\,(\overset{\boxtimes}{d\tau}) = \begin{cases} +1, & \text{для } \overset{[+1]}{d\tau}\,; \\ \ \ 0, & \text{для } d\tau; \\ -1, & \text{для } \overset{[-1]}{d\tau}\,; \end{cases} \qquad \boxtimes = \mathrm{w.g.t}\,(\overset{\boxtimes}{dA}) = \begin{cases} +1, & \text{для } \overset{[+1]}{dA}; \\ \ \ 0, & \text{для } dA; \\ -1, & \text{для } \overset{[-1]}{dA}. \end{cases} \tag{20}$$

Соотношения (19) и (20) позволяют заключить

$$\square = -\boxtimes\,.$$

3. Эйлерова кинематика микрополярного тела. Введем пространственные (Эйлеровы) координаты $x^s (s = 1,2,3)$ и отсчетные (Лагранжевы) координаты $X^\alpha (\alpha = 1,2,3)$, тогда метрики g_{kl} и ${}^{\backprime}g_{\alpha\sigma}$ определяются, соответственно:

$$g_{sm} = \underset{s}{\boldsymbol{\imath}} \cdot \underset{m}{\boldsymbol{\imath}}\,, \qquad {}^{\backprime}g_{\alpha\sigma} = {}^{\backprime}\underset{\alpha}{\boldsymbol{\imath}} \cdot {}^{\backprime}\underset{\sigma}{\boldsymbol{\imath}}\,,$$

где $\underset{s}{\boldsymbol{\imath}}\,(s = 1,2,3)$ — векторы ковариантного пространственного базиса, ${}^{\backprime}\underset{\alpha}{\boldsymbol{\imath}}\,(\alpha = 1,2,3)$ — векторы ковариантного отсчетного базиса.

Помимо метрических тензоров, введем в рассмотрение двухточечные g-символы, определяемые скалярное произведение пространственных $\underset{s}{\boldsymbol{\imath}}$ (или $\overset{s}{\boldsymbol{\imath}}$) и отсчетных ${}^{\backprime}\underset{\alpha}{\boldsymbol{\imath}}\,(\alpha = 1,2,3)$ (или ${}^{\backprime}\overset{\alpha}{\boldsymbol{\imath}}\,(\alpha = 1,2,3)$) базисных векторов

$$g_{s}^{\cdot\alpha} = \underset{s}{\boldsymbol{\imath}} \cdot {}^{\backprime}\overset{\alpha}{\boldsymbol{\imath}}\,, \qquad g_{\alpha}^{\cdot s} = {}^{\backprime}\underset{\alpha}{\boldsymbol{\imath}} \cdot \overset{s}{\boldsymbol{\imath}}\,.$$

С этого момента будем считать, что рассматриваемые системы координат связаны между собой с помощью преобразования деформации

$$X^\alpha \rightleftarrows x^i$$

Прямое описание деформации континуума соответствует преобразованию

$$X^\alpha \to x^i$$

а обратное описание[3] задается преобразованием

$$X^\alpha \leftarrow x^i$$

Равноправие способов описания деформации мы будем отражать с помощью обозначения

$$X^\alpha \rightleftarrows x^i$$

[3]В современной механике континуума наряду с прямым описанием $X^\alpha \to x^i$, используется обратное описание $x^i \to X^\alpha$ (inversed motion description) [17]. Отметим, что обратное описание деформации было введено в механику Пиола (G. Piola).

Транспонированный градиент деформации (или тензор дисторсии) определяется частичным дифференцированием Эйлеровых координат по Лагранжевы:

$$x_{\alpha}^{\cdot s} = \partial_{\alpha} x^{s}, \qquad \partial_{\alpha} = \frac{\partial}{\partial X^{\alpha}}.$$

Дисторсии $x_{\alpha}^{\cdot s}$ представляют собой двухточечный абсолютный тензор.

Примем полярное разложение дисторсии в виде [32]

$$x_{\alpha}^{\cdot s} = |x|_{\alpha\sigma} \lambda^{s\sigma}\,,$$

где $|x|_{\alpha\sigma}$ — модуль дисторсии (одноточечный абсолютный симметричный положительно определенный тензор второго ранга), $\lambda^{s\sigma}$ — двухточечный тензор конечного поворота.

Тензор поворота представляет собой двухточечный тензор второго ранга, для которого справедливы следующие соотношения двухточечной ортогональности:

$$\lambda_{s\sigma} \lambda^{m\sigma} = \delta_{s}^{m}, \qquad \lambda_{s\alpha} \lambda^{s\sigma} = \delta_{\alpha}^{\sigma}.$$

Одноточечный Эйлеров тензор поворота можно представить с помощью g-символов следующим образом:

$$\lambda^{sm} = g_{\alpha}^{\cdot m} \lambda^{s\alpha}. \tag{21}$$

Одноточечный Эйлеров тензор поворота (21) удовлетворяют обычным условиям ортогональности.

Одноточечный Эйлеров тензор поворота характеризуется пространственной осью вращения (направленной вдоль единичного вектора c_s, $c_s c^s = 1$) углом поворота ϕ и может быть представлен формулой Эйлера

$$\lambda^{kl} = \cos\phi g^{kl} + (1 - \cos\phi) c^{k} c^{l} - \sin\phi e^{klh} c_{h}\,, \tag{22}$$

Отметим, что в уравнении (22) первый и второй члены дают симметричную часть одноточечного Эйлерова тензора поворота $\lambda^{(kl)}$, тогда как третий член является кососимметричным

$$\lambda^{(kl)} = \cos\phi g^{kl} + (1 - \cos\phi) c^{k} c^{l}\,, \qquad \lambda^{[kl]} = -\sin\phi e^{klh} c_{h}\,.$$

Угол поворота ϕ и единичный пространственный директор c_s (собственный вектор λ^{kl}) можно получить из следующих уравнений

$$2\cos\phi = g_{kl} \lambda^{(kl)}\,, \qquad c_{h} = -\frac{1}{\sin\phi} e_{hkl} \lambda^{[kl]}\,.$$

В микрополярных теориях механики сплошной среды гораздо удобнее оперировать модулированным вектором поворота

$$\phi_{h} = \sin\phi\, c_{h}\,. \tag{23}$$

Малый модулированный вектор поворота получается из (23), когда ϕ стремится к нулю:

$$\phi_{h} = \phi c_{h}\,.$$

Полные абсолютные векторы микроповорота в микрополярных теориях определяются через векторы модулированного поворота

$$\phi^{h} = -\frac{1}{2} e^{hkl} \lambda_{[kl]}\,, \quad \phi_{h} = -\frac{1}{2} e_{hkl} \lambda^{[kl]}\,. \tag{24}$$

Псевдовекторы полного микроповорота положительного $+1$ и отрицательного -1 весов определяются с помощью символов перестановок (ϵ^{hkl} и ϵ_{hkl} соответственно):

$$\overset{[+1]}{\phi}{}^{h} = -\frac{1}{2}\epsilon^{hkl}\lambda_{[kl]}\,, \qquad \overset{[-1]}{\phi}{}_{h} = -\frac{1}{2}\epsilon_{hkl}\lambda^{[kl]}\,. \tag{25}$$

Заметим, что в микрополярной термоупругости полный микроповорот может быть задан формулой (24) (либо как ковариантный абсолютный вектор ϕ_s, либо как контравариантный абсолютный вектор ϕ^s) или формулами (25) (как ковариантный псевдовектор $\overset{[-1]}{\phi}{}_{s}$ веса -1 или контравариантный псевдовектор $\overset{[+1]}{\phi}{}^{s}$ веса $+1$). Выбор того или иного определения для вектора (псевдовектора) микроповорота влияет на веса кинематических характеристик микро- и нанострактурных состояний термоупругих микрополярных тел. В дальнейшем изложении будем развивать теорию гемитропного микрополярного тела в терминах контравариантного псевдовектора $\overset{[+1]}{\phi}{}^{s}$ веса $+1$.

Контравариантный псевдовектор вихря поля трансляционных перемещений $\overset{[+1]}{\omega}{}^{h}$ положительного веса можно задать согласно:

$$\overset{[+1]}{\omega}{}^{h} = \frac{1}{2}\overset{[+1]}{\epsilon}{}^{h\cdot l}_{\cdot k\cdot}\nabla_k u^l\,,$$

в то время как ковариантный псевдовектор вихря $\overset{[-1]}{\omega}{}_{h}$ отрицательного веса следует определить равенством:

$$\overset{[-1]}{\omega}{}_{h} = -\frac{1}{2}\overset{[-1]}{\epsilon}{}^{\cdot l\cdot}_{h\cdot k}\nabla_k u^l\,.$$

Контравиаринтный и ковариантный псевдовекторы относительного микроповорота определяются следующими формулами:

$$\overset{[+1]}{\varphi}{}^{h} = \overset{[+1]}{\phi}{}^{h} - \overset{[+1]}{\omega}{}^{h}, \qquad \overset{[-1]}{\varphi}{}_{h} = \overset{[-1]}{\phi}{}_{h} - \overset{[-1]}{\omega}{}_{h}.$$

В дальнейшем будем проводить рассмотрения в рамках малого относительного псевдовектора микроповорота (т.е. $\overset{[-1]}{\varphi}{}_{h}$ далее считается малой величиной первого порядка малости), т.е. в терминах полного псевдовектора микроповорота $\overset{[-1]}{\phi}{}_{h}$.

Асимметричный тензор деформации можно определить через полный ковариантный псевдовектор микроповорота $\overset{[-1]}{\phi}{}_{s}$ веса -1 согласно

$$\epsilon_{i\cdot}^{\cdot j} = \nabla_i u^j + \overset{[+1]}{\epsilon}{}^{\cdot k\cdot}_{i\cdot j}\overset{[-1]}{\phi}{}_{k}, \tag{26}$$

или в терминах контравариантный псевдовектор микроповорота $\overset{[+1]}{\phi}{}^{s}$ веса $+1$

$$\epsilon_{i\cdot}^{\cdot j} = \nabla_i u^j - \overset{[-1]}{\epsilon}{}^{\cdot j\cdot}_{i\cdot k}\overset{[+1]}{\phi}{}^{k}. \tag{27}$$

Помимо асимметричного тензора деформации, необходим еще псевдотензор изгиба—кручения, являющийся градиентом псевдовектора полного микроповорота

$$\overset{[+1]}{\kappa}{}_{i\cdot}^{\cdot s} = \nabla_i \overset{[+1]}{\phi}{}^{s}. \tag{28}$$

Иногда при построении моделей микрополярных термоупругих тел удобно использовать симметричные части асимметричного тензора деформаций и псевдотензора изгиба–кручения

$$\epsilon_{(kl)} = \nabla_{(k}u_{l)} = \frac{1}{2}(\nabla_k u_l + \nabla_l u_k), \qquad \overset{[+1]}{\kappa}_{(kl)} = \nabla_{(k} \overset{[+1]}{\phi}_{l)} = \frac{1}{2}(\nabla_k \overset{[+1]}{\phi}_l + \nabla_l \overset{[+1]}{\phi}_k), \tag{29}$$

а также сопутствующие псевдовекторы:

$$\overset{[+1]}{\varphi}{}^i = -\frac{1}{2}\epsilon^{ikl}\epsilon_{[kl]}, \qquad \kappa_i = \frac{1}{2}\epsilon_{ikl}\overset{[+1]}{\kappa}{}^{[kl]}. \tag{30}$$

4. Силовые и моментные напряжения в микрополярном теле. Произвольная система сил (абсолютных векторов) действующих на произвольную элементарную двумерную площадку в деформированном состоянии с инвариантным элементом площади dA и единичным абсолютным вектором нормали n_k сводится к равнодействующей поверхностных сил dT^k (абсолютный вектор) и паре сил, характеризующейся вектором момента dM^k (см. рис. 1).

Рассмотрим вначале вектор равнодействующей, который может быть определен через абсолютный вектор поверхностных сил t^k, отнесенный к абсолютному инвариантному элементу площади dA:

$$t^k = \frac{dT^k}{dA}. \tag{31}$$

Следуя стандартной схеме, для ориентированной элементарной площадки определим асимметричный тензор силовых напряжений Коши t^{ik} следующим равенством

$$t^k = n_i t^{ik}. \tag{32}$$

Отсюда заключаем, что тензор силовых напряжений t^{ik} имеет нулевой вес и является абсолютным тензором.

