Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния.

DOI: 10.37972/chgpu.2024.59.1.013 *EDN: ZIYJHT*

Научная статья *УДК: 539.374*

В. А. Ковалев[1], Е. В. Мурашкин[2], Н. Э. Стадник[2]

О МУЛЬТИВЕСОВЫХ ФОРМУЛИРОВКАХ КРАЕВЫХ УСЛОВИЙ В ТЕОРИЯХ ПОВЕРХНОСТНОГО РОСТА

[1]*Московский городской университет управления Правительства Москвы им. Ю.М. Лужкова, Москва, Россия*

[2]*Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия*

Аннотация. В настоящей работе рассматривается способ построения мультивесовой теории поверхностного роста в терминах псевдотензоров. Предлагаемая к рассмотрению математическая теория существенным образом опирается на достижения современного псевдотензорного исчисления. Приводятся определения миультивесовых псевдотензорных элементов площади и объема. Выводится общая мультивесовая форма псевдотензорного соотношения на растущей поверхности, при учете дополнительного выделенного направления. Определяется необходимая система независимых мультивесовых псевдотензорных аргументов определяющей псевдотензорной функции на поверхности наращивания. Определяется полный мультивесовой набор совместных рациональных псевдоинвариантов псевдотензоров силовых и моментных напряжений. Дается псевдоинвариантно–полная формулировка определяющих соотношений на поверхности наращивания.

Ключевые слова: алгебраический вес, псевдотензор, наномасштаб, микромасштаб, микрополярность, псевдотензорный элемент объема, мультивесовая формулировка, определяющая псевдотензорная функция, поверхность наращивания, рациональный псевдоинвариант.

Ковалев Владимир Александрович, д-р физ.-мат. наук, проф., проф. кафедры финансового менеджмента и финансового права; `e-mail:` vlad_koval@mail.ru; https://orcid.org/0000-0003-2991-9531; AuthorID: 782898

Мурашкин Евгений Валерьевич, канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник лаб. моделирования в механике деформируемого твердого тела; `e-mail:` murashkin@ipmnet.ru; https://orcid.org/0000-0002-3267-4742; AuthorID: 129570

Стадник Никита Эдуардович, младший научный сотрудник лаб. моделирования в механике деформируемого твердого тела; `e-mail:` nik-122@mail.ru; https://orcid.org/0000-0002-0187-8048; AuthorID: 961836

для цитирования: *Ковалев В. А., Мурашкин Е. В., Стадник Н. Э.* О мультивесовых формулировках краевых условий в теориях поверхностного роста // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2024. № 1(59). С. 5–20. DOI: 10.37972/chgpu.2024.59.1.013 EDN: ZIYJHT

Поступила: 03.03.2024; принята в печать: 16.03.2024; опубликована: 05.07.2024.

Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost.

DOI: `10.37972/chgpu.2024.59.1.013` *EDN: ZIYJHT*
Research Article

V. A. Kovalev[1], E. V. Murashkin[2], N. E. Stadnik[2]

ON A MULTIWEIGHT FORMULATION OF BOUNDARY CONDITIONS FOR SURFACE GROWTH THEORIES

[1]*Moscow Metropolitan Governance Yury Luzhkov University, Moscow, Russia*

[2]*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow, Russia*

Abstract. In this paper, we consider a method for constructing a multiweight theory of surface growth in terms of pseudotensors. The mathematical theory proposed for consideration is substantially based on the achievements of modern pseudotensor calculus. Definitions of multiweight pseudotensor elements of area and volume are given. The general multiweight form of the pseudotensor relation on a growing surface is derived, taking into account the additional selected direction. The necessary system of independent multiweight pseudotensor arguments of the defining pseudotensor function on the growing surface is determined. A complete multiweight set of joint rational pseudoinvariants of force and couple stress pseudotensors is determined. A pseudoinvariant complete formulation of the constitutive relations on the growing surface is given.

Keywords: algebraic weight, pseudotensor, nanoscale, microscale, micropolarity, pseudotensor volume element, multiweight formulation, constitutive pseudotensor function, growing surface,rational pseudoinvariant.

Kovalev Vladimir Alexandrovich, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Moscow City University of Management, Moscow, Russia; `e-mail:` vlad_koval@mail.ru;
https://orcid.org/0000-0003-2991-9531; AuthorID: 782898

Evgenii V. Murashkin, Cand. Sci. Phys. & Math., MD, Senior Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences; `e-mail:` evmurashkin@gmail.ru;
https://orcid.org/0000-0002-3267-4742; AuthorID: 129570

Nikita E. Stadnik, MD, Minor Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences; `e-mail:` nik-122@mail.ru;
https://orcid.org/0000-0002-0187-8048; AuthorID: 961836

to cite this article: *Kovalev V. A., Murashkin E. V., Stadnik N. E.* On a multiweight formulation of boundary conditions for surface growth theories // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2024. No 1(59). p. 5–20. DOI: `10.37972/chgpu.2024.59.1.013`
EDN: ZIYJHT

Received: 03.03.2024; accepted: 16.03.2024; published: 05.07.2024.

Введение. Аддитивное производство материалов и конструкций сложной формы (ламинирование, фотополимеризация, стереолитография, экструзия, намотка, наплавка, замораживание, абляция, сегментация, фронтальное и послойное отверждение) требуют развития неклассических моделей механики деформируемого твердого тела [1]. Указанные технологические процессы являются синтезом изделий путем последовательного добавления материала на поверхность произвольной формы. При этом, механические характеристики, используемых материалов и итоговых изделий зачастую проявляют чувствительность к изменению ориентации внешнего пространства. Решение прикладных задач поверхностного наращивания твердого тела является сложной и трудоемкой процедурой [2–5]. Существенной особенностью постановки таких краевых задач в рамках механики роста является задание краевых условий на границе раздела между исходным материалом и добавляемой частью [4, 5]. Модели поверхностного наращивания [4, 5] могут быть обобщены на случай микрополярных тел в терминах псевдотензоров [6–9]. В настоящей работе обсуждается процедура получения мультивесовой пседотензорной формулировки краевых условий на поверхности наращивания. Основы алгебры и анализа псевдотензорных полей изложены в руководствах по тензорному исчислению [10–18].

1. Псевдотензорные элементы объема и площади в трехмерном пространстве. В настоящей статье будем использовать терминологию и понятия современной геометрии и тензорного анализа [13, 17, 19]. В дальнейшем изложении, где это не очевидно, сверху корневого символа псевдотензора в квадратных скобках будем отмечать его вес, а снизу в круглых скобках его ранг. Нулевой вес абсолютных тензоров и веса некоторых фундаментальных псевдотензоров в обозначениях отражаться не будут. Зададим функцию w.g.t равную весу псевдотензора, на который действует эта функция, т.е. для псевдотензора $\underset{(n)}{\overset{[\mathrm{g}]}{T}}{}^{h_1h_2\ldots h_s\cdot\ldots\cdot}_{\cdot\ldots\cdot k_1k_2\ldots k_r}$ алгебраического веса g ранга $n = s + r$ имеем

$$\mathrm{w.g.t}\,(\underset{(n)}{\overset{[\mathrm{g}]}{T}}{}^{h_1h_2\ldots h_s\cdot\ldots\cdot}_{\cdot\ldots\cdot k_1k_2\ldots k_r}) = \mathrm{g}.$$

Псевдотензор $\underset{(n)}{\overset{[\mathrm{g}]}{T}}{}^{h_1h_2\ldots h_s\cdot\ldots\cdot}_{\cdot\ldots\cdot k_1k_2\ldots k_r}$ алгебраического веса g ранга $n = s + r$ с помощью степеней псевдоскалярной единицы можно преобразовать к абсолютному тензору того же ранга согласно

$$\underset{(n)}{T}{}^{h_1h_2\ldots h_s\cdot\ldots\cdot}_{\cdot\ldots\cdot k_1k_2\ldots k_r} = \overset{[-\mathrm{g}]}{1}\,\underset{(n)}{\overset{[\mathrm{g}]}{T}}{}^{h_1h_2\ldots h_s\cdot\ldots\cdot}_{\cdot\ldots\cdot k_1k_2\ldots k_r}. \tag{1}$$

В последнем равенстве выполняется правило баланса весов (the weights balance rule) [20–22]. Действительно, имеем

$$\mathrm{w.g.t}\left(\underset{(n)}{T}{}^{h_1h_2\ldots h_s\cdot\ldots\cdot}_{\cdot\ldots\cdot k_1k_2\ldots k_r}\right) = \mathrm{w.g.t}\left(\overset{[-\mathrm{g}]}{1}\,\underset{(n)}{\overset{[\mathrm{g}]}{T}}{}^{h_1h_2\ldots h_s\cdot\ldots\cdot}_{\cdot\ldots\cdot k_1k_2\ldots k_r}\right) = -\mathrm{g} + \mathrm{g} = 0.$$

Псевдоскалярные единицы и фундаментальный ориентирующий псевдоскаляр определяются согласно следующим соотношениям [23]:

$$e = \underset{1}{\boldsymbol{\imath}} \cdot (\underset{2}{\boldsymbol{\imath}} \times \underset{3}{\boldsymbol{\imath}}), \qquad \overset{[+1]}{1} = e, \qquad \overset{[-1]}{1} = e^{-1}\,, \tag{2}$$

где $\underset{1}{\boldsymbol{\imath}}$, $\underset{2}{\boldsymbol{\imath}}$, $\underset{3}{\boldsymbol{\imath}}$ векторы ковариантного ортогонального базиса в трехмерном Евклидовом пространстве.

