

М. А. Артемов, Е. С. Барановский, Р. Г. Меджидов, Д. И. Соломатин

О ПОЯВЛЕНИИ ПЛАСТИЧЕСКИХ ОБЛАСТЕЙ ВО ВРАЩАЮЩЕМСЯ ДИСКЕ

Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия

Аннотация. Проблема получения непрерывных полей пластических деформаций при решении задач плоского напряженного состояния, в отличие от плоского деформированного состояния, характерна для всех моделей идеального упругопластического тела, включающих кусочно-линейные функции пластичности. Однако в ряде западных научных статей считается, что только модель идеального упругопластического тела с условием пластичности Треска неправильно прогнозирует неупругие деформации. В настоящей работе определяются границы изменения внешних параметров нагрузки, для которых диск будет находиться в упругом состоянии. Напряжения связаны с упругими деформациями законом Гука. В зависимости от значений параметров нагрузки пластическая область может зарождаться на внутренней границе диска, или на внешней границе диска, или на обеих границах одновременно. Рассматриваются разные условия пластичности. Показан вид годографа вектора напряжений.

Ключевые слова: вращающийся диск, закон Гука, кусочно-линейные функции пластичности, идеально пластическое тело, эквивалентное напряжение, годограф вектора напряжений.

Артемов Михаил Анатольевич, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой программного обеспечения и администрирования информационных систем; e-mail: artemov_m_a@mail.ru; <https://orcid.org/0000-0001-8356-5418>; AuthorID: 8282

Барановский Евгений Сергеевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры программного обеспечения и администрирования информационных систем; e-mail: bares84@mail.ru

Меджидов Руслан Гусенович, преподаватель кафедры программного обеспечения и администрирования информационных систем; e-mail: ihatedamnmails@gmail.com

Соломатин Дмитрий Иванович, старший преподаватель кафедры программирования и информационных технологий; e-mail: solomatin.cs.vsu.ru@gmail.com; AuthorID: 537983

для цитирования: Артемов М. А., Барановский Е. С., Меджидов Р. Г., Соломатин Д. И. О появлении пластических областей во вращающемся диске // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2024. № 1(59). С. 21–38. DOI: 10.37972/chgpu.2024.59.1.005 EDN: FIIDHC

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0).

© Артемов М. А., Барановский Е. С., Меджидов Р. Г., Соломатин Д. И. 2024

Поступила: 10.01.2024; принята в печать: 01.02.2024; опубликована: 05.07.2024.

M. A. Artemov, E. S. Baranovsky, R. G. Medzhidov, D. I. Solomatin

ON THE APPEARANCE OF PLASTIC REGIONS IN A ROTATING DISK

Voronezh State University, Voronezh, Russia

Abstract. Problem obtaining continuous fields of plastic deformations when solving problems of a plane stress state, in contrast to a plane deformed state, is characteristic of all models of an ideal elastoplastic body that include piecewise linear plasticity functions. However, only the model of an ideal elastoplastic body with the Tresca plasticity condition in a number of Western scientific articles is considered to incorrectly predict inelastic deformations. In this work, the boundaries of changes in external load parameters are determined for which the disk will be in an elastic state. Stresses are related to elastic deformations by Hooke's law. Depending on the values of the load parameters, a plastic region can nucleate on the inner boundary of the disk, either on the outer border of the disk, or on both borders simultaneously. Various plasticity conditions are considered. The view of the stress hodograph vector is shown.

Keywords: rotating disk, Hooke's law, piecewise linear plasticity functions, ideally plastic body, equivalent stress, stress vector hodograph.