Следуя процедуре подробной изложенной, например, в публикациях [4,38,39], определим абсолютный вектор равнодействующей действующей на псевдоинвариантные элементы площади $\overset{[-1]}{dA}$ (естественный элемент) или $\overset{[+1]}{dA}$ (дублетный элемент), соответственно:

$$dT^k = \overset{[+1]}{t}{}^k \overset{[-1]}{dA} = \overset{[-1]}{t}{}^k \overset{[+1]}{dA}. \tag{33}$$

Следовательно, определения псевдотензоров силовых напряжений для естественного и дублетного элементов площади принимают вид

$$\overset{[+1]}{t}{}^k = n_i \overset{[+1]}{t}{}^{ik}, \qquad \overset{[-1]}{t}{}^k = n_i \overset{[-1]}{t}{}^{ik}. \tag{34}$$

Формулы (33) и (34) позволяют ввести мультивесовые их аналоги

$$\overset{\square}{t}{}^k = n_i \overset{\square}{t}{}^{ik}. \tag{35}$$

Момент dM_k пары сил P^k и Q^k ($P^k = -Q^k$), действующий на элементарную площадку dS (см. рис. 1), определяется как векторное произведение

$$d\mathbf{M} = \mathbf{d} \times \mathbf{P} = -\mathbf{d} \times \mathbf{Q}, \tag{36}$$

Вектор момента пары сил $d\mathbf{M}$ перпендикулярен плоскости dA действия пары сил и направлен так, что вращение, указываемое парой сил P^k и Q^k, видится как совершаемое против часовой стрелки.

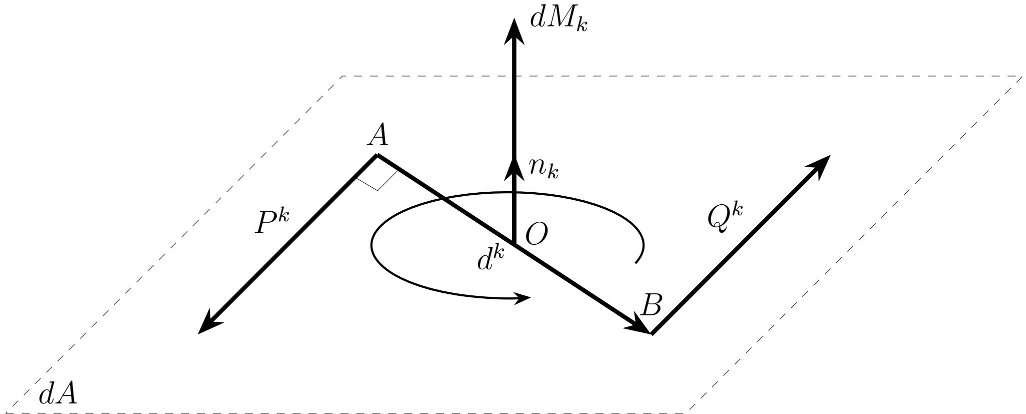

Рис. 1. Вектор моментов пары сил.

В координатной форме выражение (36) можно записать в виде

$$\overset{[-1]}{dM}_i = \epsilon_{ijk} d^j P^k = -\epsilon_{ijk} d^j Q^k\,, \tag{37}$$

т.е.

$$\text{w.g.t}\,(\overset{[-1]}{dM}_i) = \text{w.g.t}\,(\epsilon_{ijk} d^j P^k) = \text{w.g.t}\,(-\epsilon_{ijk} d^j Q^k) = -1\,, \tag{38}$$

Правило баланса весов (38) позволяет сделает вывод, что момент пары сил является псевдовектором нечетного алгебраического веса -1. В дальнейшем для удобства припишем плечу пары сил $d = \sqrt{g_{ij} d^i d^j} > 0$ в соответствии с соотношением (37) псевдотензорный алгебраический вес положив

$$\overset{[-1]}{d} = \overset{[-1]}{1}\, d. \tag{39}$$

Преобразование (39) определяет плечо момента пары сил $\overset{[-1]}{d}$ как псевдоскаляр нечетного отрицательного веса, и, следовательно, наделяет его чувствительностью к изменению ориентации координатного базиса трехмерного пространства.

Модуль момента пары сил $\overset{[-1]}{dM} = |\overset{[-1]}{d\mathbf{M}}|$ при учете (37) и (39) можно вычислить следующим образом

$$\overset{[-1]}{dM} = \overset{[-1]}{d} \sqrt{g_{ik} P^i P^k}, \tag{40}$$

Сравнивая формулы (37) и (40) получим выражение для расчета плеча пары сил

$$\overset{[-1]}{d} = \frac{\overset{[-1]}{dM}}{\sqrt{g_{ik} P^i P^k}} = \frac{|\mathbf{d} \times \mathbf{P}|}{\sqrt{g_{ik} P^i P^k}} = (\operatorname{sign} \overset{[-1]}{1}) \sqrt{\frac{g^{ik} \epsilon_{ijl} d^j P^l \epsilon_{ksh} d^s P^h}{g_{ik} P^i P^k}}\,. \tag{41}$$

Псевдовектор поверхностных моментов $\overset{[-1]}{m}_k$, отнесенный к элементу инвариантной площади dA определим согласно:

$$\overset{[-1]}{m}_k = \frac{\overset{[-1]}{dM}_k}{dA}, \tag{42}$$

тогда псевдотензор моментных напряжений $\overset{[-1]}{\mu}{}^{i\cdot}_{\cdot k}$ можно задать следующим равенством

$$\overset{[-1]}{m}_k = n_i \overset{[-1]}{\mu}{}^{i\cdot}_{\cdot k}. \tag{43}$$

Отсюда заключаем, что псевдотензор моментных напряжений $\overset{[-1]}{\mu}{}^{i\cdot}_{\cdot k}$ имеет отрицательный алгебраический вес.

Следуя процедуре, использованной для вектора поверхностных сил (33), определим псевдовектор момента пары сил, действующей на псевдоинвариантные элементы площади $\overset{[-1]}{dA}$ (естественный элемент) или $\overset{[+1]}{dA}$ (дублетный элемент), соотвественно:

$$\overset{[-1]}{dM}_k = m_k \overset{[-1]}{dA} = \overset{[-2]}{m}_k \overset{[+1]}{dA}. \tag{44}$$

Следовательно, для естественного $\overset{[-1]}{dA}$ и дублетного $\overset{[+1]}{dA}$ элементов площади получим для тензора и псевдотензора моментных напряжений равенства, соответственно:

$$m_k = n_i \mu^{i\cdot}_{\cdot k}, \qquad \overset{[-2]}{m}_k = n_i \overset{[-2]}{\mu}{}^{i\cdot}_{\cdot k}\,. \tag{45}$$

Используя соотношения (44) и (45) введем следующие мультивесовые соотношения

$$\overset{\boxminus}{m}_k = n_i \overset{\boxminus}{\mu}{}^{i\cdot}_{\cdot k}\,. \tag{46}$$

где для алгебраического мультивеса введено обозначение

$$\boxminus = \mathrm{w.g.t}\,(\overset{\boxminus}{m}_k) = \mathrm{w.g.t}\,(n_i \overset{\boxminus}{\mu}{}^{i\cdot}_{\cdot k}) = \square - 1 = \begin{cases} -2, & \text{для } \overset{[+1]}{dA}; \\ -1, & \text{для } dA; \\ 0, & \text{для } \overset{[-1]}{dA}. \end{cases} \tag{47}$$

Учитывая обозначения (19) и (47), вычислим алгебраические мультивеса ассоциированных (сопутствующих) псевдовекторов силовых и моментных напряжений в соответствии с правилом баланса весов согласно равенствам

$$\mathrm{w.g.t}\,(\overset{\boxminus}{\tau}_i) = \mathrm{w.g.t}(\epsilon_{ijk} \overset{\square}{t}{}^{[jk]}) = \begin{cases} 0, & \text{для } \overset{[-1]}{d\tau}\,,\ \overset{[-1]}{dA}; \\ -2, & \text{для } \overset{[+1]}{d\tau}\,,\ \overset{[+1]}{dA}; \\ -1, & \text{для } d\tau,\ \ dA; \end{cases}$$

$$\mathrm{w.g.t}\,(\overset{\square}{\mu}{}^i) = \mathrm{w.g.t}\,(\epsilon^{iks} \overset{\boxminus}{\mu}_{[ks]}) = \begin{cases} +1, & \text{для } \overset{[-1]}{d\tau}\,,\ \overset{[-1]}{dA}; \\ -1, & \text{для } \overset{[+1]}{d\tau}\,,\ \overset{[+1]}{dA}; \\ 0, & \text{для } d\tau,\ \ dA; \end{cases}$$

откуда немедленно можно получить мультивесовые соотношения в алгебраических весах

$$2\overset{\boxminus}{\tau}_i = -\epsilon_{ijk} \overset{\square}{t}{}^{[jk]}, \qquad 2\overset{\square}{\mu}{}^i = \epsilon^{iks} \overset{\boxminus}{\mu}_{[ks]}. \tag{48}$$

5. Принцип виртуальных перемещений в терминах псевдоинвариантных элементов объема и площади. В настоящем разделе статьи подробно рассмотрим принцип виртуальных перемещений в совокупности с правилом множителей Лагранжа с целью получить уравнения динамики гемитропного микрополярного тела. Геометрические вариации полей трансляционных и спинорных перемещений [42, 50, 51], не противоречащие наложенным связям, будем называть виртуальными трансляционными и спинорными перемещениями и обозначать соответственно через δu^k и $\delta \overset{[+1]}{\phi}{}^k$.

Вариации трансляционных и спинорных перемещений при жестком движении должны удовлетворять следующим условиям:

$$\nabla_{(i}\delta u_{k)} = 0, \tag{49}$$

$$\delta \overset{[+1]}{\varphi}{}^k = \delta \overset{[+1]}{\phi}{}^k - \frac{1}{2}\epsilon^{kil}\nabla_k \delta u_l = 0, \tag{50}$$

$$\delta \overset{[+1]}{\kappa}{}_{i\cdot}^{\cdot s} = \nabla_i \delta \overset{[+1]}{\phi}{}^s = 0. \tag{51}$$

Первое из них (49) выражает то известное обстоятельство, что жесткое движение не сопровождается деформацией (т.е. удлинениями и сдвигами), второе (50) — микроповорот не отличим от макроповорота, третье (51) — спинорные перемещения (микроповороты) при жестком движении тела не приводят к деформациям изгиба—кручения.

Силовыми факторами в микрополярных теориях выступают массовые силы f^k и массовые моменты $\overset{[-1]}{l}_k$ (их объемные аналоги обозначим соответственно через $X^k = \rho f^k$ и $\overset{[-1]}{Y}_k = \rho \overset{[-1]}{l}_k$), а также поверхностные силы t^j и моменты $\overset{[-1]}{m}_j$. Алгебраические веса массовых, объемных и поверхностных моментов детерминированы в соответствии с разделом 4 настоящей статьи. Отметим, что алгебраический вес объемных сил и моментов зависит от способа измерения элементарной площади, т.е.

$$\begin{gathered}
\mathrm{w.g.t}\,(\overset{\square}{X}{}^k) = \mathrm{w.g.t}\,(\overset{\square}{\rho} f^k) = \square = \begin{cases} -1, & \text{для } \overset{[+1]}{dA}; \\ \ \ 0, & \text{для } dA; \\ +1, & \text{для } \overset{[-1]}{dA}; \end{cases} \\
\mathrm{w.g.t}\,(\overset{\boxminus}{Y}_k) = \mathrm{w.g.t}\,(\overset{\square}{\rho} \overset{[-1]}{l}_k) = \square - 1 = \boxminus = \begin{cases} -2, & \text{для } \overset{[+1]}{dA}; \\ -1, & \text{для } dA; \\ \ \ 0, & \text{для } \overset{[-1]}{dA}. \end{cases}
\end{gathered} \tag{52}$$

Соотношения (52) позволяют сформулировать следующие мультивесовые равенства

$$\overset{\square}{X}{}^k = \overset{\square}{\rho} f^k, \qquad \overset{\boxminus}{Y}_k = \overset{\square}{\rho} \overset{[-1]}{l}_k \tag{53}$$

Виртуальная работа (абсолютная скалярная величина), совершаемая всеми перечисленными выше силовыми факторами на виртуальных трансляционных δu_k и спинорных $\delta \overset{[+1]}{\phi}{}^i$ перемещениях, вычисляется в терминах инвариантных элементов объема и площади согласно следующей формуле:

$$\delta A = \int \left[X^j \delta u_j + \overset{[-1]}{Y}{}_j \delta \overset{[+1]}{\phi}{}^j \right] d\tau + \oint_\partial \left[t^j \delta u_j + \overset{[-1]}{m}{}_j \delta \overset{[+1]}{\phi}{}^j \right] dA. \tag{54}$$

Учитывая результаты предыдущих разделов статьи, сформулируем принцип виртуальных перемещений в терминах мультивесовых псевдотензоров. В итоге получим:

$$\delta A = \int \left[\overset{\square}{X}{}^j \delta u_j + \overset{\boxminus}{Y}{}_j \delta \overset{[+1]}{\phi}{}^j \right] \overset{\boxtimes}{d\tau} + \oint_\partial \left[\overset{\square}{t}{}^j \delta u_j + \overset{\boxminus}{m}{}_j \delta \overset{[+1]}{\phi}{}^j \right] \overset{\boxtimes}{dA}; \tag{55}$$

Согласно принципу виртуальных перемещений виртуальное “жесткое” перемещение и “жесткий” поворот из состояния равновесия всегда производятся без “затраты” работы, т.е. виртуальная работа обращается в нуль:

$$\delta A = 0, \tag{56}$$

при наложенных на виртуальные перемещения и повороты дифференциальных ограничениях (49)–(51).