Целые степени псевдоскалярных единиц обладают свойством ковариантного постоянства, т. е.

$$\nabla_k \overset{[\pm \mathrm{g}]}{1} = \overset{[\pm \mathrm{g}]}{0}\,,$$

где ∇_k — оператор ковариантного дифференцирования в метрике g_{js}.

Символы перестановок Леви–Чивита являются фундаментальными псевдотензорами, непосредственно связанными с ориентацией трехмерного пространства, позволяющими разделить правые и левые тройки базисных векторов согласно правилу

$$\epsilon_{ijk} = \epsilon^{ijk} = \begin{cases} +1, & \text{для троек } i,j,k = 123, 231, 312; \\ -1, & \text{для троек } i,j,k = 132, 213, 321; \\ \ \ 0, & \text{во всех остальных случаях.} \end{cases} \tag{3}$$

Отметим, символы перестановок обладают аномальными свойствами, нарушающими общепринятые в псевдотензорной алгебре соглашения. Во-первых они являются одновременно ковариантным псевдотензором третьего ранга нечетного алгебраического веса -1 и контравариантным псевдотензором третьего ранга нечетного алгебраического веса $+1$. Последнее, в силу (3), может быть выражено соотношением

$$\overset{[-1]}{\epsilon}_{lsk} = \overset{[+1]}{\epsilon}{}^{lsk}.$$

Во-вторых, для символов перестановок необходимы специальные правила, по которым следует поднимать/опускать индексы:

$$\overset{[-1]}{\epsilon}_{ijk} = \overset{[-2]}{1} g_{il} g_{js} g_{kr} \overset{[+1]}{\epsilon}{}^{lsr}, \qquad \overset{[+1]}{\epsilon}{}^{ijk} = \overset{[+2]}{1} g^{il} g^{js} g^{kr} \overset{[-1]}{\epsilon}_{lsr}. \tag{4}$$

Символы перестановок позволяют ввести тензорные элементы объема наиболее простым и понятным способом, что соответствует подходу, предложенному Пуанкаре [24, 25], без привлечения теории внешних дифференциальных форм [26–29]. Заметим, что литературный поиск показывает ограниченное количество работ, обсуждающих указанное обстоятельство. Тензорный элемент объема в трехмерном пространстве можно принять в форме

$$d\tau^{mns} = \overset{[-1]}{d\tau}{}^{123} \overset{[+1]}{\epsilon}{}^{mns}, \tag{5}$$

где $\overset{[-1]}{d\tau}{}^{123}$ — естественный элемент объема,[1] представляющий собой псевдоскаляр веса -1, который определяется следующим образом

$$\overset{[-1]}{d\tau}{}^{123} = dx^1 dx^2 dx^3. \tag{6}$$

Опустив в формуле (5) индексы, т. е. применив правило жонглирования индексами для символов перестановок (4), определим ковариантный тензорный элемент объема в виде

$$d\tau_{mns} = \overset{[+2]}{1}\,\overset{[-1]}{d\tau}{}^{123}\overset{[-1]}{\epsilon}_{mns} = \overset{[+1]}{d\tau}_{123}\overset{[-1]}{\epsilon}_{mns}, \tag{7}$$

где $\overset{[+1]}{d\tau}_{123}$ — дублетный элемент объема [13], представляющий собой псевдоскаляр веса $+1$.

С помощью псевдоскаляров $\overset{[-1]}{d\tau}{}^{123}$, $\overset{[+1]}{d\tau}_{123}$ и псевдоскалярных единиц $\overset{[\mp 1]}{1}$ можно образовать абсолютный скаляр $d\tau$, являющийся инвариантным элементом объема

$$d\tau = \overset{[+1]}{1}\,\overset{[-1]}{d\tau}{}^{123} = \overset{[-1]}{1}\,\overset{[+1]}{d\tau}_{123}.$$

В дальнейшем изложении примем упрощенные обозначения для псевдоинвариантных элементов объема

$$\overset{[-1]}{d\tau} = \overset{[-1]}{d\tau}{}^{123}, \qquad \overset{[+1]}{d\tau} = \overset{[+1]}{d\tau}_{123}.$$

Аналогичным способом, с тем различием, что рассуждения (5) должны быть проведены для двумерной поверхности, задаются псевдоинвариантные элементы площади

$$\overset{[-1]}{A} = \overset{[-1]}{A}{}^{12}, \qquad \overset{[+1]}{A} = \overset{[+1]}{A}_{12}.$$

Введем в рассмотрение мультивесовые характеристики [32–34], принимающие дискретные значения в зависимости от используемого элемента объема, т.е.:

$$\boxtimes = \begin{cases} +1, & \text{для } \overset{[+1]}{d\tau}; \\ \ \ 0, & \text{для } d\tau; \\ -1, & \text{для } \overset{[-1]}{d\tau}; \end{cases} \qquad \boxtimes = \begin{cases} +1, & \text{для } \overset{[+1]}{dA}; \\ \ \ 0, & \text{для } dA; \\ -1, & \text{для } \overset{[-1]}{dA}. \end{cases} \tag{8}$$

$$\square = \begin{cases} -1, & \text{для } \overset{[+1]}{d\tau}; \\ \ \ 0, & \text{для } d\tau; \\ +1, & \text{для } \overset{[-1]}{d\tau}. \end{cases} \qquad \square = \begin{cases} -1, & \text{для } \overset{[+1]}{dA}; \\ \ \ 0, & \text{для } dA; \\ +1, & \text{для } \overset{[-1]}{dA}. \end{cases} \tag{9}$$

[1]Еще раз заметим, важное значение естественных элементов объема при формулировке вариационных функционалов физических теорий поля [30, 31].

$$\boxminus = \begin{cases} -2, & \text{для } \overset{[+1]}{d\tau}; \\ -1, & \text{для } d\tau; \\ 0, & \text{для } \overset{[-1]}{d\tau}, \end{cases} \qquad \boxminus = \begin{cases} -2, & \text{для } \overset{[+1]}{dA}; \\ -1, & \text{для } dA; \\ 0, & \text{для } \overset{[-1]}{dA}. \end{cases} \tag{10}$$

Анализирую определения (8)–(10), можно установить

$$\boxtimes = -\square = -\boxminus -1.$$

2. Мультивесовая формулировка краевых условий на поверхности наращивания. Ранее был предложен способ вывода краевых условий на поверхности наращивания [6–9], развивающий модели поверхностного роста, предложенные в работах академика Н.Х. Арутюняна [4] и профессора Г.И. Быковцева [5]. Определим распространяющуюся поверхность наращивания Σ в трехмерном евклидовом пространстве неявным уравнением

$$t = \underset{*}{\tau}(x^i). \tag{11}$$

Отметим, что, в самом общем случае, поверхность наращивания Σ может определяться псевдоскалярной функцией $\overset{[g]}{\underset{*}{\tau}}(x^i)$. В этом случае, как было показано в работах [], необходимо вести речь о псевдоскалярном времени $\overset{[g]}{t}$. Кроме того, нормаль к поверхности роста следует трактовать как псевдовектор алгебраического веса g. Указанный случай может быть сведен к случаю поверхности, задающейся абсолютным скалярным полем (11), с использвоанием преобразования (1).

В дальнейшем, без ограничения общности, будем рассматривать поверхности Σ, заданные согласно (11). На мультивесовой псевдоинвариантный элемент площади $\overset{\boxtimes}{A}$ такой поверхности с вектором единичной нормали n_i действуют псевдовекторы поверхностных сил $\overset{\square}{\mathbf{t}}$ и моментов $\overset{\boxminus}{\mathbf{m}}$, определяемые через псевдотензоры актуальных силовых $\overset{\square}{\boldsymbol{\sigma}}$ и моментных $\overset{\boxminus}{\boldsymbol{\mu}}$ напряжений в соответствии с мультивесовыми формулами

$$\overset{\square}{\mathbf{t}} = \mathbf{n} \cdot \overset{\square}{\boldsymbol{\sigma}}, \quad \overset{\boxminus}{\mathbf{m}} = \mathbf{n} \cdot \overset{\boxminus}{\boldsymbol{\mu}}. \tag{12}$$

Единичный вектор нормали n_i к поверхности наращивания Σ, заданной абсолютным скалярным полем (11) направленный в сторону ее распространения, как отмечалось выше, является абсолютным вектором выселяющимся по формуле

$$n_i = c\,\partial_i \underset{*}{\tau}, \quad c = |\boldsymbol{\nabla} \underset{*}{\tau}|^{-1} \quad (t = \underset{*}{\tau}), \tag{13}$$

где c — линейная скорость распространения поверхности наращивания Σ в нормальном направлении n_k.