Mikhail A. Artemov, Head of Chair, Professor, e-mail: artemov_m_a@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0001-8356-5418>, AuthorID: 8282

Eugene S. Baranovsky, Associate Professor, e-mail: bares84@mail.ru

Ruslan G. Medzhidov, Lecturer, e-mail: ihatedamnmails@gmail.com

Dmitry I. Solomatin, Lecturer, e-mail: solomatin.cs.vsu.ru@gmail.com, AuthorID: 537983

to cite this article: *Artemov M. A. Baranovsky E. S. Medzhidov R. G. Solomatin D. I.* On the appearance of plastic regions in a rotating disk // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2024. No 1(59). p. 21–38. DOI: 10.37972/chgpu.2024.59.1.005 EDN: FIIDHC

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Принятые обозначения

$0\rho\theta z$ – цилиндрическая система координат;
 a – внутренний радиус диска;
 b – внешний радиус диска;
 E – модуль Юнга;
 ν – коэффициент Пуассона;
 k – предел пластичности при одноосное растяжение;
 $\sigma_\rho, \sigma_\theta, \sigma_z$ – компоненты тензора напряжений;
 σ_{eq} – эквивалентное напряжение;
 p_a – давление на границе $\rho = a$ диска;
 p_b – давление на границе $\rho = b$ диска;
 $m = \frac{\gamma\omega^2}{gk}$ – безразмерный параметр инерционного воздействия;
 ω – угловая скорость вращения диска;
 γ – объемный вес;
 g – ускорение свободного падения;
 u – радиальная координата вектора перемещений;
 u_a – радиальное перемещение границы $\rho = a$;
 u_b – радиальное перемещение границы $\rho = b$;
 J_2, J_3 – квадратичный и кубический основные инварианты девиатора напряжений.

Введение. В математической теории пластичности, в частности, рассматриваются вопросы, связанные с изучением и применением математических моделей, включающих кусочно-линейные функции пластичности [1–8]. Кусочно-линейные условия пластичности идеально-пластических тел основаны на функциях пластичности, которые являются линейными относительно главных компонент тензора напряжений. Кроме исторических аспектов теории пластичности, особый интерес к кусочно-линейным условиям пластичности связан с возможностью получения аналитических решений некоторых практически важных задач. Известно [1–7], что при выборе общего предела пластичности на одноосное растяжение все поверхности пластичности изотропных несжимаемых идеально-пластических тел будут расположены между поверхностью пластичности максимального касательного напряжения и поверхностью пластичности максимального приведенного напряжения.

В настоящей работе рассматриваются условия пластичности с кусочно-линейными функциями и условие пластичности максимальной интенсивности напряжений (условие Мизеса). Выбор этих условий пластичности обусловлен тем, что они наиболее часто выбираются при решении одномерных упруго-пластических задач [9–11, 15–18, 20]. Выбор нелинейных условий пластичности приводит к необходимости численного решения таких задач [14, 19].

1. Постановка задачи

Рассматривается вопрос о зарождении пластических зон в тонком вращающемся диске постоянной толщины в процессе изменения нагрузки. Нагрузка

является комбинированной, определяется условиями на границах диска и угловой скоростью вращения диска. Задаются граничные условия разных видов: в напряжениях, кинематические. Определяются границы зарождения пластических областей.

Для оценки напряженного состояния в точках диска вводится эквивалентное напряжение, значение которого зависит от значения параметров нагрузки, геометрических параметров и параметров материала. Определяются границы изменения значений параметров нагрузки, в которых диск будет оставаться в упругом состоянии. Рассматривается модель линейного упругого тела.

Выбирается цилиндрическая система координат, ось Oz которой перпендикулярна срединной поверхности диска.

2. Безразмерные величины

Все рассматриваемые величины приводятся к безразмерному виду, что делает проведение вычислительного эксперимента более универсальным и удобным для оценки значения величин. В качестве характерного масштаба напряжений принимается значение предела пластичности на одноосное растяжение. Соответственно, все величины, имеющие размерность напряжений отнесены к пределу пластичности. За масштаб длины выбирается значение внешнего радиуса диска. Для удобочитаемости формул все безразмерные и размерные величины имеют одинаковые обозначения.

3. Граничные условия

Практическая реализация выбираемых значений параметров нагрузки не рассматривается.