Освободившись от связей (49)–(51) с помощью правила множителей Лагранжа [50, 51] мультивесовое вариационное уравнение (55) со свободными вариациями δu_k и $\delta\phi^i$ преобразуем к виду:

$$\int \left[\overset{\square}{X}{}^j \delta u_j + \overset{\boxminus}{Y}{}_j \delta \overset{[+1]}{\phi}{}^j - \overset{\square}{t}{}^{(ik)} \nabla_{(i} \delta u_{k)} - 2\overset{\boxminus}{\tau}{}_i \Big(\delta \overset{[+1]}{\phi}{}^i - \frac{1}{2} \epsilon^{ikl} \nabla_k \delta u_l \Big) - \overset{\boxminus}{\mu}{}^{i\cdot}_{\cdot k} \nabla_i \delta \overset{[+1]}{\phi}{}^k \right] \overset{\boxtimes}{d\tau} + \\ + \oint_\partial \left[\overset{\square}{t}{}^j \delta u_j + \overset{\boxminus}{m}{}_j \delta \overset{[+1]}{\phi}{}^j \right] \overset{\boxtimes}{dA} = 0. \tag{57}$$

Выделяя в этом уравнении дивергентные слагаемые, применяя затем формулу Гаусса и учитывая (48), приходим к следующему уравнению в вариациях (n_i — компоненты единичного вектора внешней нормали поверхности, ограничивающей рассматриваемый объем):

$$\int \left[\overset{\square}{X}{}^k + \nabla_i \overset{\square}{t}{}^{ik} \right] \delta u_k \overset{\boxtimes}{d\tau} + \int \left[\overset{\boxminus}{Y}{}_k - 2\overset{\boxminus}{\tau}{}_k + \nabla_i \overset{\boxminus}{\mu}{}^{i\cdot}_{\cdot k} \right] \delta \overset{[+1]}{\phi}{}^k \overset{\boxtimes}{d\tau} + \\ + \oint_\partial \left[\overset{\square}{t}{}^k - n_i \overset{\square}{t}{}^{ik} \right] \delta u_k \overset{\boxtimes}{dA} + \oint_\partial \left[\overset{\boxminus}{m}{}_k - n_i \overset{\boxminus}{\mu}{}^{i\cdot}_{\cdot k} \right] \delta \overset{[+1]}{\phi}{}^k \overset{\boxtimes}{dA} = 0. \tag{58}$$

В силу произвольности вариаций δu_k и $\delta \overset{[+1]}{\phi}{}^k$ из мультивесового вариационного принципа (58) получаются мультивесовые дифференциальные уравнения равновесия, общие для всех микрополярных теорий:

$$\begin{aligned} \nabla_i \overset{\square}{t}{}^{ik} &= -\overset{\square}{X}{}^k, \\ \nabla_i \overset{\boxminus}{\mu}{}^{i\cdot}_{\cdot k} - 2\overset{\boxminus}{\tau}{}_k &= -\overset{\boxminus}{Y}{}_k. \end{aligned} \tag{59}$$

Кроме этого, из (58) следуют мультивесовые соотношений на поверхности тела:

$$\begin{aligned} n_i \overset{\square}{t}{}^{ik} &= \overset{\square}{t}{}^{k}; \\ n_i \overset{\boxminus}{\mu}{}^{i\cdot}_{\cdot k} &= \overset{\boxminus}{m}_k; \end{aligned} \tag{60}$$

Уравнения равновесия (59) можно обобщить на динамический случай добавлением сил $-\rho\partial_{\cdot\cdot}u^k$ и моментов $-\rho \overset{[-2]}{\mathfrak{I}} \overset{[+1]}{\partial_{\cdot\cdot}\phi_k}$ инерции ($\overset{[-2]}{\mathfrak{I}}$ — момент микроинерции (spin torque constant)):

$$\begin{aligned} \nabla_i \overset{\square}{t}{}^{ik} &= -\overset{\square}{\rho}(f^k - \partial_{\cdot\cdot}u^k), \\ \nabla_i \overset{\boxminus}{\mu}{}^{i\cdot}_{\cdot k} - 2\overset{\boxminus}{\tau}_k &= -\overset{\square}{\rho}(\overset{[-1]}{l}_k - \overset{[-2]}{\mathfrak{I}} \overset{[+1]}{\partial_{\cdot\cdot}\phi_k}). \end{aligned} \tag{61}$$

где f^i — вектор массовых сил, $\overset{[-1]}{l}_i$ — псевдовектор массовых моментов.

Отдельно следует отметить определение веса коэффициента микроинерции $\overset{[-2]}{\mathfrak{I}}$ по определению равного

$$\overset{[-2]}{\mathfrak{I}} = \int \overset{\square}{\rho} \overset{[-1]}{d} \overset{[-1]}{d} \overset{\boxtimes}{d\tau}. \tag{62}$$

Как нетрудно заметить из (62), алгебраический вес коэффициента микроинерции $\overset{[-2]}{\mathfrak{I}}$ определяется алгебраическим весом расстояния $\overset{[-1]}{d}$ от точки тела до оси, рассчитываемого геометрическим способом, изложенным в разделе 3 настоящей статьи.

6. Детерминирование мультивесов термомеханических характеристик микрополярных тел. Как отмечалось ранее, выбор способа измерения элементарных объемов и площадей, т.е. процедура детерминирования алгебраического веса псевдоинвариантных элементов объема и площади, существенным образом влияет на алгебраический вес основных характеристик микро- и нано- структурных термомеханических состояний микрополярного тела, в особенности, проявляющих свойства тремодинамической аддитивности. Основываясь на результатах предыдущих разделов настоящей статьи, следует отметить, что существует три основных варианта развития моделей микрополярной термоупругости, различающихся элементами объема $\overset{\boxtimes}{d\tau}$ и площади $\overset{\boxtimes}{dA}$. Их можно определить следующей диаграммой мультивесов элементарных объемов, элементарных площадей, и характеристик микро- и нано- структурных термомеханических состояний, реагирующих на эти веса:

$$\overset{\boxtimes}{d\tau} \quad \overset{\boxtimes}{dA} \quad \overset{\square}{h}{}^k \quad \overset{\square}{\lambda} \quad \overset{\square}{c} \quad \overset{\square}{G} \quad \overset{\square}{t}{}^{ik}$$

Представленная диаграмма построена с использованием правила баланса алгебраических весов и отражает возможную чувствительность определяющих псевдоскаляров (таких как, теплоемкость, коэффициент теплопроводности, модуль сдвига), к преобразованиям, меняющим ориентацию координатного базиса. Последнее обстоятельство играет исключительно важную роль в микрополярных теориях термоупругости, развиваемых в терминах псевдоинвариантных элементов объема и площади.

Рассмотрим процесс теплопередачи в телах, микро-, наноструктурные характуристики термомеханических состояний которых реагируют на изменение ориентации трехмерного пространства. Количество тепла Q, поступающее через фиксированную замкнутую поверхность ∂ в единицу времени является абсолютным скаляром и в терминах инвариантного элемента площади определяется интегральным соотношением

$$Q = \oint\limits_{\partial} h^k n_k dA = \oint\limits_{\partial} h^k dA_k, \tag{63}$$

где h^k — псевдовектор потока тепла, n_k — единичный вектор внешней нормали к поверхности ∂.[4]

Баланс весов в (63) базируется на фундаментальном утверждении

$$\text{w.g.t}\,(Q) = 0,$$

означающем невозможность приписать какой-бы то ни было целый алгебраический вес количеству тепла Q. Отсюда немедленно следует, что

$$\text{w.g.t}\left(\overset{\square}{h}{}^k \overset{\boxtimes}{d}A_k\right) = 0.$$

Откуда видно, что в вектор потока тепла в условиях использования псевдовекторных элементов площади оказывается псевдовектором нечетного алгебраического веса.

С процессом теплопроводности связана важная термодинамическая переменная состояния — абсолютная термодинамическая температура. Рассмотрим возможность приписать ей целый алгебраический вес, т.е. рассматривать ее как псевдоинвариант[5]. В качестве термодинамического потенциала сначала выберем внутреннюю энергию u как функцию термодинамических переменных состояния:

$$u = \overline{u}(\epsilon_{i\cdot}^{\cdot j}, \overset{[+1]}{\kappa}{}_{i\cdot}^{\cdot j}, s).$$

Чертой сверху будем в дальнейшем обозначать потенциалы состояния.

Абсолютная термодинамическая температура θ в термомеханике сплошных сред определяется как функция параметров термодинамического состояния и вычисляется как частная производная потенциальна состояния (внутренней энергии $\overline{u}$) по энтропии s согласно формуле:

$$\theta = \frac{\partial \overline{u}(\epsilon_{i\cdot}^{\cdot j}, \overset{[+1]}{\kappa}{}_{i\cdot}^{\cdot j}, s)}{\partial s}. \tag{64}$$

Для удобства введем в рассмотрение мультивесовые плотности в расчете на единицу элементарного объема $\overset{\boxtimes}{d}\tau$:

$$\overset{\square}{S} = \overset{\square}{\rho} s, \qquad \overset{\square}{U} = \overset{\square}{\rho} u. \tag{65}$$

В этом случае, производную в (64) можно преобразовать в соответствии с введенными выше обозначениями (65) к виду

$$\theta = \frac{\partial \overset{\square}{U}(\epsilon_{i\cdot}^{\cdot j}, \overset{[+1]}{\kappa}{}_{i\cdot}^{\cdot j}, \overset{\square}{S})}{\partial \overset{\square}{S}}. \tag{66}$$

---

[4]Абсолютность вектора внешней нормали к поверхности, а также способы приписывания ему алгебрачисекого веса в условиях когда поверхность задается псевдоскалярной функций [38, 52].

[5]В классической термомеханике континуума абсолютная термодинамическая температура θ — всегда абсолютный инвариант, не зависящий ни от поворотов, ни от зеркальный отражений пространства.

Кроме того, следует принимать во внимание фундаментальное термодинамическое неравенство

$$\inf \theta > 0\,, \tag{67}$$

постулирующее как положительность абсолютной температуры[6], так и невозможность достичь абсолютного нуля ни при каком допустимом термодинамическом процессе.

Из определения (64) и правила баланса весов нетрудно заметить, что независимо от выбора веса элементарного объема, веса плотности внутренней энергии и веса плотности энтропии следует[7]

$$\mathrm{w.g.t}\,(\theta) = \mathrm{w.g.t}\left(\frac{\overset{\square}{U}}{\overset{\square}{S}}\right) = \mathrm{w.g.t}\left(\frac{\overset{\square}{1U}}{\overset{\square}{1S}}\right) = 0.$$

Последовательность равенств (6) немедленно приводит заинтересованного читателя к фундаментальному утверждению, что абсолютная температура является абсолютным инвариантом, сохраняющим неизменным свое значение при поворотах и отражениях пространства. Последнее обстоятельство подтверждает принципиальную нереализуемость приписывания какого-бы то ни было алгебраического веса абсолютной термодинамической температуре. Последнее обстоятельство обусловлено различной природой внутренней энергии (аддитивность) и температуры (неаддитивность).

В термомеханике широко используется еще одни термодинамический потенциал — свободная энергия Гельмгольца. Минуя статистический смысл свободной энергии, приписывая ей отрицательный знак, введем с помощью преобразования Лежандра внутренней энергии

$$-\overline{\psi}(\epsilon_{i\cdot}^{\cdot j}, \overset{[+1]}{\kappa}{}_{i\cdot}^{\cdot j}, \theta) = \theta s - \overline{u}(\epsilon_{i\cdot}^{\cdot j}, \overset{[+1]}{\kappa}{}_{i\cdot}^{\cdot j}, s), \quad \theta = \frac{\partial \overline{u}}{\partial s}. \tag{68}$$

Преобразование Лежандра и его основные свойства подробно изложены, например, в монографии [53, с. 155–157].