Мультивесовая формулировка краевых условий на поверхности наращивания, подробный вывод тензорных и псевдотензорных формулировок которых можно найти в работах [6–9], записывается в виде:

$$c[\nabla_j \underset{*}{\overset{\square}{\sigma}}{}^{ji}(x^s) + \nabla_j \overset{\square}{\mathcal{S}}{}^{ji} + \underset{*}{\overset{\square}{X}}{}^{i}(x^s)] - n_j \partial.\overset{\square}{\sigma}{}^{ji}(x^s,t) = \overset{\square}{0} \quad (t = \underset{*}{\tau} + 0)\,; \tag{14}$$

$$c[\nabla_i \underset{*}{\overset{\boxminus}{\mu}}{}^{i\cdot}_{\cdot k}(x^s) + \nabla_i \overset{\boxminus}{\mathcal{M}}{}^{i\cdot}_{\cdot k} - 2\underset{*}{\overset{\boxminus}{\tau}}{}_k + \underset{*}{\overset{\boxminus}{Y}}{}_k] - n_i \partial.\overset{\boxminus}{\mu}{}^{i\cdot}_{\cdot k}(x^s,t) = \overset{\boxminus}{0} \quad (t = \underset{*}{\tau} + 0)\,; \tag{15}$$

$$\overset{\square}{\sigma}{}^{ij} = \int\limits_{\underset{*}{\tau}+0}^{t} [\partial.\overset{\square}{\sigma}{}^{ij}(x^s,t')]dt' + \overset{\square}{\mathcal{S}}{}^{ji} + \underset{*}{\overset{\square}{\sigma}}{}^{ij}(x^s)\,; \tag{16}$$

$$\overset{\boxminus}{\mu}{}^{i\cdot}_{\cdot k} = \int\limits_{\underset{*}{\tau}+0}^{t} [\partial.\overset{\boxminus}{\mu}{}^{i\cdot}_{\cdot k}(x^s,t')]dt' + \overset{\boxminus}{\mathcal{M}}{}^{i\cdot}_{\cdot k} + \underset{*}{\overset{\boxminus}{\mu}}{}^{i\cdot}_{\cdot k}(x^s)\,; \tag{17}$$

$$\overset{\square}{\mathcal{S}}{}^{ij} = \int\limits_{\underset{*}{\tau}-0}^{\underset{*}{\tau}+0} [\partial.\overset{\square}{\sigma}{}^{ij}(x^s,t')]dt'\,; \tag{18}$$

$$\overset{\boxminus}{\mathcal{M}}{}^{i\cdot}_{\cdot k} = \int\limits_{\underset{*}{\tau}-0}^{\underset{*}{\tau}+0} [\partial.\overset{\boxminus}{\mu}{}^{i\cdot}_{\cdot k}(x^s,t')]dt'\,. \tag{19}$$

В приведенных выше уравнениях (14)–(19) введены следующие обозначения: $\overset{\square}{\mathcal{S}}{}^{ji}$ — мультивесовой интеграл, связанный со скачком силовых напряжений; $\underset{*}{\overset{\square}{\sigma}}{}^{ij}(x^s) = \overset{\square}{\sigma}{}^{ij}(x^s,t)|_{t=\underset{*}{\tau}(x^s)-0}$ — компоненты тензора напряжений; соответственно, вычисленные в момент $t = \underset{*}{\tau}(x^s) - 0$ прямо перед включением элемента в основное твердое тело; $\underset{*}{\overset{\square}{X}}{}^{i}(x^s) = \overset{\square}{X}{}^{i}(x^s,t)\big|_{t=\underset{*}{\tau}(x^s)+0}$. Момент $t = \underset{*}{\tau}(x^s) + 0$ соответствует моменту сразу после прикрепления элемента к поверхности наращивания, $\overset{\boxminus}{\mathcal{M}}{}^{i\cdot}_{\cdot k}$ — интеграл, связанный со скачком моментных напряжений, $\underset{*}{\overset{\boxminus}{\mu}}{}^{i\cdot}_{\cdot k}(x^s) = \overset{\boxminus}{\mu}{}^{i\cdot}_{\cdot k}(x^s,t)|_{t=\underset{*}{\tau}(x^s)-0}$ компоненты тензора моментных напряжений, вычисленные во время $t = \underset{*}{\tau}(x^s) - 0$.

3. Мультивесовые псевдотензорные функции, связывающие актуальные силовые и моментные напряжения с силовыми и моментными напряжениями в наращиваемом элементе. В процессах аддитивного производства можно выделить характерные направления на поверхности наращивания $\overset{1}{\boldsymbol{\jmath}}$, $\overset{2}{\boldsymbol{\jmath}}$. Рассмотрим случай, когда векторы $\overset{1}{\boldsymbol{\jmath}}$ и $\overset{2}{\boldsymbol{\jmath}}$ ортогональны. Процесс наращивания и способы определения необходимых параметров такого процесса можно представить в виде схема (см. рис. 1). В этом случае мультивесовые

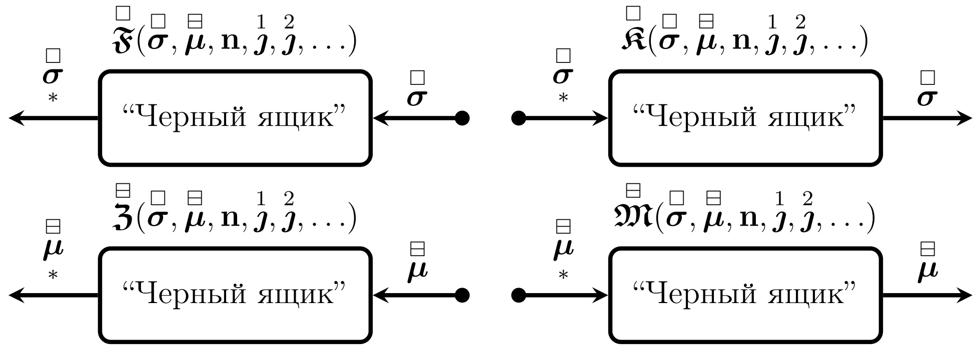

Рис. 1. Идея физического принципа “Черного ящика” в механике наращиваемых тел.

псевдотензорные функции связи силовых $\overset{\square}{\underset{*}{\sigma}}{}^{ij}$ и моментных напряжений $\overset{\boxminus}{\underset{*}{\mu}}{}^{i\cdot}_{\cdot k}$ с актуальными напряжения и моментами на поверхности наращивания можно принять в форме

$$\overset{\square}{\underset{*}{\sigma}}{}^{ij} = \overset{\square}{\mathfrak{F}}{}^{ij}(\overset{\square}{\sigma}{}^{ij}, \overset{\boxminus}{\mu}{}^{i\cdot}_{\cdot j}, n_j, \overset{1}{\jmath}_j, \overset{2}{\jmath}_j, \ldots), \quad \overset{\boxminus}{\underset{*}{\mu}}{}^{i\cdot}_{\cdot j} = \overset{\boxminus}{\mathfrak{Z}}{}^{i\cdot}_{\cdot j}(\overset{\square}{\sigma}{}^{ij}, \overset{\boxminus}{\mu}{}^{i\cdot}_{\cdot j}, n_j, \overset{1}{\jmath}_j, \overset{2}{\jmath}_j, \ldots), \tag{20}$$

и, если возможно обратно, тогда справедливы соотношения

$$\overset{\square}{\sigma}{}^{ij} = \overset{\square}{\mathfrak{K}}{}^{ij}(\overset{\square}{\underset{*}{\sigma}}{}^{ij}, \overset{\boxminus}{\underset{*}{\mu}}{}^{i\cdot}_{\cdot j}, n_j, \overset{1}{\jmath}_j, \overset{2}{\jmath}_j, \ldots), \quad \overset{\boxminus}{\mu}{}^{i\cdot}_{\cdot j} = \overset{\boxminus}{\mathfrak{M}}{}^{i\cdot}_{\cdot j}(\overset{\square}{\underset{*}{\sigma}}{}^{ij}, \overset{\boxminus}{\underset{*}{\mu}}{}^{i\cdot}_{\cdot j}, n_j, \overset{1}{\jmath}_j, \overset{2}{\jmath}_j, \ldots), \tag{21}$$