Варианты граничных условий, когда на границах кольцевого диска $\rho = a$, $\rho = b$ заданы:

давления (граничные условия в напряжениях – силовые граничные условия)

$$\sigma_\rho|_{\rho=a} = -p_a, \quad \sigma_\rho|_{\rho=b} = -p_b, \quad (1)$$

перемещения (кинематические граничные условия)

$$u_\rho|_{\rho=a} = u_a, \quad u_\rho|_{\rho=b} = u_b, \quad (2)$$

условия

$$u_\rho|_{\rho=a} = u_a, \quad \sigma_\rho|_{\rho=b} = -p_b, \quad (3)$$

$$\sigma_\rho|_{\rho=a} = -p_a, \quad u_\rho|_{\rho=b} = u_b. \quad (4)$$

4. Упругое состояние диска

Для вращающегося диска, находящегося в упругом состоянии, напряжения и перемещения определяются по известным формулам [12]:

$$\begin{aligned} \sigma_\rho &= A - \frac{B}{\rho^2} - \frac{3+\nu}{8} m \rho^2, \\ \sigma_\theta &= A + \frac{B}{\rho^2} - \frac{1+3\nu}{8} m \rho^2, \\ \sigma_z &= 0, \end{aligned} \quad (5)$$

$$Eu = (1 - \nu)A\rho + \frac{1 + \nu}{\rho}B - \frac{1 - \nu^2}{8}m\rho^3.$$

Кинематические граничные условия рассматривались, например, в [10, 11].
 Формулы для определения неизвестных величин A, B (функции внешних параметров и параметров материала) определяются из граничных условий.

Если заданы граничные условия (1), то

$$\begin{aligned} A &= \frac{3 + \nu}{8}m(a^2 + b^2) + \frac{a^2p_a - b^2p_b}{b^2 - a^2}, \\ B &= \left(\frac{3 + \nu}{8}m + \frac{p_a - p_b}{b^2 - a^2} \right) a^2b^2. \end{aligned} \quad (6)$$

После подстановки (6) в (5) можно получить, например, следующие формулы

$$\begin{aligned} \sigma_\rho &= \frac{3 + \nu}{8} \left(a^2 + b^2 - \rho^2 - \frac{a^2b^2}{\rho^2} \right) m + \frac{a^2p_a - b^2p_b}{b^2 - a^2} - \frac{a^2b^2(p_a - p_b)}{\rho^2(b^2 - a^2)}, \\ \sigma_\theta &= \frac{3 + \nu}{8} \left(a^2 + b^2 - \mu\rho^2 + \frac{a^2b^2}{\rho^2} \right) m + \frac{a^2p_a - b^2p_b}{b^2 - a^2} + \frac{a^2b^2(p_a - p_b)}{\rho^2(b^2 - a^2)}, \\ \mu &= \frac{1 + 3\nu}{3 + \nu}. \end{aligned} \quad (7)$$

Если заданы граничные условия (2), то

$$\begin{aligned} A &= \frac{Eu_b b - Eu_a a}{(1 - \nu)(b^2 - a^2)} + \frac{1 + \nu}{8}(a^2 + b^2)m, \\ B &= \frac{Eu_a b - Eu_b a}{(1 + \nu)(b^2 - a^2)} ab - \frac{1 - \nu}{8}a^2b^2m. \end{aligned} \quad (8)$$

После подстановки (8) в (5) получим

$$\begin{aligned} \sigma_\rho &= \frac{Eu_b b - Eu_a a}{(1 - \nu)(b^2 - a^2)} - \frac{Eu_a b - Eu_b a}{(1 + \nu)(b^2 - a^2)} \frac{ab}{\rho^2} \\ &\quad + \left((1 + \nu)(b^2 + a^2) - (3 + \nu)\rho^2 + \frac{1 - \nu}{\rho^2}a^2b^2 \right) \frac{m}{8}, \\ \sigma_\theta &= \frac{Eu_b b - Eu_a a}{(1 - \nu)(b^2 - a^2)} + \frac{Eu_a b - Eu_b a}{(1 + \nu)(b^2 - a^2)} \frac{ab}{\rho^2} \\ &\quad + \left((1 + \nu)(b^2 + a^2) - (1 + 3\nu)\rho^2 - \frac{1 - \nu}{\rho^2}a^2b^2 \right) \frac{m}{8}. \end{aligned} \quad (9)$$