На основания инволютивности преобразования Лежандра, получим

$$\overline{u}(\epsilon_{i\cdot}^{\cdot j}, \overset{[+1]}{\kappa}{}_{i\cdot}^{\cdot j}, s) = \theta s - (-\overline{\psi}(\epsilon_{i\cdot}^{\cdot j}, \overset{[+1]}{\kappa}{}_{i\cdot}^{\cdot j}, \theta)), \quad s = -\frac{\partial \overline{\psi}}{\partial \theta}, \tag{69}$$

откуда следует

$$s = \overline{s}(\epsilon_{i\cdot}^{\cdot j}, \overset{[+1]}{\kappa}{}_{i\cdot}^{\cdot j}, \theta), \qquad \overline{s} = -\frac{\partial \overline{\psi}}{\partial \theta}. \tag{70}$$

7. Уравнение теплопроводности и определяющие уравнения для гемитропных микрополярных тел Учитывая правило баланса весов, замену (65) и, дополнительно принимая следующие обозначения для контролируемого производства

[6]Положительность абсолютной температуры может быть доказана, исходя из канонического распределения Гиббса для ансамбля элементарных термодинамических систем. Отметим, что неравенство (67) запрещает любые изменения термодинамической температуры при зеркальных отражениях трехмерного пространства, что собственно следует из $\mathrm{w.g.t}\,(\theta) = 0$, и, кроме всего прочего, говорит о невозможности приписать температуре как бы то ни было нечетный алгебраический вес.

[7]В данном контексте подразумевается, что плотности берутся в расчете на единицу объема.

энтропии и неконтролируемого производства энтропии, в единицу времени в расчете на единицу элементарного объема $\overset{\boxtimes}{d\tau}$), соответственно:

$$\overset{\square}{\Sigma} = \overset{\square}{\rho}\overline{\sigma}, \qquad \overset{\square}{\Xi} = \overset{\square}{\rho}\overline{\xi}, \tag{71}$$

мультивесовое псевдоскалярное уравнение баланса энтропии в рамках предлагаемой к рассмотрению схемы исследования принимает вид

$$\partial.\overset{\square}{S} = -\nabla_j \overset{\square}{J}{}^j + \overset{\square}{\Sigma} + \overset{\square}{\Xi}, \tag{72}$$

где $\overset{\square}{J}{}^j$ — псевдовектор потока энтропии.

Принимая далее связь объемной и массовой плотностей свободной энергии Гельмгольца ψ в виде:

$$\overset{\square}{\Psi}(\epsilon_{(kl)}, \overset{[+1]}{\kappa}_{(kl)}, \overset{[+1]}{\varphi}{}^i, \kappa_i, s) = \overset{\square}{\rho}\overline{\psi}(\epsilon_{(kl)}, \overset{[+1]}{\kappa}_{(kl)}, \overset{[+1]}{\varphi}{}^i, \kappa_i, s), \tag{73}$$

получим приведенное уравнение баланса энергии в обозначениях (65), (71) и (73):

$$\begin{gathered} -(\partial.\overset{\square}{\Psi} + \overset{\square}{S}\partial.\theta) + \overset{\square}{t}{}^{(ij)}\partial.\epsilon_{(ij)} + \overset{\boxminus}{\mu}{}^{(ik)}\partial.\overset{[+1]}{\kappa}_{(ik)} \\ + \overset{\boxminus}{\tau}_i\partial.\overset{[+1]}{\varphi}{}^i + \overset{\square}{\mu}{}^i\partial.\kappa_i - \theta^{-1}\overset{\square}{h}{}^i\nabla_i\theta = \overset{\square}{\Xi}\theta\,. \end{gathered} \tag{74}$$

Здесь $\partial.$ — производная по времени при фиксированных координатах x^k. В приближении малых деформаций мы считаем $\dot{a} = \partial.a$. Отметим, что массовые плотности s, ψ, ξ и σ являются абсолютными скалярами, т.е. не меняются при любых преобразованиях пространства. В дальнейшем изложении будем полагать отсутствие лучистого тепла, т.е. $\sigma = 0$.

Следствием второго закона термодинамики для гемитропных микрополярных тел, термомеханические характеристики микро- и наноструктурных состояний которых чувствительны к зеркальным отражениям трехмерного пространства, являются определяющие псевдотензорные уравнения:

$$\begin{gathered} \overset{\square}{t}{}^{(ij)} = \frac{\partial\overset{\square}{\Psi}}{\partial\epsilon_{(ij)}}, \quad \overset{\boxminus}{\mu}{}^{(ik)} = \frac{\partial\overset{\square}{\Psi}}{\partial\overset{[+1]}{\kappa}_{(ik)}}, \\ \overset{\boxminus}{\tau}_i = \frac{\partial\overset{\square}{\Psi}}{\partial\overset{[+1]}{\varphi}{}^i}, \quad \overset{\square}{\mu}{}^i = \frac{\partial\overset{\square}{\Psi}}{\partial\kappa_i}, \\ \overset{\square}{S} = -\frac{\partial\overset{\square}{\Psi}}{\partial\theta}, \quad \overset{\square}{J}{}^j = \overset{\square}{\overline{J}}{}^j(\nabla_k \ln\theta). \end{gathered} \tag{75}$$

В определяющих уравнениях (75) алгебраические веса, проставленные через запятую, соответствуют элементам объема: естественному $\overset{[-1]}{d\tau}$, дублетному $\overset{[+1]}{d\tau}$ и инвариантному $d\tau$.

Для неконтролируемого производства энтропии справедливо следующая цепочка равенств

$$\overset{\square}{\Xi} = -\theta^{-2}\overset{\square}{h}{}^j\nabla_j\theta = -\theta^{-1}\overset{\square}{\overline{J}}{}^j\nabla_j\theta = -\overset{\square}{\overline{J}}{}^j(\nabla_k\ln\theta)\nabla_j\ln\theta. \tag{76}$$

Нелинейное уравнение теплопроводности получим подстановкой определяющих уравнений (75) в уравнение баланса энтропии (72), учитывая

$$\theta \overset{\square}{\bar{J}}{}^{j} = \overset{\square}{h}{}^{j}\,.$$

В силу абсолютной инвариантности температуры веса потока тепла и энтропии совпадают.

В итоге получим

$$\begin{gathered}\frac{\partial \overset{\square}{S}}{\partial \epsilon_{(ij)}}\partial.\epsilon_{(ij)} + \frac{\partial \overset{\square}{S}}{\partial \overset{[+1]}{\kappa}_{(ik)}}\partial.\overset{[+1]}{\kappa}_{(ik)} + \frac{\partial \overset{\square}{S}}{\partial \overset{[+1]}{\varphi}{}^{i}}\partial.\overset{[+1]}{\varphi}{}^{i} + \\ + \frac{\partial \overset{\square}{S}}{\partial \kappa_i}\partial.\kappa_i + \frac{\partial \overset{\square}{S}}{\partial \theta}\partial.\theta = -\theta^{-1}\nabla_j \overset{\square}{h}{}^{j}\,.\end{gathered} \tag{77}$$

Примем линеаризованную по функциональным аргументам свободную энергию Гельмгольца для анизотропного микрополярного термоупругого континуума в виде

$$\begin{gathered}\overset{\square}{\Psi} = \underset{\mathrm{I}}{\overset{\square}{E}}{}^{(ik)(lm)}\epsilon_{(ik)}\epsilon_{(lm)} + \underset{\mathrm{II}}{\overset{\boxplus}{E}}{}^{(ik)(lm)}\overset{[+1]}{\kappa}_{(ik)}\overset{[+1]}{\kappa}_{(lm)} + \\ + \underset{\mathrm{III}}{\overset{\boxminus}{E}}{}^{(ik)(lm)}\epsilon_{(ik)}\overset{[+1]}{\kappa}_{(lm)} + \underset{\mathrm{IV}}{\overset{\boxminus}{E}}{}^{(ik)\cdot}_{\cdot l}\,\epsilon_{(ik)}\overset{[+1]}{\varphi}{}^{l} + \underset{\mathrm{V}}{\overset{\boxplus}{E}}{}^{(ik)\cdot}_{\cdot l}\,\overset{[+1]}{\kappa}_{(ik)}\overset{[+1]}{\varphi}{}^{l} + \\ + \underset{\mathrm{VI}}{\overset{\square}{E}}{}^{(ik)l}\epsilon_{(ik)}\kappa_l + \underset{\mathrm{VII}}{\overset{\boxminus}{E}}{}^{(ik)l}\overset{[+1]}{\kappa}_{(ik)}\kappa_l + \underset{\mathrm{VIII}}{\overset{\boxplus}{E}}{}_{(il)}\overset{[+1]}{\varphi}{}^{i}\overset{[+1]}{\varphi}{}^{l} + \underset{\mathrm{IX}}{\overset{\square}{E}}{}^{(il)}\kappa_i\kappa_l + \\ + \underset{\mathrm{X}}{\overset{\boxminus}{E}}{}^{\cdot l}_{i\cdot}\overset{[+1]}{\varphi}{}^{i}\kappa_l + \underset{\mathrm{XI}}{\overset{\square}{E}}{}^{(ik)}\epsilon_{(ik)}\theta + \underset{\mathrm{XII}}{\overset{\boxminus}{E}}{}^{(ik)}\overset{[+1]}{\kappa}_{(ik)}\theta + \\ + \underset{\mathrm{XIII}}{\overset{\boxminus}{E}}{}_{i}\overset{[+1]}{\varphi}{}^{i}\theta + \underset{\mathrm{XIV}}{\overset{\square}{E}}{}^{i}\kappa_i\theta + \underset{\mathrm{XV}}{\overset{\square}{E}}\theta^2\,,\end{gathered} \tag{78}$$

где $\underset{\mathrm{I}}{\overset{\square}{E}}{}^{(ik)(lm)}$, $\underset{\mathrm{II}}{\overset{\boxplus}{E}}{}^{(ik)(lm)}$, $\underset{\mathrm{III}}{\overset{\boxminus}{E}}{}^{(ik)(lm)}$, $\underset{\mathrm{IV}}{\overset{\boxminus}{E}}{}^{(ik)\cdot}_{\cdot l}$, $\underset{\mathrm{V}}{\overset{\boxplus}{E}}{}^{(ik)\cdot}_{\cdot l}$, $\underset{\mathrm{VI}}{\overset{\square}{E}}{}^{(ik)l}$, $\underset{\mathrm{VII}}{\overset{\boxminus}{E}}{}_{(ik)l}$, $\underset{\mathrm{VIII}}{\overset{\boxplus}{E}}{}_{(il)}$, $\underset{\mathrm{IX}}{\overset{\square}{E}}{}^{(il)}$, $\underset{\mathrm{X}}{\overset{\boxminus}{E}}{}^{\cdot l}_{i\cdot}$, $\underset{\mathrm{XI}}{\overset{\square}{E}}{}^{(ik)}$, $\underset{\mathrm{XII}}{\overset{\boxminus}{E}}{}^{(ik)}$, $\underset{\mathrm{XIII}}{\overset{\boxminus}{E}}{}_{i}$, $\underset{\mathrm{XIV}}{\overset{\square}{E}}{}^{i}$, $\underset{\mathrm{XV}}{\overset{\square}{E}}$ — определяющие мультивесовые псевдотензоры анизотропного микрополярного термоупругого континуума; $\boxplus = \boxminus - 1 = \square - 2$; $\theta \to \theta - \theta_0$ — малый температурный инкремент (считается малой первого порядка); θ_0 — референциальная температура.