В мультивесовых соотношениях (20) и (21) требуется экспериментальное определение неизвестных функций $\overset{\square}{\mathfrak{F}}_{ij}$, $\overset{\boxminus}{\mathfrak{Z}}{}^{i\cdot}_{\cdot k}$, $\overset{\square}{\mathfrak{K}}_{ij}$ и $\overset{\boxminus}{\mathfrak{M}}{}^{i\cdot}_{\cdot k}$. “Черный ящик” в схеме на рис. 1 определяет возможные изменения физико-механических параметров напряженно деформированного состояния материала во временном промежутке от момента создания наращиваемого элемента до момента его присоединения к основному телу, т.е. во временном интервале $\underset{*}{\tau} - 0 \leq t \leq \underset{*}{\tau} + 0$. “Черный ящик” может быть связан с различными физическими явлениями. В частности, мультивесовые псевдотензорные функции $\overset{\square}{\mathfrak{F}}_{ij}$, $\overset{\boxminus}{\mathfrak{Z}}{}^{i\cdot}_{\cdot k}$, $\overset{\square}{\mathfrak{K}}_{ij}$ и $\overset{\boxminus}{\mathfrak{M}}{}^{i\cdot}_{\cdot k}$ при аддитивном производстве 3D-материалов могут зависеть от подвижных выделенных направлений $\overset{1}{\boldsymbol{\jmath}}$, $\overset{2}{\boldsymbol{\jmath}}$ на распространяющейся поверхности наращивания. Физический смысл дополнительных направляющих директоров $\overset{1}{\boldsymbol{\jmath}}$, $\overset{2}{\boldsymbol{\jmath}}$ можно трактовать как: характерные направления укладки волокон в тканых композитных материалах; направления армирования более жесткими волокнами; направления наматывания нитей в бобину и т. д. Следует отметить, что при определении мультивесовых псевдотензорных функций $\overset{\square}{\mathfrak{F}}_{ij}$, $\overset{\boxminus}{\mathfrak{Z}}{}^{i\cdot}_{\cdot k}$, $\overset{\square}{\mathfrak{K}}_{ij}$ и $\overset{\boxminus}{\mathfrak{M}}{}^{i\cdot}_{\cdot k}$ следует учитывать инвариантность их аргументов к поворотам подвижной системы координат связанной с поверхностью наращивания вокруг единичного вектора нормали n_j к указанной поверхности. В таком случае система совместных псевдоинвариантов псевдотензоров $\overset{\square}{\boldsymbol{\sigma}}$, $\overset{\boxminus}{\boldsymbol{\mu}}$ и абсолютных векторов $\mathbf{n}$, $\overset{1}{\boldsymbol{\jmath}}$, $\overset{2}{\boldsymbol{\jmath}}$, удовлетворяющих условию ротационной инвариантности относительно вектора $\mathbf{n}$.

4. Способы построения систем совместных алгебраических относительных инвариантов тензора второго ранга и вектора. Как видно из обсуждения в предыдущем разделе, для дальнейшей конкретизации определяющих тензорных функций на поверхности наращивания необходимо определить систему совместных псевдоинвариантов псевдотензоров $\overset{\square}{\boldsymbol{\sigma}}$, $\overset{\boxminus}{\boldsymbol{\mu}}$ и абсолютных векторов $\mathbf{n}$, $\overset{1}{\boldsymbol{\jmath}}$, $\overset{2}{\boldsymbol{\jmath}}$. С помощью векторов $\mathbf{n}$, $\overset{1}{\boldsymbol{\jmath}}$, $\overset{2}{\boldsymbol{\jmath}}$ можно определить систему координат, возможно косоугольную.

Теория построения систем совместных рациональных псевдоинвариантов подробно рассмотрены в монографии проф. Г.Б. Гуревича [13]. Следуя методологии Г.Б. Гуревича, и, используя теорию Гамильтона–Кэли, обобщенную на случай псевдотензоров [–cayley]. В рассматриваемом случае систему рациональных алгебраических мультивесовых псевдоинвариантов псевдотензора силовых $\overset{\square}{\boldsymbol{\sigma}}$ и моментных $\overset{\square}{\boldsymbol{\mu}}$ напряжений и векторов $\mathbf{n}$, $\overset{1}{\boldsymbol{\jmath}}$, $\overset{2}{\boldsymbol{\jmath}}$ можно составить из всевозможных скалярных произведений линейно независимых векторов: $\mathbf{n}$, $\overset{1}{\boldsymbol{\jmath}}$, $\overset{2}{\boldsymbol{\jmath}}$, $\overset{\square}{\mathbf{t}}$, $\overset{\square}{\mathbf{t}}_{\perp}$, $\overset{\boxminus}{\mathbf{m}}$, $\overset{\boxminus}{\mathbf{m}}_{\perp}$, $\underset{2}{\overset{2\square}{\mathbf{t}}}$, $\underset{2}{\overset{2\square}{\mathbf{t}}}_{\perp}$, $\underset{2}{\overset{2\boxminus}{\mathbf{m}}}$, $\underset{2}{\overset{2\boxminus}{\mathbf{m}}}_{\perp}$. В дальнейшем будем использовать обозначения

$$
\begin{gathered}
\overset{\square}{\mathbf{t}}\cdot\mathbf{n}=\mathbf{n}\cdot\overset{\square}{\boldsymbol{\sigma}}\cdot\mathbf{n},\quad \underset{2}{\overset{\square}{\mathbf{t}}}\cdot\mathbf{n}=\mathbf{n}\cdot\overset{\square}{\boldsymbol{\sigma}}\cdot\overset{\square}{\boldsymbol{\sigma}}\cdot\mathbf{n},\quad \overset{\boxminus}{\mathbf{m}}\cdot\mathbf{n}=\mathbf{n}\cdot\overset{\boxminus}{\boldsymbol{\mu}}\cdot\mathbf{n},\quad \underset{2}{\overset{2\boxminus}{\mathbf{m}}}\cdot\mathbf{n}=\mathbf{n}\cdot\overset{\boxminus}{\boldsymbol{\mu}}\cdot\overset{\boxminus}{\boldsymbol{\mu}}\cdot\mathbf{n},\\
\overset{\square}{\mathbf{t}}\cdot\boldsymbol{\jmath}_s=\mathbf{n}\cdot\overset{\square}{\boldsymbol{\sigma}}\cdot\boldsymbol{\jmath}_s,\quad \overset{\boxminus}{\mathbf{m}}\cdot\boldsymbol{\jmath}_s=\mathbf{n}\cdot\overset{\square}{\boldsymbol{\mu}}\cdot\boldsymbol{\jmath}_s,\quad \underset{2}{\overset{2\square}{\mathbf{t}}}\cdot\boldsymbol{\jmath}_s=\mathbf{n}\cdot\overset{\square}{\boldsymbol{\sigma}}\cdot\overset{\square}{\boldsymbol{\sigma}}\cdot\boldsymbol{\jmath}_s,\quad \underset{2}{\overset{2\boxminus}{\mathbf{m}}}\cdot\boldsymbol{\jmath}_s=\mathbf{n}\cdot\overset{\boxminus}{\boldsymbol{\mu}}\cdot\overset{\boxminus}{\boldsymbol{\mu}}\cdot\boldsymbol{\jmath}_s \qquad (22)\\
(s=1,2).
\end{gathered}
$$

В мультипликаторе, представленном с помощью табл. 1, указана полная система искомых рациональных мультивесовых псевдоинвариантов. Однако, не все мультивесовые псевдоинварианты являются независимыми. Зависимые псевдоинварианты можно устранить из дальнейшего рассмотрения, найдя соответствующие сизигии связывающие зависимые псевдоинварианты. Так, например, очевидная сизигия $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}$ позволяет отбросить псевдоинвариантны расположенные ниже главной диагонали мультипликатора (см. табл. 1).

Кроме того, совместные алгебраические рациональные инварианты высоких порядков, включающие кубы и биквадраты псевдотензоров силовых и моментных напряжений также могут быть исключены при использовании алгебраической теории Гамильтона–Кэли [13, –cayley].

Таким образом, неприводимая полная система совместных алгебраических рациональных мультивесовых ротационных псевдоинвариантов может быть сведена к виду

$$
\overset{\square}{\mathbf{t}}\cdot\mathbf{n},\quad \overset{\square}{\mathbf{t}}\cdot\overset{\square}{\mathbf{t}},\quad \overset{\boxminus}{\mathbf{m}}\cdot\mathbf{n},\quad \overset{\boxminus}{\mathbf{m}}\cdot\overset{\boxminus}{\mathbf{m}},\quad \overset{\square}{\mathbf{t}}\cdot\overset{\boxminus}{\mathbf{m}},\quad \overset{\square}{\mathbf{t}}_1\cdot\overset{\boxminus}{\mathbf{m}}_1. \qquad (23)
$$