Если заданы граничные условия (3), то

$$\begin{aligned} A &= \frac{1 + \nu}{8} \frac{(1 - \nu)a^4 + (3 + \nu)b^4}{(1 - \nu)a^2 + (1 + \nu)b^2} m + \frac{Eu_a a - (1 + \nu)p_b b^2}{(1 - \nu)a^2 + (1 + \nu)b^2}, \\ B &= \frac{1 - \nu}{8} \frac{(1 + \nu)a^2 - (3 + \nu)b^2}{(1 - \nu)a^2 + (1 + \nu)b^2} a^2b^2 m + \frac{Eu_a a + (1 - \nu)p_b a}{(1 - \nu)a^2 + (1 + \nu)b^2} ab^2. \end{aligned} \quad (10)$$

Если заданы граничные условия (4), то

$$\begin{aligned} A &= \frac{1 + \nu}{8} \frac{(1 - \nu)b^4 + (3 + \nu)a^4}{(1 - \nu)b^2 + (1 + \nu)a^2} m + \frac{Eu_b b - (1 + \nu)p_a a^2}{(1 - \nu)b^2 + (1 + \nu)a^2}, \\ B &= \frac{1 - \nu}{8} \frac{(1 + \nu)b^2 - (3 + \nu)a^2}{(1 - \nu)b^2 + (1 + \nu)a^2} a^2 b^2 m + \frac{Eu_b + (1 - \nu)p_a b}{(1 - \nu)b^2 + (1 + \nu)a^2} a^2 b. \end{aligned} \quad (11)$$

Если зафиксировать внутренние параметры, такие как модуль Юнга, коэффициент Пуассона, плотность материала (параметры материала) и внешние геометрические параметры, то при рассмотрении вопроса о зарождении пластических зон можно измерять внешние параметры, характеризующие нагрузку.

5. Эквивалентное напряжение

Для оценки напряженного состояния в точках упругой области вводится эквивалентное напряжение. Эквивалентное напряжение позволяет определять в каких точках происходит нагружение, разгрузка или нейтральное нагружение. Эквивалентное напряжение определяется по правилам, аналогичным правилам, устанавливаемым при задании функции пластичности [1–8, 13, 14]. Когда рассматривается модель упругопластического тела, то эквивалентное напряжение равно функции пластичности.

Рассмотрим два варианта определения эквивалентного напряжения:

$$\sigma_{eq}^{(1)} = \frac{1}{2} (|\sigma_\rho - \sigma_\theta| + |\sigma_\theta - \sigma_z| + |\sigma_z - \sigma_\rho|)$$

и

$$\sigma_{eq}^{(2)} = \left(\frac{(\sigma_\rho - \sigma_\theta)^2 + (\sigma_\theta - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_\rho)^2}{2} \right)^{1/2}.$$

На рис. 1 показаны графики эквивалентных напряжений, когда σ_ρ , σ_θ , σ_z определяются по формулам (7), а параметры $p_a = p_b = 1$, $m = 1.029$, $a = 0.2$, $b = 1$ и $\nu = 0.3$.

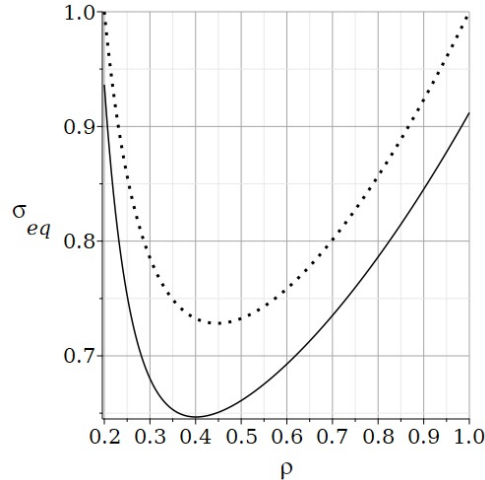


Рис. 1. Сплошная линия — $\sigma_{eq}^{(1)}$, пунктирная — $\sigma_{eq}^{(2)}$

6. Кусочно-линейные функции пластичности

Для режима

$$\alpha\sigma_\theta + \beta\sigma_\rho = k,$$

учитывая (5) и (7), находим, что при задании граничных условий (1) граница $\rho = a$ диска переходит в пластическое состояние, когда