Мультивеса определяющих псевдотензоров анизотропного микрополярного термоупругого континуума нетрудно определить, используя правило баланса весов, из выражения для свободной энергии Гельмгольца. В самом деле:

$$\begin{array}{lll}\mathrm{w.g.t}\,(\underset{\mathrm{I}}{E}{}^{(ik)(lm)}) = \square; & \mathrm{w.g.t}(\underset{\mathrm{II}}{E}{}^{(ik)(lm)}) = \boxplus; & \mathrm{w.g.t}(\underset{\mathrm{III}}{E}{}^{(ik)(lm)}) = \boxminus; \\ \mathrm{w.g.t}(\underset{\mathrm{IV}}{E}{}^{(ik)\cdot}_{\cdot l}) = \boxminus; & \mathrm{w.g.t}(\underset{\mathrm{V}}{E}{}^{(ik)\cdot}_{\cdot l}) = \boxplus; & \mathrm{w.g.t}(\underset{\mathrm{VI}}{E}{}^{(ik)l}) = \square; \\ \mathrm{w.g.t}(\underset{\mathrm{VII}}{E}{}_{(ik)l}) = \boxminus; & \mathrm{w.g.t}(\underset{\mathrm{VIII}}{E}{}_{(il)}) = \boxplus; & \mathrm{w.g.t}(\underset{\mathrm{IX}}{E}{}^{(il)}) = \square; \\ \mathrm{w.g.t}(\underset{\mathrm{X}}{E}{}^{\cdot l}_{i\cdot}) = \boxminus; & \mathrm{w.g.t}(\underset{\mathrm{XI}}{E}{}^{(ik)}) = \square; & \mathrm{w.g.t}(\underset{\mathrm{XII}}{E}{}^{(ik)}) = \boxminus; \\ \mathrm{w.g.t}(\underset{\mathrm{XIII}}{E}{}_{i}) = \boxminus; & \mathrm{w.g.t}(\underset{\mathrm{XIV}}{E}{}^{i}) = \square; & \mathrm{w.g.t}(\underset{\mathrm{XV}}{E}) = \square;\end{array} \tag{79}$$

Определяющие уравнения (75), соответствующие квадратичной форме свободной энергии Гельмгольца (78), принимают вид:

$$
\begin{cases}
\overset{\square}{t}{}^{(ik)} = 2\underset{\mathrm{I}}{\overset{\square}{E}}{}^{(ik)(lm)}\epsilon_{(lm)} + \underset{\mathrm{III}}{\overset{\boxminus}{E}}{}^{(ik)(lm)}\overset{[+1]}{\kappa}{}_{(lm)} + \\
\qquad\qquad + \underset{\mathrm{IV}}{\overset{\boxminus}{E}}{}^{(ik)\cdot}_{\quad\ \cdot l}\overset{[+1]}{\varphi}{}^{i} + \underset{\mathrm{VI}}{\overset{\square}{E}}{}^{(ik)l}\kappa_l + \underset{\mathrm{XI}}{\overset{\square}{E}}{}^{(ik)}\theta\,, \\
\overset{\boxminus}{\mu}{}^{(ik)} = 2\underset{\mathrm{II}}{\overset{\boxplus}{E}}{}^{(ik)(lm)}\overset{[+1]}{\kappa}{}_{(lm)} + \underset{\mathrm{III}}{\overset{\boxminus}{E}}{}^{(lm)(ik)}\epsilon_{(lm)} + \\
\qquad\qquad + \underset{\mathrm{V}}{\overset{\boxplus}{E}}{}^{(ik)l}\overset{[+1]}{\varphi}{}_{l} + \underset{\mathrm{VII}}{\overset{\boxminus}{E}}{}^{(ik)l}\kappa_l + \underset{\mathrm{XII}}{\overset{\boxminus}{E}}{}^{(ik)}\theta\,, \\
\overset{\boxminus}{\tau}_i = 2\underset{\mathrm{VIII}}{\overset{\boxplus}{E}}{}_{(il)}\overset{[+1]}{\varphi}{}^{l} + \underset{\mathrm{X}}{\overset{\boxminus}{E}}{}_{i\cdot}^{\cdot l}\kappa_l + \underset{\mathrm{IV}}{\overset{\boxminus}{E}}{}^{(lm)\cdot}_{\quad\ \cdot\cdot i}\epsilon_{(lm)} + \underset{\mathrm{V}}{\overset{\boxminus}{E}}{}^{(lm)\cdot}_{\quad\ \cdot\cdot i}\kappa_{(lm)} + \underset{\mathrm{XIII}}{\overset{\boxminus}{E}}{}_{i}\,\theta\,, \\
\overset{\square}{\mu}{}^{i} = 2\underset{\mathrm{IX}}{\overset{\square}{E}}{}^{(il)}\kappa_l + \underset{\mathrm{X}}{\overset{\boxminus}{E}}{}^{\cdot i}_{l\cdot}\overset{[+1]}{\varphi}{}^{l} + \underset{\mathrm{VI}}{\overset{\square}{E}}{}^{(lm)i}\epsilon_{(lm)} + \underset{\mathrm{VII}}{\overset{\boxminus}{E}}{}^{(lm)i}\overset{[+1]}{\kappa}{}_{(lm)} + \underset{\mathrm{XIII}}{\overset{\square}{E}}{}^{i}\,\theta\,, \\
\overset{\square}{S} = -\underset{\mathrm{XI}}{\overset{\square}{E}}{}^{(ik)}\epsilon_{(ik)} - \underset{\mathrm{XII}}{\overset{\boxminus}{E}}{}^{(ik)}\overset{[+1]}{\kappa}{}_{(ik)} - \underset{\mathrm{XIII}}{\overset{\boxminus}{E}}{}_{i}\overset{[+1]}{\varphi}{}^{i} - \underset{\mathrm{XIV}}{\overset{\square}{E}}{}^{i}\kappa_i - \underset{\mathrm{XV}}{\overset{\square}{E}}\theta\,.
\end{cases}
\tag{80}
$$

В качестве закона теплопроводности примем линейный закон Фурье

$$
\overset{\square}{h}{}^{k} = -\underset{\mathrm{XVI}}{\overset{\square}{E}}{}^{ki}\nabla_i\theta,
\tag{81}
$$

где $\underset{\mathrm{XVI}}{\overset{\square}{E}}{}^{ki}$ — псевдотензор коэффициентов теплопроводности. Отметим, что в (81) компоненты псевдотензора коэффициентов теплопроводности $\underset{\mathrm{XVI}}{\overset{\square}{E}}{}^{ki}$, вообще говоря, проявляют чувствительность к зеркальным отражениям и инверсиям трехмерного пространства.

После линеаризации уравнения теплопроводности (77) с учетом (80) и (81) окончательно получим

$$
\begin{aligned}
&\underset{\mathrm{XI}}{\overset{\square}{E}}{}^{(ij)}\partial.\epsilon_{(ij)} + \underset{\mathrm{XII}}{\overset{\boxminus}{E}}{}^{(ij)}\partial.\overset{[+1]}{\kappa}{}_{(ij)} + \underset{\mathrm{XIII}}{\overset{\boxminus}{E}}{}_{i}\,\partial.\overset{[+1]}{\varphi}{}^{i} + \\
&\qquad\qquad + \underset{\mathrm{XIV}}{\overset{\square}{E}}{}^{i}\,\partial.\kappa_i + \theta_0^{-1}\overset{\square}{C}\partial.\theta = \theta_0^{-1}\underset{\mathrm{XVI}}{\overset{\square}{E}}{}^{js}\nabla_j\nabla_s\theta\,,
\end{aligned}
$$

где $\overset{\square}{C} = \overset{\square}{\rho}c$, c — теплоемкость в расчете на единицу массы (specific heat).

Для гемитропного микрополярного термоупругого тела определяющие тензоры и псевдотензоры четвертого ранга примут вид [54]

$$
\begin{aligned}
\underset{\mathrm{I}}{\overset{\square}{E}}{}^{(ik)(lm)} &= \underset{\mathrm{I}}{\overset{\square}{A}}g^{ik}g^{lm} + \underset{\mathrm{I}}{\overset{\square}{C}}g^{il}g^{km}\,, \\
\underset{\mathrm{II}}{\overset{\boxplus}{E}}{}^{(ik)(lm)} &= \underset{\mathrm{II}}{\overset{\boxplus}{A}}g^{ik}g^{lm} + \underset{\mathrm{II}}{\overset{\boxplus}{C}}g^{il}g^{km}\,, \\
\underset{\mathrm{III}}{\overset{\boxminus}{E}}{}^{(ik)(lm)} &= \underset{\mathrm{III}}{\overset{\boxminus}{A}}g^{ik}g^{lm} + \underset{\mathrm{III}}{\overset{\boxminus}{C}}g^{il}g^{km}\,,
\end{aligned}
\tag{82}
$$

определяющие тензоры и псевдотензоры третьего и первого ранга равны нулю:

$$\overset{\boxminus}{\underset{\mathrm{IV}}{E}}{}^{(ik)\cdot}_{\cdot l} = \overset{\boxplus}{\underset{\mathrm{V}}{E}}{}^{(ik)\cdot}_{\cdot l} = \overset{\square}{\underset{\mathrm{VI}}{E}}{}^{(ik)l} = \overset{\boxminus}{\underset{\mathrm{VII}}{E}}{}_{(ik)l} = \overset{\boxminus}{\underset{\mathrm{XIII}}{E}}{}_{i} = \overset{\square}{\underset{\mathrm{XIV}}{E}}{}^{i} = 0\,, \tag{83}$$

определяющие тензоры и псевдотензоры второго ранга оказываются шаровыми:

$$\begin{aligned} &\overset{\boxplus}{\underset{\mathrm{VIII}}{E}}{}_{(il)} = \overset{\boxplus}{\underset{\mathrm{VIII}}{B}}g_{il}, \qquad \overset{\square}{\underset{\mathrm{IX}}{E}}{}^{(il)} = \overset{\square}{\underset{\mathrm{IX}}{B}}g^{il}, \qquad \overset{\boxminus}{\underset{\mathrm{X}}{E}}{}_{i\cdot}^{\cdot l} = \overset{\boxminus}{\underset{\mathrm{X}}{B}}g_{i\cdot}^{\cdot l}, \\ &\overset{\square}{\underset{\mathrm{XI}}{E}}{}^{(ik)} = \overset{\square}{\underset{\mathrm{XI}}{B}}g^{ik}, \qquad \overset{\boxminus}{\underset{\mathrm{XII}}{E}}{}^{(ik)} = \overset{\boxminus}{\underset{\mathrm{XII}}{B}}g^{ik}. \end{aligned} \tag{84}$$

Кроме того, для гемитропного тела шаровым оказывается псевдотензор коэффициентов теплопроводности:

$$\overset{\square}{\underset{\mathrm{XVI}}{E}}{}^{js} = \overset{\square}{\lambda}g^{js}.$$

Псевдоскаляры нечетного алгебраического веса в (82) и (84), как и коэффициент теплопроводности $\overset{\square}{\lambda}$ реагируют на преобразования трехмерного пространства, меняющие его ориентацию на противоположную. То же самое касается и теплоемкости $\overset{\square}{C}$.

8. Псевдотензорные формулировки уравнений динамики микрополярной термоупругости Уравнения динамики микрополярного континуума, как было показано в разделе 5 настоящей статьи, можно получить из вариационного принципа виртуальных перемещений.

Определяющие уравнения гемитропной микрополярной среды записываются в принятых обозначениях можно принять в виде [18]:

$$\begin{aligned} &\overset{\square}{t}{}^{(is)} = 2\overset{\square}{G}\left(\nu(1-2\nu)^{-1}g^{is}g^{lm} + g^{il}g^{sm}\right)\epsilon_{(lm)} + \\ &\qquad\qquad + \overset{\square}{G}\overset{[-1]}{L}\left(c_4 g^{is}g_{lm}\overset{[+1]}{\kappa}{}^{(lm)} + c_5\overset{[+1]}{\kappa}{}^{(is)}\right) - 2\overset{\square}{G}\underset{*}{\alpha}\frac{1+\nu}{1-2\nu}\theta, \\ &\overset{\boxminus}{\mu}_{(is)} = 2\overset{\square}{G}\overset{[-1]}{L}\overset{[-1]}{L}\left(c_3 g_{is}g_{lm} + g_{il}g_{sm}\right)\overset{[+1]}{\kappa}{}^{(lm)} + \\ &\qquad\qquad + \overset{\square}{G}\overset{[-1]}{L}\left(c_4 g_{is}g^{lm}\epsilon_{(lm)} + c_5\epsilon_{(is)}\right) - 2\overset{\square}{G}\overset{[-1]}{L}\overset{[-1]}{L}\underset{*}{\overset{[+1]}{\beta}}\theta, \\ &\overset{\boxminus}{\tau}_i = 2\overset{\square}{G}\overset{[-2]}{c}{}_1 g_{is}\overset{[+1]}{\varphi}{}^s + \frac{1}{2}\overset{\square}{G}\overset{[-1]}{L}c_6\kappa_i, \\ &\overset{\square}{\mu}{}^i = 2\overset{\square}{G}\overset{[-1]}{L}\overset{[-1]}{L}\overset{[+2]}{c}{}_2\, g^{is}\kappa_s + \frac{1}{2}\overset{\square}{G}\overset{[-1]}{L}c_6\overset{[+1]}{\varphi}{}^i, \end{aligned} \tag{85}$$

где $\overset{\square}{G}$ — модуль сдвига; ν — коэффициент Пуассона; $\overset{[-1]}{L}$ — характерная микродлина; c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6 — не имеющие физической размерности псевдоскаляры; $\underset{*}{\alpha}$ — коэффициент линейного теплового расширения; $\underset{*}{\overset{[+1]}{\beta}}$ — коэффициент теплового изгиба–кручения (см. [18, 21]).