	$\mathbf{n}$	$\overset{1}{\boldsymbol{\jmath}}$	$\overset{2}{\boldsymbol{\jmath}}$	$\overset{\square}{\mathbf{t}}$	$\overset{\square}{\mathbf{t}}_{\perp}$	$\overset{\boxminus}{\mathbf{m}}$	$\overset{\boxminus}{\mathbf{m}}_{\perp}$	$\underset{2}{\overset{2\square}{\mathbf{t}}}$	$\underset{2}{\overset{2\square}{\mathbf{t}}}_{\perp}$	$\underset{2}{\overset{2\boxminus}{\mathbf{m}}}$	$\underset{2}{\overset{2\boxminus}{\mathbf{m}}}_{\perp}$
$\mathbf{n}$	1	0	0	$\overset{\square}{\mathbf{t}}\cdot\mathbf{n}$	0	$\overset{\boxminus}{\mathbf{m}}\cdot\mathbf{n}$	0	$\underset{2}{\overset{2\square}{\mathbf{t}}}\cdot\mathbf{n}$	0	$\underset{2}{\overset{2\boxminus}{\mathbf{m}}}\cdot\mathbf{n}$	0
$\overset{1}{\boldsymbol{\jmath}}$	0	1	0	$\overset{\square}{\mathbf{t}}\cdot\overset{1}{\boldsymbol{\jmath}}$	$\overset{\square}{\mathbf{t}}_{\perp}\cdot\overset{1}{\boldsymbol{\jmath}}$	$\overset{\boxminus}{\mathbf{m}}\cdot\overset{1}{\boldsymbol{\jmath}}$	$\overset{\boxminus}{\mathbf{m}}_{\perp}\cdot\overset{1}{\boldsymbol{\jmath}}$	$\underset{2}{\overset{2\square}{\mathbf{t}}}\cdot\overset{1}{\boldsymbol{\jmath}}$	$\underset{2}{\overset{2\square}{\mathbf{t}}}_{\perp}\cdot\overset{1}{\boldsymbol{\jmath}}$	$\underset{2}{\overset{2\boxminus}{\mathbf{m}}}\cdot\overset{1}{\boldsymbol{\jmath}}$	$\underset{2}{\overset{2\boxminus}{\mathbf{m}}}_{\perp}\cdot\overset{1}{\boldsymbol{\jmath}}$
$\overset{2}{\boldsymbol{\jmath}}$	0	0	1	$\overset{\square}{\mathbf{t}}\cdot\overset{2}{\boldsymbol{\jmath}}$	$\overset{\square}{\mathbf{t}}_{\perp}\cdot\overset{2}{\boldsymbol{\jmath}}$	$\overset{\boxminus}{\mathbf{m}}\cdot\overset{2}{\boldsymbol{\jmath}}$	$\overset{\boxminus}{\mathbf{m}}_{\perp}\cdot\overset{2}{\boldsymbol{\jmath}}$	$\underset{2}{\overset{2\square}{\mathbf{t}}}\cdot\overset{2}{\boldsymbol{\jmath}}$	$\underset{2}{\overset{2\square}{\mathbf{t}}}_{\perp}\cdot\overset{2}{\boldsymbol{\jmath}}$	$\underset{2}{\overset{2\boxminus}{\mathbf{m}}}\cdot\overset{2}{\boldsymbol{\jmath}}$	$\underset{2}{\overset{2\boxminus}{\mathbf{m}}}_{\perp}\cdot\overset{2}{\boldsymbol{\jmath}}$
$\overset{\square}{\mathbf{t}}$	$\overset{\square}{\mathbf{t}}\cdot\mathbf{n}$	$\overset{\square}{\mathbf{t}}\cdot\overset{2}{\boldsymbol{\jmath}}$	$\overset{\square}{\mathbf{t}}\cdot\overset{2}{\boldsymbol{\jmath}}$	$\overset{\square}{\mathbf{t}}\cdot\overset{\square}{\mathbf{t}}$	$\overset{\square}{\mathbf{t}}_{\perp}\cdot\overset{\square}{\mathbf{t}}$	$\overset{\boxminus}{\mathbf{m}}\cdot\overset{\square}{\mathbf{t}}$	$\overset{\boxminus}{\mathbf{m}}_{\perp}\cdot\overset{\square}{\mathbf{t}}$	$\underset{2}{\overset{2\square}{\mathbf{t}}}\cdot\overset{\square}{\mathbf{t}}$	$\underset{2}{\overset{2\square}{\mathbf{t}}}_{\perp}\cdot\overset{\square}{\mathbf{t}}$	$\underset{2}{\overset{2\boxminus}{\mathbf{m}}}\cdot\overset{\square}{\mathbf{t}}$	$\underset{2}{\overset{2\boxminus}{\mathbf{m}}}_{\perp}\cdot\overset{\square}{\mathbf{t}}$
$\overset{\square}{\mathbf{t}}_{\perp}$	0	$\overset{\square}{\mathbf{t}}_{\perp}\cdot\overset{2}{\boldsymbol{\jmath}}$	$\overset{\square}{\mathbf{t}}_{\perp}\cdot\overset{2}{\boldsymbol{\jmath}}$	$\overset{\square}{\mathbf{t}}_{\perp}\cdot\overset{\square}{\mathbf{t}}$	$\overset{\square}{\mathbf{t}}_{\perp}\cdot\overset{\square}{\mathbf{t}}_{\perp}$	$\overset{\boxminus}{\mathbf{m}}\cdot\overset{\square}{\mathbf{t}}_{\perp}$	$\overset{\boxminus}{\mathbf{m}}_{\perp}\cdot\overset{\square}{\mathbf{t}}_{\perp}$	$\underset{2}{\overset{2\square}{\mathbf{t}}}\cdot\overset{\square}{\mathbf{t}}_{\perp}$	$\underset{2}{\overset{2\square}{\mathbf{t}}}_{\perp}\cdot\overset{\square}{\mathbf{t}}_{\perp}$	$\underset{2}{\overset{2\boxminus}{\mathbf{m}}}\cdot\overset{\square}{\mathbf{t}}_{\perp}$	$\underset{2}{\overset{2\boxminus}{\mathbf{m}}}_{\perp}\cdot\overset{\square}{\mathbf{t}}_{\perp}$
$\overset{\boxminus}{\mathbf{m}}$	$\overset{\boxminus}{\mathbf{m}}\cdot\mathbf{n}$	$\overset{\boxminus}{\mathbf{m}}\cdot\overset{2}{\boldsymbol{\jmath}}$	$\overset{\boxminus}{\mathbf{m}}\cdot\overset{2}{\boldsymbol{\jmath}}$	$\overset{\square}{\mathbf{t}}\cdot\overset{\boxminus}{\mathbf{m}}$	$\overset{\square}{\mathbf{t}}_{\perp}\cdot\overset{\boxminus}{\mathbf{m}}$	$\overset{\boxminus}{\mathbf{m}}\cdot\overset{\boxminus}{\mathbf{m}}$	$\overset{\boxminus}{\mathbf{m}}_{\perp}\cdot\overset{\boxminus}{\mathbf{m}}$	$\underset{2}{\overset{2\square}{\mathbf{t}}}\cdot\overset{\boxminus}{\mathbf{m}}$	$\underset{2}{\overset{2\square}{\mathbf{t}}}_{\perp}\cdot\overset{\boxminus}{\mathbf{m}}$	$\underset{2}{\overset{2\boxminus}{\mathbf{m}}}\cdot\overset{\boxminus}{\mathbf{m}}$	$\underset{2}{\overset{2\boxminus}{\mathbf{m}}}_{\perp}\cdot\overset{\boxminus}{\mathbf{m}}$
$\overset{\boxminus}{\mathbf{m}}_{\perp}$	0	$\overset{\boxminus}{\mathbf{m}}_{\perp}\cdot\overset{2}{\boldsymbol{\jmath}}$	$\overset{\boxminus}{\mathbf{m}}_{\perp}\cdot\overset{2}{\boldsymbol{\jmath}}$	$\overset{\square}{\mathbf{t}}\cdot\overset{\boxminus}{\mathbf{m}}_{\perp}$	$\overset{\square}{\mathbf{t}}_{\perp}\cdot\overset{\boxminus}{\mathbf{m}}_{\perp}$	$\overset{\boxminus}{\mathbf{m}}\cdot\overset{\boxminus}{\mathbf{m}}_{\perp}$	$\overset{\boxminus}{\mathbf{m}}_{\perp}\cdot\overset{\boxminus}{\mathbf{m}}_{\perp}$	$\underset{2}{\overset{2\square}{\mathbf{t}}}\cdot\overset{\boxminus}{\mathbf{m}}_{\perp}$	$\underset{2}{\overset{2\square}{\mathbf{t}}}_{\perp}\cdot\overset{\boxminus}{\mathbf{m}}_{\perp}$	$\underset{2}{\overset{2\boxminus}{\mathbf{m}}}\cdot\overset{\boxminus}{\mathbf{m}}$	$\underset{2}{\overset{2\boxminus}{\mathbf{m}}}_{\perp}\cdot\overset{\boxminus}{\mathbf{m}}_{\perp}$
$\underset{2}{\overset{2\square}{\mathbf{t}}}$	$\underset{2}{\overset{2\square}{\mathbf{t}}}\cdot\mathbf{n}$	$\underset{2}{\overset{2\square}{\mathbf{t}}}\cdot\overset{2}{\boldsymbol{\jmath}}$	$\underset{2}{\overset{2\square}{\mathbf{t}}}\cdot\overset{2}{\boldsymbol{\jmath}}$	$\underset{2}{\overset{2\square}{\mathbf{t}}}\cdot\overset{\square}{\mathbf{t}}$	$\overset{\square}{\mathbf{t}}_{\perp}\cdot\underset{2}{\overset{2\square}{\mathbf{t}}}$	$\overset{\boxminus}{\mathbf{m}}\cdot\underset{2}{\overset{2\square}{\mathbf{t}}}$	$\overset{\boxminus}{\mathbf{m}}_{\perp}\cdot\underset{2}{\overset{2\square}{\mathbf{t}}}$	$\underset{2}{\overset{2\square}{\mathbf{t}}}\cdot\underset{2}{\overset{2\square}{\mathbf{t}}}$	$\underset{2}{\overset{2\square}{\mathbf{t}}}_{\perp}\cdot\underset{2}{\overset{2\square}{\mathbf{t}}}$	$\underset{2}{\overset{2\boxminus}{\mathbf{m}}}\cdot\underset{2}{\overset{2\square}{\mathbf{t}}}$	$\underset{2}{\overset{2\boxminus}{\mathbf{m}}}_{\perp}\cdot\underset{2}{\overset{2\square}{\mathbf{t}}}$
$\underset{2}{\overset{2\square}{\mathbf{t}}}_{\perp}$	0	$\underset{2}{\overset{2\square}{\mathbf{t}}}_{\perp}\cdot\overset{2}{\boldsymbol{\jmath}}$	$\underset{2}{\overset{2\square}{\mathbf{t}}}_{\perp}\cdot\overset{2}{\boldsymbol{\jmath}}$	$\underset{2}{\overset{2\square}{\mathbf{t}}}\cdot\overset{\square}{\mathbf{t}}_{\perp}$	$\overset{\square}{\mathbf{t}}_{\perp}\cdot\underset{2}{\overset{2\square}{\mathbf{t}}}_{\perp}$	$\overset{\boxminus}{\mathbf{m}}\cdot\underset{2}{\overset{2\square}{\mathbf{t}}}_{\perp}$	$\overset{\boxminus}{\mathbf{m}}_{\perp}\cdot\underset{2}{\overset{2\square}{\mathbf{t}}}_{\perp}$	$\underset{2}{\overset{2\square}{\mathbf{t}}}\cdot\underset{2}{\overset{2\square}{\mathbf{t}}}_{\perp}$	$\underset{2}{\overset{2\square}{\mathbf{t}}}_{\perp}\cdot\underset{2}{\overset{2\square}{\mathbf{t}}}_{\perp}$	$\underset{2}{\overset{2\boxminus}{\mathbf{m}}}\cdot\underset{2}{\overset{2\square}{\mathbf{t}}}_{\perp}$	$\underset{2}{\overset{2\boxminus}{\mathbf{m}}}_{\perp}\cdot\underset{2}{\overset{2\square}{\mathbf{t}}}_{\perp}$
$\underset{2}{\overset{2\boxminus}{\mathbf{m}}}$	$\underset{2}{\overset{2\boxminus}{\mathbf{m}}}\cdot\mathbf{n}$	$\underset{2}{\overset{2\boxminus}{\mathbf{m}}}\cdot\overset{2}{\boldsymbol{\jmath}}$	$\underset{2}{\overset{2\boxminus}{\mathbf{m}}}\cdot\overset{2}{\boldsymbol{\jmath}}$	$\overset{\square}{\mathbf{t}}\cdot\underset{2}{\overset{2\boxminus}{\mathbf{m}}}$	$\overset{\square}{\mathbf{t}}_{\perp}\cdot\underset{2}{\overset{2\boxminus}{\mathbf{m}}}$	$\overset{\boxminus}{\mathbf{m}}\cdot\underset{2}{\overset{2\boxminus}{\mathbf{m}}}$	$\overset{\boxminus}{\mathbf{m}}_{\perp}\cdot\underset{2}{\overset{2\boxminus}{\mathbf{m}}}$	$\underset{2}{\overset{2\square}{\mathbf{t}}}\cdot\underset{2}{\overset{2\boxminus}{\mathbf{m}}}$	$\underset{2}{\overset{2\square}{\mathbf{t}}}_{\perp}\cdot\underset{2}{\overset{2\boxminus}{\mathbf{m}}}$	$\underset{2}{\overset{2\boxminus}{\mathbf{m}}}\cdot\underset{2}{\overset{2\boxminus}{\mathbf{m}}}$	$\underset{2}{\overset{2\boxminus}{\mathbf{m}}}_{\perp}\cdot\underset{2}{\overset{2\boxminus}{\mathbf{m}}}$
$\underset{2}{\overset{2\boxminus}{\mathbf{m}}}_{\perp}$	0	$\underset{2}{\overset{2\boxminus}{\mathbf{m}}}_{\perp}\cdot\overset{2}{\boldsymbol{\jmath}}$	$\underset{2}{\overset{2\boxminus}{\mathbf{m}}}_{\perp}\cdot\overset{2}{\boldsymbol{\jmath}}$	$\overset{\square}{\mathbf{t}}\cdot\underset{2}{\overset{2\boxminus}{\mathbf{m}}}_{\perp}$	$\overset{\square}{\mathbf{t}}_{\perp}\cdot\underset{2}{\overset{2\boxminus}{\mathbf{m}}}_{\perp}$	$\overset{\boxminus}{\mathbf{m}}\cdot\underset{2}{\overset{2\boxminus}{\mathbf{m}}}_{\perp}$	$\overset{\boxminus}{\mathbf{m}}_{\perp}\cdot\underset{2}{\overset{2\boxminus}{\mathbf{m}}}_{\perp}$	$\underset{2}{\overset{2\square}{\mathbf{t}}}\cdot\underset{2}{\overset{2\boxminus}{\mathbf{m}}}_{\perp}$	$\underset{2}{\overset{2\square}{\mathbf{t}}}_{\perp}\cdot\underset{2}{\overset{2\boxminus}{\mathbf{m}}}_{\perp}$	$\underset{2}{\overset{2\boxminus}{\mathbf{m}}}\cdot\underset{2}{\overset{2\boxminus}{\mathbf{m}}}_{\perp}$	$\underset{2}{\overset{2\boxminus}{\mathbf{m}}}_{\perp}\cdot\underset{2}{\overset{2\boxminus}{\mathbf{m}}}_{\perp}$