$$m = 4 \frac{(b^2 - a^2)k + 2\alpha b^2 p_b - ((\alpha + \beta)a^2 + (\alpha - \beta)b^2)p_a}{\alpha(b^2 - a^2)((1 - \nu)a^2 + (3 + \nu)b^2)}. \quad (12)$$

Следует обратить внимание на то, что при $\alpha = 0$ эта формула неприменима.

Если рассматриваются граничные условия (2), то граница $\rho = a$ диска переходит в пластическое состояние, когда

$$m = \frac{4}{b^2 - a^2} \left(\frac{1}{1 - \nu^2} \left(\frac{Eu_a}{a} \left(\frac{a^2 + b^2}{b^2 - a^2} - \frac{\alpha + \nu\beta}{\nu\alpha + \beta} \right) - \frac{2bEu_b}{b^2 - a^2} \right) + \frac{k}{\nu\alpha + \beta} \right). \quad (13)$$

Если рассматриваются граничные условия (3), то из (5) и (10) следует, что граница $\rho = a$ диска переходит в пластическое состояние, когда

$$m = \frac{8p_b b^2}{(b^2 - a^2)((1 - \nu)a^2 + (3 + \nu)b^2)} + 4 \frac{((1 - \nu)a^2 + (1 + \nu)b^2)ak - ((\alpha + \beta)a^2 + (\alpha - \beta)b^2)Eu_a}{a(\alpha\nu + \beta)(b^2 - a^2)((1 - \nu)a^2 + (3 + \nu)b^2)}.$$

Если рассматриваются граничные условия (4), то из (5) и (11) следует, что граница $\rho = a$ диска переходит в пластическое состояние, когда

$$m = 4 \frac{((1 + \nu)a^2 + (1 - \nu)b^2)k + ((1 + \nu)(\alpha + \beta)a^2 + (1 - \nu)(\beta - \alpha)b^2)p_a - 2bEu_b\alpha}{\alpha(1 - \nu^2)(b^2 - a^2)^2}.$$

Приведенные формулы для вычисления значений параметра m применяются вместе с проверкой допустимых значений напряжений на границах диска.

7. Предельное состояние диска

Если давления, действующие на границы диска равны ($p_a = p_b = p$), и угловая скорость вращения диска равны нулю, то

$$A = -p, \quad B = 0$$

и для всех точек диска

$$\sigma_\rho = \sigma_\theta = -p.$$

В этом случае эквивалентное напряжение во всех точках диска будет принимать одно и тоже значение

$$\sigma_{eq} = \text{const.}$$

Для всех условий пластичности $F(J_2, |J_3|) = k$ изотропного идеального упруго-пластического тела с равными пределами пластичности на одноосное растяжение, когда на границах $\rho = a$, $\rho = b$ диска $\sigma_\rho|_{\rho=a} = \sigma_\rho|_{\rho=b} = \pm k$, весь диск будет находиться в предельном состоянии. Если действие нагрузки таково,

что не совершается работа, то деформированное состояние диска не изменяется. При попытке совершения работы нагрузкой, наступает неограниченный рост деформаций, существенно изменяющий конфигурацию диска. Аналогичная ситуация возникает при нагружении тонкой пластины внутренним давлением [13].