Возвращаясь к записи в терминах асимметричных псевдотензоров силовых и моментных напряжений получим

$$
\begin{aligned}
\overset{\square}{t}_{is} = \overset{\square}{G}\Big[&(1+c_1)\nabla_i u_s + (1-c_1)\nabla_s u_i + 2\nu(1-2\nu)^{-1} g_{is}\nabla_k u^k - \\
&- 2c_1 e_{isl}\overset{[+1]}{\phi}{}^l + \overset{[-1]}{L} c_4 g_{is}\nabla_l \overset{[+1]}{\phi}{}^l + \overset{[-1]}{L} c_5 \nabla_{(i}\overset{[+1]}{\phi}{}_{s)} - \frac{1}{2}\overset{[-1]}{L} c_6 \nabla_{[i}\overset{[+1]}{\phi}{}_{s]} - 2\underset{*}{\alpha}\frac{1+\nu}{1-2\nu}\theta\Big], \\
\overset{\boxminus}{\mu}_{is} = \overset{\square}{G}\overset{[-1]}{L}\overset{[-1]}{L}\Big[&(1+c_2)\nabla_i \overset{[+1]}{\phi}{}_s + (1-c_2)\nabla_s \overset{[+1]}{\phi}{}_i + 2c_3 g_{is}\nabla_l \overset{[+1]}{\phi}{}^l + \\
&+ \overset{[-1]}{L}\Big(c_4 g_{is}\nabla_l u^l + c_5\nabla_{(i}u_{s)} - \frac{1}{2}c_6\nabla_{[i}u_{s]} + \frac{1}{2}c_6\epsilon_{isl}\overset{[+1]}{\phi}{}^l\Big) - 2\underset{*}{\beta}\theta\Big].
\end{aligned}
\tag{86}
$$

Подставив полученные определяющие уравнения (86) в уравнения динамики (61), дополнив их уравнением теплопроводности [40,41] для гемитропного микрополярного тела получим замкнутую систему дифференциальных уравнений:

$$
\begin{aligned}
&\overset{\square}{G}[(1+\mathfrak{c}_1)\nabla^s\nabla_s u^i + (1-\mathfrak{c}_1+2\nu(1-2\nu)^{-1})\nabla^i\nabla_k u^k + 2\overset{[-2]}{\mathfrak{c}}_1\epsilon^{ikl}\nabla_k\overset{[+1]}{\phi}{}_l + \\
&\quad + \overset{[-1]}{L} c_4'\nabla^i\nabla_k\overset{[+1]}{\phi}{}^k + \overset{[-1]}{L} c_5'\nabla^k\nabla_k\overset{[+1]}{\phi}{}^i] - 2\overset{\square}{G}\underset{*}{\alpha}\frac{1+\nu}{1-2\nu}\nabla_i\theta = -\overset{\square}{\rho}(f^i - \partial..u^i), \\
&\overset{\square}{G}\overset{[-1]}{L}\overset{[-1]}{L}[(1+\mathfrak{c}_2)\nabla^s\nabla_s\overset{[+1]}{\phi}{}_i + (1-\mathfrak{c}_2+2\mathfrak{c}_3)\nabla_i\nabla_k\overset{[+1]}{\phi}{}^k + \\
&\quad + \overset{[-1]}{L}{}^{-1}c_4'\nabla_i\nabla^k u_k + \overset{[-1]}{L}{}^{-1}c_5'\nabla^k\nabla_k u_i + \overset{[-1]}{L}{}^{-1}c_6'\epsilon_{isl}\nabla^s\overset{[+1]}{\phi}{}^l] - \\
&- 2\overset{\square}{G}\overset{[-2]}{\mathfrak{c}}_1(2\overset{[+1]}{\phi}{}_i - e^2\epsilon_{ikl}g^{ks}\nabla_s u^l) - 2\overset{\square}{G}\overset{[-1]}{L}\overset{[-1]}{L}\underset{*}{\overset{[+1]}{\beta}}\nabla_i\theta = -\overset{\square}{\rho}(\overset{[-1]}{l}{}_i - \overset{[-2]}{\mathfrak{I}}\,\partial..\overset{[+1]}{\phi}{}_i), \\
&\overset{\square}{\lambda}\nabla_s\nabla^s\theta - c\overset{\square}{\rho}\partial.\theta - 2\overset{\square}{G}\underset{*}{\alpha}\frac{1+\nu}{1-2\nu}\theta_0\nabla_s\partial.u^s - 2\overset{\square}{G}\overset{[-1]}{L}\overset{[-1]}{L}\underset{*}{\overset{[+1]}{\beta}}\theta_0\nabla_s\partial.\overset{[+1]}{\phi}{}^s = 0,
\end{aligned}
\tag{87}
$$

где $\overset{\square}{\lambda}$ — коэффициент теплопроводности, c — теплоемкость на единицу массы. В этом случае характерная микродлина L и модуль сдвига G являются псевдоскалярами нечетного алгебраического веса.

9. Детерминирование весов определяющих скаляров в гемитропном теле. Полученная в предыдущем разделе настоящей статьи система дифференциальных уравнений демонстрирует важное свойство термомеханических характеристик гемитропных микрополярных термоупругих тел — определяющие постоянные, имеющие физическую размерность, оказываются псевдоскалярами нечетного алгебраического веса, т.е. проявляют чувствительность к преобразованиям трехмерного пространства, меняющим его ориентацию на противоположную. К таким псевдоскалярам относятся: модуль сдвига $\overset{\square}{G}$, зависящий от алгебраического веса псевдоинвариантного элемента площади, и характерная микродлина $\overset{[-1]}{L}$, вес которой определяется весом псевдовектора спинорных перемещений, а также коэффициент теплопроводности $\overset{\square}{\lambda}$ и массовая плотность $\overset{\square}{\rho}$.

Следует отметить, что указанные выше псевдоскаляры ковариантно постоянны, т.е., например, для модуля сдвига $\overset{\square}{G}$ и характерной микродлины $\overset{[-1]}{L}$ будут выполнены следующие дифференциальные условия

$$\nabla_k \overset{\square}{G} = \overset{\square}{0}, \qquad \nabla_k \overset{[-1]}{L} = \overset{[-1]}{0}, \tag{88}$$

или

$$\begin{aligned} &\partial_k \overset{\square}{G} - \square \overset{\square}{G}\, \overset{[-1]}{1}\, \partial_k \overset{[+1]}{1} = \overset{\square}{0}, \\ &\partial_k \overset{[-1]}{L} + 1\, \overset{[-1]}{L}\, \overset{[-1]}{1}\, \partial_k \overset{[+1]}{1} = \overset{[-1]}{0}, \end{aligned} \tag{89}$$

а также

$$\begin{cases} \partial_k (\ln |\overset{\square}{G}| - \square \ln |\overset{[+1]}{1}|) = \overset{\square}{0}, \\ \partial_k (\ln |\overset{[-1]}{L}| - \ln |\overset{[+1]}{1}|) = \overset{[-1]}{0}. \end{cases} \tag{90}$$

Интегрируя полученные уравнения (90), заключаем, что

$$\overset{\square}{G} = e^{\square} G = \overset{\square}{1} G, \qquad \overset{[-1]}{L} = e^{-1} L = \overset{[-1]}{1} L, \tag{91}$$

где G и L — абсолютные инварианты, более того, абсолютные скалярные величины.

10. Заключение и выводы. В работе получены мультивесовые формулировки уравнений теории гемитропной микрополярной термоупругости.

(1) Получена мультивесовая формулировка уравнений динамики и уравнения теплопроводности для гемитропного микрополярного термоупругого тела основанные на абсолютной ивариантности: трансляционных перемещений, массы, силы, механической работы, количества тепла. Развитие теории проводилось в терминах контравариантного псевдовектора спинорных перемещений положительного нечетного веса.

(2) Рассмотрены мильтивесовые варианты тензорных элементов площади и объема. Исследовано влияние мультивесов тензорных элементов площади и объема на веса объемных плотностей: внутренней энергии, энтропии, массовой плотности, теплового потока, контролируемого и неконтролируемого производства энтропии, а также — на веса связанных с ними определяющих псевдоскаляров.

(3) Выведен фундаментальный принцип абсолютной инвариантности абсолютной термодинамической температуры, обусловленный правилом частного для алгебраических весов плотности внутренней энергии и плотности энтропии.

(4) Вычислены веса коэффициента микроэнерции и момента пары сил.

(5) Получены условия детерминирования алгебраических мультивесов определяющих псевдотензоров и псевдоскаляров с целью исследования их изменчивости при зеркальных преобразованиях трехмерного пространства.

Таблица 1. Фундаментальные псевдотензоры, ассоциированные с алгеброй и геометрией трехмерного пространства.

терминологическое обозначение	символьное обозначение	вес (weight)

пространственный ковариантный базисный вектор (spatial covariant base vector)	$\underset{s}{\boldsymbol{\imath}}(s=1,2,3)$	0
отсчетный ковариантный базисный вектор (referential covariant base vector)	${}^{\backprime}\underset{\alpha}{\boldsymbol{\imath}}(\alpha=1,2,3)$	0
пространственные (Эйлеровы) координаты (spatial (Eulerian) coordinates)	$x^s(s=1,2,3)$	0
отсчетные (Лагранжевы) координаты (referenetial (Lagrangian) coordinates)	$X^\alpha(\alpha=1,2,3)$	0
фундаментальный ориентирующий псевдоскаляр	e	+1
псевдоскалярная единица положительного веса	$\overset{[+1]}{1} = e$	+1
псевдоскалярная единица отрицательного веса	$\overset{[-1]}{1} = e^{-1}$	−1
контравариантные символы перестановок	ϵ^{ijk}	+1
ковариантные символы перестановок	ϵ_{ijk}	−1
специальные символы перестановок положительного веса	$\overset{[+1]}{\epsilon}{}^{\cdot p \cdot}_{i \cdot k}$	+1
специальные символы перестановок отрицательного веса	$\overset{[-1]}{\epsilon}{}^{\cdot p \cdot}_{i \cdot k}$	−1
специальные символы перестановок положительного веса	$\overset{[+1]}{\epsilon}{}^{i \cdot k}_{\cdot p \cdot}$	+1
специальные символы перестановок отрицательного веса	$\overset{[-1]}{\epsilon}{}^{i \cdot k}_{\cdot p \cdot}$	−1
набла Гамильтона	∇_i	0
отсчетный метрический тензор	${}^{\backprime}g_{\alpha\sigma}$	0
метрический тензор	g_{ij}	0
фундаментальный тензор	g^{ij}	0
двухточечные g–символы (two-point g–symbols)	$g_s^{\cdot\alpha} = \underset{s}{\boldsymbol{\imath}} \cdot {}^{\backprime}\overset{\alpha}{\boldsymbol{\imath}},\ g_\alpha^{\cdot s} = {}^{\backprime}\underset{\alpha}{\boldsymbol{\imath}} \cdot \overset{s}{\boldsymbol{\imath}}.$	0
детерминант метрического тензора	g	+2
тензорный элемент объема (tensor volume element)	$d\tau^{mns}$	0
естественный элемент объема (natural volume element)	$\overset{[-1]}{d\tau}{}^{123} = \overset{[-1]}{d\tau}$	−1
дублетный элемент объема (dublet volume element)	$\overset{[+1]}{d\tau}{}_{123} = \overset{[+1]}{d\tau}$	+1

инвариантный элемент объема (invariant volume element)	$d\tau$	0
тензорный элемент площади поверхности (tensor element of area)	$d\tau^{ij}$	0
псевдовекторный элемент площади поверхности (pseudovector element of area)	$\overset{[-1]}{dA_k}$	−1
псевдовекторный элемент площади поверхности (pseudovector element of area)	$\overset{[+1]}{dA^k}$	+1
векторный элемент площади поверхности (vector element of area)	dA_k	0
инвариантный элемент площади поверхности (invariant element of area)	dS	0
естественный элемент площади поверхности (natural element of area)	$\overset{[-1]}{dA_k}$	+1
дублетный элемент площади поверхности (natural element of area)	$\overset{[+1]}{dA_k}$	+1

Таблица 2. Основные псевдотензоры микрополярной термомеханики.

терминологическое обозначение	символьное обозначение	вес		
		$\overset{[-1]}{d\tau}$	$\overset{[+1]}{d\tau}$	$d\tau$
вектор перемещений	u^k	0	0	0
тензор дисторсии	$x_{\alpha}^{\cdot s}$	0	0	0
модуль дисторсии	$\|x\|_{\alpha\sigma}$	0	0	0
двухточечный тензор конечного поворота	$\lambda^{s\sigma}$	0	0	0
одноточечный Эйлеров тензор поворота	λ^{sm}	0	0	0
угол поворота	ϕ	0	0	0
псевдовектор спинорных перемещений	ϕ^i	+1	+1	+1
псевдовектор вихря поля трансляционных перемещений	ω^h	+1	+1	+1
псевдовекторы относительного микроповорота	φ^i	+1	+1	+1
тензор деформации изгиба–кручения	$\kappa_{i\cdot}^{\cdot s}$	+1	+1	+1
сопутствующий вектор деформации изгиба–кручения	κ_i	0	0	0
ассимметричный тензор деформаций	ϵ_{ij}	0	0	0
тензор малых деформаций	$\epsilon_{(ij)}$	0	0	0
масса	m	0	0	0
плотность	ρ	+1	−1	0
термодинамическая температура	θ	0	0	0
количество тепла	Q	0	0	0
работа	A	0	0	0
псевдовектор потока энтропии	J^j	+1	−1	0
псевдовектор потока тепла	h^j	+1	−1	0
массовая плотность внутренней энергии	u	0	0	0
массовая плотность свободной энергии Гельмгольца	ψ	0	0	0
массовая плотность энтропии	s	0	0	0
массовая плотность контролируемого производства энтропии	σ	0	0	0
массовая плотность неконтролируемого производства энтропии	ξ	0	0	0

объемная плотность внутренней энергии	U	$+1$	-1	0
объемная плотность свободной энергии Гельмгольца	Ψ	$+1$	-1	0
объемная плотность энтропии	S	$+1$	-1	0
объемная плотность контролируемого производства энтропии	Σ	$+1$	-1	0
объемная плотность неконтролируемого производства энтропии	Ξ	$+1$	-1	0
поверхностные силы	t^k	$+1$	-1	0
тензор силовых напряжений	t^{ik}	$+1$	-1	0
объемные силы	X^k	$+1$	-1	0
массовые силы	f^k	0	0	0
плечо пары сил	d	-1	-1	-1
поверхностные моменты	m_k	0	-2	-1
тензор моментных напряжений	$\mu^{i\cdot}_{\cdot k}$	0	-2	-1
ассоциированный вектор моментных напряжений	μ^i	$+1$	-1	0
ассоциированный вектор силовых напряжений	τ_k	0	-2	-1
объемные моменты	Y_k	0	-2	-1
массовые моменты	l_k	-1	-1	-1
коэффициент микроинерции	$\Im$	-2	-2	-2

Таблица 3. Определяющие псевдотензоры и псевдоскаляры гемитропной микрополярной термоупругости.