Таблица 1. Мультипликатор мультивесовых псевдоинвариантов.

5. Определяющие мультивесовые псевдотензорные функции в специфической ортогональной системе координат. В случае, когда в качестве базисных векторов выбраны $\mathbf{n}$, $\overset{1}{\boldsymbol{\jmath}}$, $\overset{2}{\boldsymbol{\jmath}}$ определяющие мультивесовые псевдотензорные функции (20) на поверхности наращивания в терминах полной системы совместных инвариантов (23) для сужения на двумерный плоский касательный элемент T тензора $\overset{*}{\boldsymbol{\tau}}$, примут вид

$$\underset{*}{\overset{\square}{\sigma}}{}^{ij} = \overset{\square}{\mathfrak{F}}{}^{ij}(\overset{\square}{\mathbf{t}}\cdot\mathbf{n}, \overset{\square}{\mathbf{t}}\cdot\overset{\square}{\mathbf{t}}, \overset{\boxminus}{\mathbf{m}}\cdot\mathbf{n}, \overset{\boxminus}{\mathbf{m}}\cdot\overset{\boxminus}{\mathbf{m}}, \overset{\square}{\mathbf{t}}\cdot\overset{\boxminus}{\mathbf{m}}, \overset{\square}{\mathbf{t}}_1\cdot\overset{\boxminus}{\mathbf{m}}_1). \tag{24}$$

$$\underset{*}{\overset{\boxminus}{\mu}}{}^{i\cdot}_{\cdot j} = \overset{\boxminus}{\mathfrak{Z}}{}^{i\cdot}_{\cdot j}(\overset{\square}{\mathbf{t}}\cdot\mathbf{n}, \overset{\square}{\mathbf{t}}\cdot\overset{\square}{\mathbf{t}}, \overset{\boxminus}{\mathbf{m}}\cdot\mathbf{n}, \overset{\boxminus}{\mathbf{m}}\cdot\overset{\boxminus}{\mathbf{m}}, \overset{\square}{\mathbf{t}}\cdot\overset{\boxminus}{\mathbf{m}}, \overset{\square}{\mathbf{t}}_1\cdot\overset{\boxminus}{\mathbf{m}}_1). \tag{25}$$

Для проекций псевдовекторов $\overset{\square}{\mathbf{t}}_\perp$ и $\overset{\boxminus}{\mathbf{m}}_\perp$ в касательной плоскости T к поверхности наращивания следует

$$\begin{aligned}
|\overset{\square}{\mathbf{t}}_\perp|^2 &= |\overset{\square}{\mathbf{t}}_1\cdot\boldsymbol{\jmath}_1|^2 + |\overset{\square}{\mathbf{t}}_2\cdot\boldsymbol{\jmath}_2|^2,\\
|\overset{\boxminus}{\mathbf{m}}_\perp|^2 &= |\overset{\boxminus}{\mathbf{m}}_1\cdot\boldsymbol{\jmath}_1|^2 + |\overset{\boxminus}{\mathbf{m}}_1\cdot\boldsymbol{\jmath}_2|^2.
\end{aligned} \tag{26}$$