терминологическое обозначение	символьное обозначение	вес		
		$\overset{[-1]}{d\tau}$	$d\tau$	$\overset{[+1]}{d\tau}$
определяющий тензор I (first constitutive tensor)	$\underset{\mathrm{I}}{E}{}^{(ik)(lm)}$	$+1$	0	-1
определяющий тензор II (first constitutive tensor)	$\underset{\mathrm{II}}{E}{}^{(ik)(lm)}$	-1	-2	-3
определяющий тензор III (first constitutive tensor)	$\underset{\mathrm{III}}{E}{}^{(ik)(lm)}$	0	-1	-2
определяющий тензор IV (first constitutive tensor)	$\underset{\mathrm{IV}}{E}{}^{(ik)\cdot}_{\cdot l}$	0	-1	-2
определяющий тензор V (first constitutive tensor)	$\underset{\mathrm{V}}{E}{}^{(ik)\cdot}_{\cdot l}$	-1	-2	-3
определяющий тензор VI (first constitutive tensor)	$\underset{\mathrm{VI}}{E}{}^{(ik)l}$	$+1$	0	-1
определяющий тензор VII (first constitutive tensor)	$\underset{\mathrm{VII}}{E}{}_{(ik)l}$	0	-1	-2
определяющий тензор VIII (first constitutive tensor)	$\underset{\mathrm{VIII}}{E}{}_{(il)}$	-1	-2	-3
определяющий тензор IX (first constitutive tensor)	$\underset{\mathrm{IX}}{E}{}^{(il)}$	$+1$	0	-1
определяющий тензор X (first constitutive tensor)	$\underset{\mathrm{X}}{E}{}_{i\cdot}^{\cdot l}$	0	-1	-2
определяющий тензор XI (first constitutive tensor)	$\underset{\mathrm{XI}}{E}{}^{(ik)}$	$+1$	0	-1
определяющий тензор XII (first constitutive tensor)	$\underset{\mathrm{XII}}{E}{}^{(ik)}$	0	-1	-2
определяющий тензор XIII (first constitutive tensor)	$\underset{\mathrm{XIII}}{E}{}_{i}$	0	-1	-2
определяющий тензор XIV (first constitutive tensor)	$\underset{\mathrm{XIV}}{E}{}^{i}$	$+1$	0	-1
определяющий тензор XV (first constitutive tensor)	$\underset{\mathrm{XV}}{E}$	$+1$	0	-1
модуль сдвига	G	$+1$	0	-1
коэффициент Пуассона	ν	0	0	0
характерная микродлина	L	-1	-1	-1
определяющий скаляр i	c_1	0	0	0
определяющий скаляр ii	c_2	0	0	0
определяющий скаляр iii	c_3	0	0	0
определяющий скаляр iv	c_4	0	0	0
определяющий скаляр v	c_5	0	0	0
определяющий скаляр vi	c_6	0	0	0

коэффициент линейного теплового расширения	$\underset{*}{\alpha}$	0	0	0
коэффициент теплового изгиба–кручения	$\overset{[+1]}{\underset{*}{\beta}}$	+1	+1	+1
коэффициент теплопроводности	λ	+1	0	−1
теплоемкость на единицу массы	c	0	0	0
теплоемкость на единицу объема	C	+1	0	−1

ЛИТЕРАТУРА

[1] DeValk T., Hestetune J., Lakes R. S. Nonclassical thermal twist of the chiral gyroid lattice // Phys. Status Solidi (B). 2022. Vol. 259, no. 12. p. 2200338.

[2] Aouadi M., Ciarletta M., Tibullo V. Analytical aspects in strain gradient theory for chiral Cosserat thermoelastic materials within three Green-Naghdi models // Journal of Thermal Stresses. 2019. Vol. 42, no. 6. P. 681–697.

[3] Lakes R. Composites and metamaterials. Singapore: World Scientific, 2020.

[4] Schouten J. A. Tensor Analysis for Physicist. Oxford: Clarendon Press, 1965. 434 p. [Схоутен Я. А. Тензорный анализ для физиков. М.: Наука. 1965. 456 с.].

[5] Sokolnikoff I. Tensor Analysis: Theoryand Applications to Geometry and Mechanics of Continua. New York: John Wiley & Sons Inc, 1964. 361 p. [Сокольников И. С. Тензорный анализ. Теория и применения в геометрии и в механике сплошных сред. М.: Наука, 1971. 376 с.].

[6] Synge J. L., Schild A. Tensor calculus. Toronto: Toronto University Press, 1949. Vol. 5. 334 p.

[7] Truesdell C., Toupin R. The Classical Field Theories // Principles of Classical Mechanics and Field Theory / Prinzipien der Klassischen Mechanik und Feldtheorie / Ed. by S. Flügge. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1960. P. 226–858.

[8] Гуревич Г. Б. Основы теории алгебраических инвариантов. М., Л.: ГИТТЛ, 1948. 408 с. [Gurevich G. B. Foundations of the theory of algebraic invariants. Gröningen, P. Noordhoff, 1964. 429 p.].

[9] Veblen O., Thomas T. Y. Extensions of Relative Tensors // Trans. Am. Math. Society. 1924. Vol. 26. P. 373–377. URL: https://www.jstor.org/stable/1989146.

[10] Veblen O. Invariants of quadratic differential forms. Cambridge: The University Press, 1933. 102 p.

[11] Das A. J. Tensors: the mathematics of relativity theory and continuum mechanics. Berlin, Heidelberg: Springer Science & Business Media, 2007.

[12] Cosserat E., Cosserat F. Théorie des corps déformables. Paris: A. Hermann et fils, 1909.

[13] Nowacki W. Theory of micropolar elasticity. Berlin: Springer. Berlin: Springer Science & Business Media, 1972.

[14] Besdo D. A contribution to the nonlinear theory of the Cosserat-continuum // Acta Mechanica. 1974. Vol. 20. P. 105–131.

[15] Nowacki W. Theory of Asymmetric Elasticity. Oxford, New York, Toronto, Sydney, Paris, Frankfurt: Pergamon Press, 1986. viii+383 p.

[16] Dyszlewicz J. Micropolar Theory of Elasticity. Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics. Berlin: Springer Science & Business Media, 1986. xv+345 p.

[17] Maugin G. A. Non-classical continuum mechanics. Springer, 2017. 102 p.

[18] Радаев Ю. Н. Правило множителей в ковариантных формулировках микрополярных теорий механики континуума // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2018. Т. 22. С. 504–517. URL: http://mi.mathnet.ru/vsgtu1635.

[19] Neuber H. Über Probleme der Spannungskonzentration im Cosserat-Körper // Acta Mechanica. 1966. Vol. 2. P. 48–69.

[20] Neuber H. On the general solution of linear-elastic problems in isotropic and anisotropic Cosserat continua // Applied Mechanics: Proceedings of the Eleventh International Congress of Applied Mechanics Munich (Germany) 1964 / Springer. 1966. P. 153–158.

[21] Радаев Ю.Н., Мурашкин Е.В. Псевдотензорная формулировка механики гемитропных микрополярных сред // Проблемы прочности и пластичности. 2020. Т. 82, № 4. С. 399–412. URL: https://doi.org/10.32326/1814-9146-2020-82-4-399-412.
[22] Murashkin E. V., Radayev Y. N. On a micropolar theory of growing solids // Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences. 2020. Vol. 24, no. 3. P. 424–444.
[23] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. К теории линейных гемитропных микрополярных сред // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. ИЯ Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2020. № 4. С. 16–24.
[24] Murashkin E. V., Radaev Y. N. Coupled Thermoelasticity of Hemitropic Media. Pseudotensor Formulation // Mechanics of Solids. 2023. Т. 58, № 3. С. 802–813.
[25] Мурашкин Е. В. О связи микрополярных определяющих параметров термодинамических потенциалов состояния // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. ИЯ Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2023. № 1(55). с. 110–121.
[26] Kovalev V. A., Murashkin E. V., Radayev Y. N. On the Neuber theory of micropolar elasticity. A pseudotensor formulation // Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences. 2020. Vol. 24, no. 4. P. 752–761.
[27] Арнольд В. И. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1979. 431 с.
[28] Nayfeh A. H. Perturbation methods. John Wiley & Sons, 2008. 417 p.
[29] Парс Л. А. Аналитическая динамика. М.: Наука, 1971. 636 с.
[30] Маркеев А. П. Теоретическая механика. М.: Наука, 1990. 416 с.
[31] Murashkin E. V., Radayev Y. N. A Negative Weight Pseudotensor Formulation of Coupled Hemitropic Thermoelasticity // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2023. Vol. 44, no. 6. P. 2440–2449.
[32] Radayev Y. N. Tensors with Constant Components in the Constitutive Equations of a Hemitropic Micropolar Solids // Mechanics of Solids. 2023. Vol. 58, no. 5. P. 1517–1527.
[33] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Алгебраический алгоритм систематического приведения одноточечных псевдотензоров к абсолютным тензорам // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. ИЯ Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2022. № 1(51). с. 17–26.
[34] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Ковариантно постоянные тензоры в пространствах Евклида. Элементы теории // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. ИЯ Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2022. № 2(52). с. 106–115.
[35] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Ковариантно постоянные тензоры в пространствах Евклида. Приложения к механике континуума // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. ИЯ Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2022. № 2(52). С. 118–127.
[36] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. О согласовании ориентаций тензорных элементов площади в микрополярном континууме, погружаемом во внешнее плоское пространство // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия Физико-математические науки. 2021. Т. 25, № 4. С. 776–786.
[37] Murashkin E., Radaev Y. N. On theory of oriented tensor elements of area for a micropolar continuum immersed in an external plane space // Mechanics of Solids. 2022. Vol. 57, no. 2. P. 205–213.
[38] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Тензор силовых напряжений Схоутена и аффинорные плотности положительного веса // Проблемы прочности и пластичности. 2022. Т. 84, № 4. С. 545–558.
[39] Murashkin E. V., Radayev Y. N. The Schouten Force Stresses in Continuum Mechanics Formulations // Mechanics of Solids. 2023. Vol. 58, no. 1. P. 153–160.
[40] Murashkin E. V., Radaev Y. N. Coupled Thermoelasticity of Hemitropic Media. Pseudotensor Formulation // Mechanics of Solids. 2023. Т. 58, № 9. С. ???–???
[41] Murashkin E. V., Radaev Y. N. Heat Conduction of Micropolar Solids Sensitive to Mirror Reflections of Three–Dimensional Space // Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki. 2023. Т. 165, № 4. С. ???–???
[42] Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Элементы теории поля: вариационные симметрии и геометрические инварианты. М.: Физматлит, 2009. 156 с.
[43] Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Волновые задачи теории поля и термомеханика. Саратов: Изд-во Саратовского ун-та, 2010. 328 с.

[44] Фиников Сергей Павлович. Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии. Л., М.: ОГИЗ, 1948. 432 с.

[45] Картан А. Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы. М.: Мир, 1971. 392 с.

[46] Ефимов Н. В. Введение в теорию внешних форм. М.: Наука, 1977. 88 с.

[47] Розенфельд Б. А. Многомерные пространства. М.: Наука, 1966. 648 с.

[48] Poincaré H. Sur les résidus des intégrales doubles // Acta math. 1887. Vol. 6. P. 321–380.

[49] Poincaré H. Analysis situs // J. Ecole Polytech. Vol. 1. P. 1–123.

[50] Гюнтер Н. М. Курс вариационного исчисления. М., Л.: Гостехтеоретиздат, 1941. 308 с.