Квадраты совместных инвариантов и длины векторов (23) и длины проекций (26) легко вычисляются через актуальные значения $\overset{\square}{\mathbf{t}}$ и $\overset{\boxminus}{\mathbf{m}}$ на поверхности наращивания, т.е. через актуальные компоненты силовых и моментных напряжений, согласно формулам

$$\begin{aligned}
&|\overset{\square}{\mathbf{t}}\cdot\mathbf{n}| = |\overset{\square}{\sigma}_{33}|, \quad |\overset{\square}{\mathbf{t}}_\perp\cdot\boldsymbol{\jmath}_1|^2 = \overset{\square}{\sigma}{}^2_{31}, \quad |\overset{\square}{\mathbf{t}}_\perp\cdot\boldsymbol{\jmath}_2|^2 = \overset{\square}{\sigma}{}^2_{32},\\
&|\overset{\boxminus}{\mathbf{m}}\cdot\mathbf{n}| = |\overset{\boxminus}{\mu}_{33}|, \quad |\overset{\boxminus}{\mathbf{m}}_\perp\cdot\boldsymbol{\jmath}_1|^2 = \overset{\boxminus}{\mu}{}^2_{31}, \quad |\overset{\boxminus}{\mathbf{m}}_\perp\cdot\boldsymbol{\jmath}_2|^2 = \overset{\boxminus}{\mu}{}^2_{32},\\
&|\overset{\square}{\mathbf{t}}\cdot\overset{\square}{\mathbf{t}}| = |\overset{\square}{\sigma}_{3s}\overset{\square}{\sigma}_{s3}| = |\overset{\square}{\sigma}_{31}\overset{\square}{\sigma}_{13} + \overset{\square}{\sigma}_{32}\overset{\square}{\sigma}_{23} + \overset{\square}{\sigma}{}^2_{33}|,\\
&|\overset{\boxminus}{\mathbf{m}}\cdot\overset{\boxminus}{\mathbf{m}}| = |\overset{\boxminus}{\mu}_{3s}\overset{\boxminus}{\mu}_{s3}| = |\overset{\boxminus}{\mu}_{31}\overset{\boxminus}{\mu}_{13} + \overset{\boxminus}{\mu}_{32}\overset{\boxminus}{\mu}_{23} + \overset{\boxminus}{\mu}{}^2_{33}|.
\end{aligned} \tag{27}$$

Определяющие тензорные функции (24) и (25) на поверхности наращивания с учетом выражений (27) и приняв следующие обозначения для инвариантов,

$$\begin{aligned}
&\overset{\square}{I} = |\overset{\square}{\sigma}_{33}|, \quad \overset{2\square}{II} = \overset{\square}{\sigma}{}^2_{31} + \overset{\square}{\sigma}{}^2_{32}, \quad \overset{2\square}{III} = |\overset{\square}{\sigma}_{31}\overset{\square}{\sigma}_{13} + \overset{\square}{\sigma}_{32}\overset{\square}{\sigma}_{23} + \overset{\square}{\sigma}{}^2_{33}|,\\
&\overset{\boxminus}{IV} = |\overset{\boxminus}{\mu}_{33}|, \quad \overset{2\boxminus}{V} = \overset{\boxminus}{\mu}{}^2_{31} + \overset{\boxminus}{\mu}{}^2_{32}, \quad \overset{2\boxminus}{VI} = |\overset{\boxminus}{\mu}_{31}\overset{\boxminus}{\mu}_{13} + \overset{\boxminus}{\mu}_{32}\overset{\boxminus}{\mu}_{23} + \overset{\boxminus}{\mu}{}^2_{33}|,\\
&\overset{\square+\boxminus}{VII} = |\overset{\square}{\sigma}_{33}\overset{\boxminus}{\mu}_{33}|.
\end{aligned} \tag{28}$$

можно выписать в форме

$$\underset{*}{\overset{\square}{\sigma}}{}^{ij} = \overset{\square}{\mathfrak{F}}{}^{ij}(\overset{\square}{I}, \overset{2\square}{II}, \overset{2\square}{III}, \overset{\boxminus}{IV}, \overset{2\boxminus}{V}, \overset{2\boxminus}{VI}, \overset{\square+\boxminus}{VII}). \tag{29}$$

$$\underset{*}{\overset{\boxminus}{\mu}}{}^{i\cdot}_{\cdot j} = \overset{\boxminus}{\mathfrak{Z}}{}^{i\cdot}_{\cdot j}(\overset{\square}{I}, \overset{2\square}{II}, \overset{2\square}{III}, \overset{\boxminus}{IV}, \overset{2\boxminus}{V}, \overset{2\boxminus}{VI}, \overset{\square+\boxminus}{VII}). \tag{30}$$

Граничные условия в форме дифференциальных ограничений на поверхности наращивания (14), (15) обладают необходимыми свойствами чувствительности к геометрии поверхности наращивания и характерным направлениям выкладки материала в процессах намотки нитей или производстве тканных композитов.

6. Заключение. В настоящей работе предложен способ построения мультивесовой теории поверхностного роста в терминах псевдотензоров. Предложенная к рассмотрению математическая теория существенным образом опирается на достижения современного псевдотензорного исчисления. Обсуждаются определения миультивесовых псевдотензорных элементов площади и объема. Выведена общая мультивесовая форма псевдотензорного соотношения на растущей поверхности, при учете дополнительного выделенного направления. Определена необходимая система независимых мультивесовых псевдотензорных аргументов определяющей псевдотензорной функции на поверхности наращивания. Определяется полный набор совместных рациональных псевдоинвариантов псевдотензоров силовых и моментных напряжений. Дана псевдоинвариантно–полная формулировка определяющих соотношений на поверхности наращивания в специфической системе координат.

ДОПОЛНИТЕЛЬНО

Вклад авторов. Все авторы подтверждают соответствие своего авторства международным критериям ICMJE (все авторы внесли существенный вклад в разработку концепции, проведение исследования и подготовку статьи, прочли и одобрили финальную версию перед публикацией).
Конфликт интересов. Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.
Источник финансирования. Работа выполнена по теме государственного задания (№ госрегистрации 124012500437-9).

ADDITIONAL INFORMATION

Authors' contribution. All authors confirm that their authorship meets the international ICMJE criteria (all authors have made a significant contribution to the development of the concept, research and preparation of the article, read and approved the final version before publication).
Competing interests. The authors declare that they have no competing interests.
Funding. This study was in part financially supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (State Registration Number 124012500437-9).

ЛИТЕРАТУРА

[1] B. Berman. 3-D printing: The new industrial revolution // Business Horizons. 2012. Vol. 55. P. 155–162. DOI: 10.1016/j.bushor.2011.11.003.
[2] V. Southwell R. An introduction to the theory of elasticity. For engineers and physicists. London : Oxford Univ. Press, 1936.
[3] Kovalev V. A. Radayev Yu. N. On a form of the first variation of the action integral over a varied domain // Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform. 2014. Vol. 14. P. 199–209. DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2014-14-2-199-209.

[4] Arutyunyan N. Kh. Naumov V. E. The boundary value problem of the theory of viscoelastic plasticity of a growing body subject to aging // J. Appl. Math. Mech. 1984. Vol. 48. P. 1–10. DOI: 10.1016/0021-8928(84)90099-6.

[5] Быковцев ГИ. Избранные проблемные вопросы механики деформируемых сред: сб. статей. Владивосток : Дальнаука, 2002. 153 p.

[6] Murashkin E. V. Radayev Yu. N. On a differential constraint in the continuum theory of growing solids // J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci. 2019. Vol. 23. P. 646–656. DOI: https://doi.org/10.14498/vsgtu1696.

[7] Murashkin E. V. Radayev Yu. N. Об одном классе определяющих уравнений на растущей поверхности // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2019. P. 11–29. DOI: 10.26293/chgpu.2019.40.2.012.

[8] Murashkin E. V. Radayev Yu. N. On a Differential Constraint in Asymmetric Theories of the Mechanics of Growing Solids // Mechanics of Solids. 2019. Vol. 54. P. 1157–1164. DOI: 10.3103/S0025654419080053.

[9] В. Мурашкин Е. О формулировках краевых условий в задачах синтеза тканых 3d материалов // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2021. P. 114–121. DOI: 10.37972/chgpu.2021.1.47.010.

[10] Veblen O., Thomas T. Y. Extensions of Relative Tensors // Trans. Am. Math. Society. 1924. Vol. 26. P. 373–377. URL: `https://www.jstor.org/stable/1989146`.

[11] O. Veblen. Invariants of quadratic differential forms. Cambridge : Cambridge University Press, 1927. 102 p.

[12] Levi-Civita T. The absolute differential calculus (calculus of tensors). London & Glasgow : Blackie & Son Limited, 1927. 450 p.

[13] Гуревич Г. Б. Основы теории алгебраических инвариантов. М., Л. : ГИТТЛ, 1948. 408 с. [Gurevich G. B. Foundations of the theory of algebraic invariants. Gröningen, P. Noordhoff, 1964. 429 p.].

[14] A. Einstein. General Relativity; an Einstein Centenary Survey. Cambridge : Cambridge University Press, 1979. 937 p.

[15] Schouten J. A. Tensor Analysis for Physicist. Oxford : Clarendon Press, 1965. 434 p. [Схоутен Я. А. Тензорный анализ для физиков. М.: Наука. 1965. 456 с.].

[16] Sokolnikoff I. Tensor Analysis: Theoryand Applications to Geometry and Mechanics of Continua. New York : John Wiley & Sons Inc, 1964. 361 p. [Сокольников И. С. Тензорный анализ. Теория и применения в геометрии и в механике сплошных сред. М.: Наука, 1971. 376 с.].

[17] Synge J. L., Schild A. Tensor calculus. Toronto : Toronto University Press, 1949. Vol. 5. 334 p.

[18] Das A. J. Tensors: the mathematics of relativity theory and continuum mechanics. Berlin, Heidelberg : Springer Science & Business Media, 2007. DOI: 10.1007/978-0-387-69469-6.

[19] Розенфельд Б. А. Многомерные пространства. М. : Наука, 1966. 648 с.

[20] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Алгебраический алгоритм систематического приведения одноточечных псевдотензоров к абсолютным тензорам // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. ИЯ Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2022. № 1(51). С. 17–26. DOI: 10.37972/chgpu.2022.51.1.002.

[21] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Ковариантно постоянные тензоры в пространствах Евклида. Элементы теории // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. ИЯ Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2022. № 2(52). С. 106–115. DOI: 10.37972/chgpu.2022.52.2.012.

[22] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Ковариантно постоянные тензоры в пространствах Евклида. Приложения к механике континуума // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. ИЯ Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2022. № 2(52). С. 118–127. DOI: 10.37972/chgpu.2022.52.2.013.
[23] Radayev Y. N. Tensors with Constant Components in the Constitutive Equations of a Hemitropic Micropolar Solids // Mechanics of Solids. 2023. Vol. 58, no. 5. P. 1517–1527. DOI: 10.3103/S0025654423700206.
[24] Poincaré H. Sur les residus des integrales doubles // Acta Math. 1887. no. 6. P. 321–380.
[25] Poincaré H. Analysis situs // J. Ecole Polytech. 1895. no. 1 (2). P. 1–123.
[26] Фиников Сергей Павлович. Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии. Л., М. : ОГИЗ, 1948. 432 с.
[27] Картан А. Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы. М. : Мир, 1971. 392 с.
[28] Ефимов Н. В. Введение в теорию внешних форм. М. : Наука, 1977. 88 с.
[29] Арнольд В. И. Математические методы классической механики. М. : Наука, 1979. 431 с.
[30] Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Элементы теории поля: вариационные симметрии и геометрические инварианты. М. : Физматлит, 2009. 156 с.
[31] Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Волновые задачи теории поля и термомеханика. Саратов : Изд-во Саратовского ун-та, 2010. 328 с.
[32] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Мультивесовая термомеханика гемитропных микрополярных тел // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия Механика предельного состояния. 2023. № 4 (58). С. 86–120. DOI: 10.37972/chgpu.2023.58.4.010.
[33] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. К поливариантности основных уравнений связанной термоупругости микрополярного тела // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия Механика предельного состояния. 2023. № 3 (57). С. 112–128. DOI: 10.37972/chgpu.2023.57.3.010.
[34] Murashkin E. V., Radayev Y. N. On Algebraic Triple Weights Formulation of Micropolar Thermoelasticity // Mechanics of Solids. 2024. Vol. 59, no. 1. P. 555–580. DOI: 10.1134/S0025654424700274.
[35] Murashkin E. V., Radayev Y. N. Generalization of the algebraic hamilton–cayley theory // Mechanics of Solids. 2021. Vol. 56, no. 6. P. 996–1003. DOI: 10.3103/s0025654421060145.

REFERENCES

[1] B. Berman. 3-D printing: The new industrial revolution // Business Horizons. 2012. Vol. 55. P. 155–162. DOI: 10.1016/j.bushor.2011.11.003.
[2] V. Southwell R. An introduction to the theory of elasticity. For engineers and physicists. London : Oxford Univ. Press, 1936.
[3] Kovalev V. A. Radayev Yu. N. On a form of the first variation of the action integral over a varied domain // Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform. 2014. Vol. 14. P. 199–209. DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2014-14-2-199-209.
[4] Arutyunyan N. Kh. Naumov V. E. The boundary value problem of the theory of viscoelastic plasticity of a growing body subject to aging // J. Appl. Math. Mech. 1984. Vol. 48. P. 1–10. DOI: 10.1016/0021-8928(84)90099-6.
[5] Быковцев ГИ. Избранные проблемные вопросы механики деформируемых сред: сб. статей. Владивосток : Дальнаука, 2002. 153 p.
[6] Murashkin E. V. Radayev Yu. N. On a differential constraint in the continuum theory of growing solids // J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci. 2019. Vol. 23. P. 646–656. DOI: https://doi.org/10.14498/vsgtu1696.

[7] Murashkin E. V., Radayev Yu. N. Об одном классе определяющих уравнений на растущей поверхности // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2019. P. 11–29. DOI: 10.26293/chgpu.2019.40.2.012.

[8] Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On a Differential Constraint in Asymmetric Theories of the Mechanics of Growing Solids // Mechanics of Solids. 2019. Vol. 54. P. 1157–1164. DOI: 10.3103/S0025654419080053.

[9] Мурашкин Е. В. О формулировках краевых условий в задачах синтеза тканых 3d материалов // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2021. P. 114–121. DOI: 10.37972/chgpu.2021.1.47.010.

[10] Veblen O., Thomas T. Y. Extensions of Relative Tensors // Trans. Am. Math. Society. 1924. Vol. 26. P. 373–377. URL: `https://www.jstor.org/stable/1989146`.

[11] Veblen O. Invariants of quadratic differential forms. Cambridge : The University Press, 1933. 102 p.

[12] Levi-Civita T. The absolute differential calculus (calculus of tensors). London & Glasgow : Blackie & Son Limited, 1927. 450 p.

[13] Гуревич Г. Б. Основы теории алгебраических инвариантов. М., Л. : ГИТТЛ, 1948. 408 с. [Gurevich G. B. Foundations of the theory of algebraic invariants. Gröningen, P. Noordhoff, 1964. 429 p.].

[14] Einstein A. General Relativity; an Einstein Centenary Survey. Cambridge : Cambridge University Press, 1979. 937 p.

[15] Schouten J. A. Tensor Analysis for Physicist. Oxford : Clarendon Press, 1965. 434 p. [Схоутен Я. А. Тензорный анализ для физиков. М.: Наука. 1965. 456 с.].

[16] Sokolnikoff I. Tensor Analysis: Theoryand Applications to Geometry and Mechanics of Continua. New York : John Wiley & Sons Inc, 1964. 361 p. [Сокольников И. С. Тензорный анализ. Теория и применения в геометрии и в механике сплошных сред. М.: Наука, 1971. 376 с.].

[17] Synge J. L., Schild A. Tensor calculus. Toronto : Toronto University Press, 1949. Vol. 5. 334 p.

[18] Das A. J. Tensors: the mathematics of relativity theory and continuum mechanics. Berlin, Heidelberg : Springer Science & Business Media, 2007. DOI: 10.1007/978-0-387-69469-6.

[19] Розенфельд Б. А. Многомерные пространства. М. : Наука, 1966. 648 с.

[20] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Алгебраический алгоритм систематического приведения одноточечных псевдотензоров к абсолютным тензорам // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. ИЯ Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2022. № 1(51). С. 17–26. DOI: 10.37972/chgpu.2022.51.1.002.

[21] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Ковариантно постоянные тензоры в пространствах Евклида. Элементы теории // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. ИЯ Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2022. № 2(52). С. 106–115. DOI: 10.37972/chgpu.2022.52.2.012.

[22] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Ковариантно постоянные тензоры в пространствах Евклида. Приложения к механике континуума // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. ИЯ Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2022. № 2(52). С. 118–127. DOI: 10.37972/chgpu.2022.52.2.013.

[23] Radayev Y. N. Tensors with Constant Components in the Constitutive Equations of a Hemitropic Micropolar Solids // Mechanics of Solids. 2023. Vol. 58, no. 5. P. 1517–1527. DOI: 10.3103/S0025654423700206.

[24] Poincaré H. Sur les residus des integrales doubles // Acta Math. 1887. no. 6. P. 321–380.

[25] Poincaré H. Analysis situs // J. Ecole Polytech. 1895. no. 1 (2). P. 1–123.

[26] Фиников Сергей Павлович. Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии. Л., М. : ОГИЗ, 1948. 432 с.
[27] Картан А. Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы. М. : Мир, 1971. 392 с.
[28] Ефимов Н. В. Введение в теорию внешних форм. М. : Наука, 1977. 88 с.
[29] Арнольд В. И. Математические методы классической механики. М. : Наука, 1979. 431 с.
[30] Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Элементы теории поля: вариационные симметрии и геометрические инварианты. М. : Физматлит, 2009. 156 с.
[31] Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Волновые задачи теории поля и термомеханика. Саратов : Изд-во Саратовского ун-та, 2010. 328 с.
[32] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Мультивесовая термомеханика гемитропных микрополярных тел // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия Механика предельного состояния. 2023. № 4 (58). С. 86–120. DOI: 10.37972/chgpu.2023.58.4.010.
[33] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. К поливариантности основных уравнений связанной термоупругости микрополярного тела // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия Механика предельного состояния. 2023. № 3 (57). С. 112–128. DOI: 10.37972/chgpu.2023.57.3.010.
[34] Murashkin E. V., Radayev Y. N. On Algebraic Triple Weights Formulation of Micropolar Thermoelasticity // Mechanics of Solids. 2024. Vol. 59, no. 1. P. 555–580. DOI: 10.1134/S0025654424700274.
[35] Murashkin E. V., Radayev Y. N. Generalization of the algebraic hamilton–cayley theory // Mechanics of Solids. 2021. Vol. 56, no. 6. P. 996–1003. DOI: 10.3103/s0025654421060145.