[51] Гельфанд И. М., Фомин С. В. Вариационное исчисление. М.: Физматгиз, 1961. 228 с.

[52] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. О формулировках краевых условий в задачах синтеза тканых 3D материалов // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. ИЯ Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2021. № 1(47). с. 114–121.

[53] Радаев Ю. Н. Пространственная задача математической теории пластичности. Самара: Самарский университет, 2006. 340 с.

[54] Jeffreys H. Cartesian Tensors. Cambridge: Cambridge University Press, 1931. 101 p.

E. V. Murashkin, Yu. N. Radayev

MULTIWEIGHTS THERMOMECHANICS OF HEMITROPIC MICROPOLAR SOLIDS

Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow, Russia

Abstract. The article is devoted to the problems of determining the algebraic weights of micro- and nanoscale multi-weight characteristics of the hemitropic micropolar thermomechanics. The fundamental concepts of pseudoinvariant volume and area elements of odd integer weights in three-dimensional space are discussed. The developing theory of hemitropic micropolar thermoelasticity is formulated in terms of a contravariant pseudovector of spinor displacements of a positive odd weight with the fundamental principle of the absolute invariance of absolute thermodynamic temperature, mass and mass densities of: entropy, internal energy, Helmholtz free energy, controlled and uncontrolled entropy production. Multi-weight pseudotensor formulations of wireless transmission principles and a reduced energy balance equation are proposed. Multiweights formulas for pseudo-vector differential equations of statics and dynamics of a hemitropic thermoelastic body are obtained and analyzed. The problem of mutual influence of algebraic weights of constitutive pseudoscalars are discussed in order to take into account their transformations as a result of the transformation of three-dimensional space, changing the orientation of the coordinate basis to the opposite.

Keywords: algebraic weight, pseudotensor, nanoscale, microscale, heat conduction, micropolarity, tensor volume element, multiweight formulation, heat flux pseudovector, mirror reflection, hemitropic solid

REFERENCES

[1] DeValk T., Hestetune J., Lakes R. S. Nonclassical thermal twist of the chiral gyroid lattice // Phys. Status Solidi (B). 2022. Vol. 259, no. 12. p. 2200338. doi:10.1002/pssb.202200338.

[2] Aouadi M., Ciarletta M., Tibullo V. Analytical aspects in strain gradient theory for chiral Cosserat thermoelastic materials within three Green-Naghdi models // Journal of Thermal Stresses. 2019. Vol. 42, no. 6. P. 681–697. doi:10.1080/01495739.2019.1571974.

[3] Lakes R. Composites and metamaterials. Singapore: World Scientific, 2020.

[4] Schouten J. A. Tensor Analysis for Physicist. Oxford: Clarendon Press, 1965. 434 p. [Схоутен Я. А. Тензорный анализ для физиков. М.: Наука. 1965. 456 с.].

[5] Sokolnikoff I. Tensor Analysis: Theoryand Applications to Geometry and Mechanics of Continua. New York: John Wiley & Sons Inc, 1964. 361 p. [Сокольников И. С. Тензорный анализ. Теория и применения в геометрии и в механике сплошных сред. М.: Наука, 1971. 376 с.].

[6] Synge J. L., Schild A. Tensor calculus. Toronto: Toronto University Press, 1949. Vol. 5. 334 p.

[7] Truesdell C., Toupin R. The Classical Field Theories // Principles of Classical Mechanics and Field Theory / Prinzipien der Klassischen Mechanik und Feldtheorie / Ed. by S. Flügge. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1960. P. 226–858. doi: 10.1007/978-3-642-45943-6_2.

Evgenii V. Murashkin, Cand. Sc., PhD, MD, Senior Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences,
101, korp. 1, pr. Vernadskogo, Moscow, 119526, Russian Federation.
Yuri N. Radayev, D. Sc., PhD, MSc, Professor of Continuum Mechanics, Leading Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences,
101, korp. 1, pr. Vernadskogo, Moscow, 119526, Russian Federation.

[8] Гуревич Г. Б. Основы теории алгебраических инвариантов. М., Л.: ГИТТЛ, 1948. 408 с. [Gurevich G. B. Foundations of the theory of algebraic invariants. Gröningen, P. Noordhoff, 1964. 429 p.].
[9] Veblen O., Thomas T. Y. Extensions of Relative Tensors // Trans. Am. Math. Society. 1924. Vol. 26. P. 373–377. URL: https://www.jstor.org/stable/1989146.
[10] Veblen O. Invariants of quadratic differential forms. Cambridge: The University Press, 1933. 102 p.
[11] Das A. J. Tensors: the mathematics of relativity theory and continuum mechanics. Berlin, Heidelberg: Springer Science & Business Media, 2007. doi: 10.1007/978-0-387-69469-6.
[12] Cosserat E., Cosserat F. Théorie des corps déformables. Paris: A. Hermann et fils, 1909.
[13] Nowacki W. Theory of micropolar elasticity. Berlin: Springer. Berlin: Springer Science & Business Media, 1972.
[14] Besdo D. A contribution to the nonlinear theory of the Cosserat-continuum // Acta Mechanica. 1974. Vol. 20. P. 105–131.
[15] Nowacki W. Theory of Asymmetric Elasticity. Oxford, New York, Toronto, Sydney, Paris, Frankfurt: Pergamon Press, 1986. viii+383 p.
[16] Dyszlewicz J. Micropolar Theory of Elasticity. Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics. Berlin: Springer Science & Business Media, 1986. xv+345 p.
[17] Maugin G. A. Non-classical continuum mechanics. Springer, 2017. 102 p. doi:10.1007/978-981-10-2434-4.
[18] Radayev Yu. N. The rule of multipliers in covariant formulations of micropolar theories of continuum mechanics // Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences. 2018. T. 22. C. 504–517. doi:10.14498/vsgtu1635. URL: http://mi.mathnet.ru/vsgtu1635.
[19] Neuber H. Über Probleme der Spannungskonzentration im Cosserat-Körper // Acta Mechanica. 1966. Vol. 2. P. 48–69. doi:10.1007/BF01176729.
[20] Neuber H. On the general solution of linear-elastic problems in isotropic and anisotropic Cosserat continua // Applied Mechanics: Proceedings of the Eleventh International Congress of Applied Mechanics Munich (Germany) 1964 / Springer. 1966. P. 153–158. doi:10.1007/978-3-662-29364-5_16.
[21] Radayev Yu. N., Murashkin E. V. Pseudotensor formulation of the mechanics of hemitropic micropolar media // Problems of strength and ductility. 2020. T. 82, № 4. C. 399–412. doi:10.32326/1814-9146-2020-82-4-399-412.
[22] Murashkin E. V., Radayev Y. N. On a micropolar theory of growing solids // Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences. 2020. Vol. 24, no. 3. P. 424–444. doi: 10.14498/vsgtu1792.
[23] Murashkin E. V., Radayev Y. N. On the theory of linear hemitropic micropolar media // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. IYa Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya. 2020. no. 4. P. 16–24. doi:10.37972/chgpu.2020.89.81.031.
[24] Murashkin E. V., Radaev Y. N. Coupled Thermoelasticity of Hemitropic Media. Pseudotensor Formulation // Mechanics of Solids. 2023. T. 58, № 3. C. 802–813. doi:10.3103/s0025654423700127.
[25] Murashkin E. V. On the relations between micropolar defining parameters of thermodynamic state potentials // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. IYa Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya. 2023. no. 1(55). p. 110–121. doi:10.37972/chgpu.2023.55.1.012.
[26] Kovalev V. A., Murashkin E. V., Radayev Y. N. On the Neuber theory of micropolar elasticity. A pseudotensor formulation // Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences. 2020. Vol. 24, no. 4. P. 752–761. doi:10.14498/vsgtu1799.
[27] Arnold V. I. Mathematical methods of classical mechanics. Moscow: Nauka, 1979. 431 p.
[28] Nayfeh A. H. Perturbation methods. John Wiley & Sons, 2008. 417 p.
[29] Pars L. A. Analytical dynamics. Moscow: Nauka, 1971. 636 p.
[30] Markeev A. P. Theoretical mechanics. Moscow: Nauka, 1990. 416 c.
[31] Murashkin E. V., Radayev Y. N. A Negative Weight Pseudotensor Formulation of Coupled Hemitropic Thermoelasticity // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2023. Vol. 44, no. 6. P. 2440–2449. doi: 10.1134/S1995080223060392.
[32] Radayev Y. N. Tensors with Constant Components in the Constitutive Equations of a Hemitropic Micropolar Solids // Mechanics of Solids. 2023. Vol. 58, no. 5. P. 1517–1527. doi: 10.3103/S0025654423700206.

[33] Murashkin E. V., Radayev Y. N. Algebraic algorithm for systematically reducing one-point pseudotensors to absolute tensors // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. IYa Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya. 2022. no. 1(51). p. 17–26. doi:10.37972/chgpu.2022.51.1.002.
[34] Murashkin E. V., Radayev Y. N. Covariantly constant tensors in Euclidean spaces. Elements of the theory // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. IYa Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya. 2022. no. 2(52). p. 106–115. doi:10.37972/chgpu.2022.52.2.012.
[35] Murashkin E. V., Radayev Y. N. Covariantly constant tensors in Euclidean spaces. Applications to continuum mechanics // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. IYa Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya. 2022. no. 2(52). P. 118–127. doi:10.37972/chgpu.2022.52.2.013.
[36] Murashkin E. V., Radayev Y. N. On the coordination of the orientations of tensor area elements in a micropolar continuum immersed in an external flat space // Vestn. Sam. gos. tekhn. un-ta. Ser. Fiz.-mat. nauki. 2021. Vol. 25, no. 4. P. 776–786. doi:10.3103/s0025654422700029.
[37] Murashkin E., Radaev Y. N. On theory of oriented tensor elements of area for a micropolar continuum immersed in an external plane space // Mechanics of Solids. 2022. Vol. 57, no. 2. P. 205–213. doi: 10.3103/s0025654422020108.
[38] Murashkin E. V., Radayev Y. N. Schouten force stress tensor and positive weight affinor densities // Problems of strength and plasticity. 2022. Vol. 84, no. 4. P. 545–558. doi:10.32326/1814-9146-2022-84-4-545-558.
[39] Murashkin E. V., Radayev Y. N. The Schouten Force Stresses in Continuum Mechanics Formulations // Mechanics of Solids. 2023. Vol. 58, no. 1. P. 153–160. doi: 10.3103/s0025654422700029.
[40] Murashkin E. V., Radaev Y. N. Heat Transfer in Anisotropic Micropolar Solids // Mechanics of Solids. 2023. T. 58, № 9. C. ???–??? doi:10.3103/S0025654423700255.
[41] Murashkin E. V., Radaev Y. N. Heat Conduction of Micropolar Solids Sensitive to Mirror Reflections of Three–Dimensional Space // Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki. 2023. T. 165, № 4. C. 389–403. DOI:10.26907/2541-7746.2023.4.389-403.
[42] Kovalev V. A., Radaev Y. N. Elements of field theory: variational symmetries and geometric invariants. Moscow: Fizmatlit, 2009. 156 p.
[43] Kovalev V. A., Radaev Y. N. Wave problems of field theory and thermomechanics. Saratov: Izd-vo Saratovskogo un-ta, 2010. 328 p.
[44] Finikov S. P. Cartan's method of external forms in differential geometry. Л., Moscow: OGIZ, 1948. 432 p.
[45] Cartan H. Differential calculus. Differential forms. Moscow: Mir, 1971. 392 p.
[46] Efimov N. V. Introduction to the Theory of External Forms. Moscow: Nauka, 1977. 88 p.
[47] Rozenfeld B. A. Multidimensional spaces. Moscow: Nauka, 1966. 648 p.
[48] Poincaré H. Sur les résidus des intégrales doubles // Acta math. 1887. Vol. 6. P. 321–380.
[49] Poincaré H. Analysis situs // J. Ecole Polytech. Vol. 1. P. 1–123.
[50] Gunter N. M. Course in calculus of variations. Moscow: Gostekhteoretizdat, 1941. 308 c.
[51] Gelfand I. M., Fomin S. V. Calculus of variations. Moscow: Fizmatgiz, 1961. 228 c.
[52] Murashkin E. V., Radayev Y. N. On the formulation of boundary conditions in problems of synthesis of woven 3D materials // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. IYa Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya. 2021. no. 1(47). p. 114–121. doi:10.37972/chgpu.2021.1.47.010.
[53] Radayev Y. N. Spatial problem of the mathematical theory of plasticity. Samara: Samarskiy universitet, 2006. 340 p.
[54] Jeffreys H. Cartesian Tensors. Cambridge: Cambridge University Press, 1931. 101 p.

The present study was financially supported by the Russian Science Foundation (project no. 23-21-00262 "Coupled thermomechanics of micropolar semi-isotropic media").