При увеличении угловой скорости вращения диска $m > 0$ происходит изменение напряженного состояния в его точках; напряжения будут вычисляться по формулам

$$\sigma_\rho = \frac{3 + \nu}{8} \left(a^2 + b^2 - \rho^2 - \frac{a^2 b^2}{\rho^2} \right) m - p,$$

$$\sigma_\theta = \frac{3 + \nu}{8} \left(a^2 + b^2 - \mu \rho^2 + \frac{a^2 b^2}{\rho^2} \right) m - p.$$

При $\sigma_\rho|_{\rho=a} = \sigma_\rho|_{\rho=b} = -k$ и выборе условия пластичности Треска в предельном состоянии будут находиться только точки контуров $\rho = a$, $\rho = b$, а область диска $a < \rho < b$ переходит в упругое состояние. При этом увеличение угловой скорости вращения диска в этой области приводит к разгрузке – ассоциированное эквивалентное напряжение уменьшается. Значение параметра m может изменяться в диапазоне

$$0 \leq m \leq m_{\max}.$$

Максимальное значение параметра m определяется из условия $\sigma_\theta|_{\rho=a} = 0$. Из формул (7) находим, когда $\sigma_\theta|_{\rho=a} = 0$, параметр

$$m = m_{\max} = \frac{4}{(1 - \nu)a^2 + (3 + \nu)a^2}.$$

На рис. 2 показан годограф вектора напряжений (функция радиальной координаты) на плоскости $\sigma_z = 0$ пространства главных напряжений, когда

$$p_a = p_b = k.$$

При выполнении расчетов всюду ниже выбирались следующие значения внешних геометрических параметров: $a = 0.2$, $b = 1$ и параметров материала (внутренних параметров): $\nu = 0.3$, $k = 1$.

8. Граничные условия в напряжениях. Условие пластичности Треска

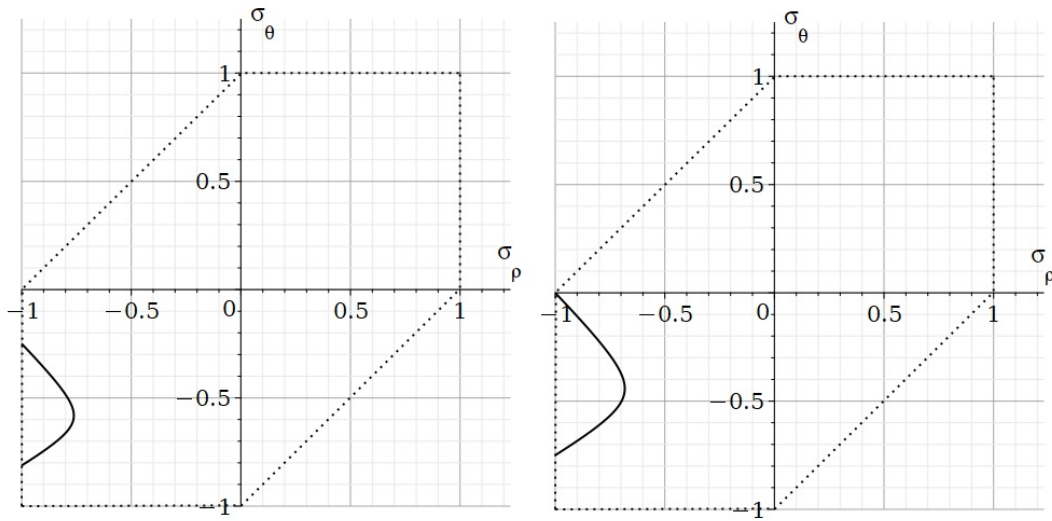
Рассмотрим случай, когда на границе $\rho = a$ выполняется режим $\alpha = 1$, $\beta = 0$. Из формулы (12) находим

$$m = 4 \frac{(b^2 - a^2)k - (b^2 + a^2)p_a + 2b^2 p_b}{(b^2 - a^2)((1 - \nu)a^2 + (3 + \nu)b^2)}.$$

Если $p_b = 0$ и $-k \leq p_a \leq 0$, то

$$m = m_{\min} = \frac{4k}{(1 - \nu)a^2 + (3 + \nu)b^2},$$

$$m = m_{\max} = \frac{8b^2 k}{(b^2 - a^2)(1 - \nu)a^2 + (3 + \nu)b^2}.$$

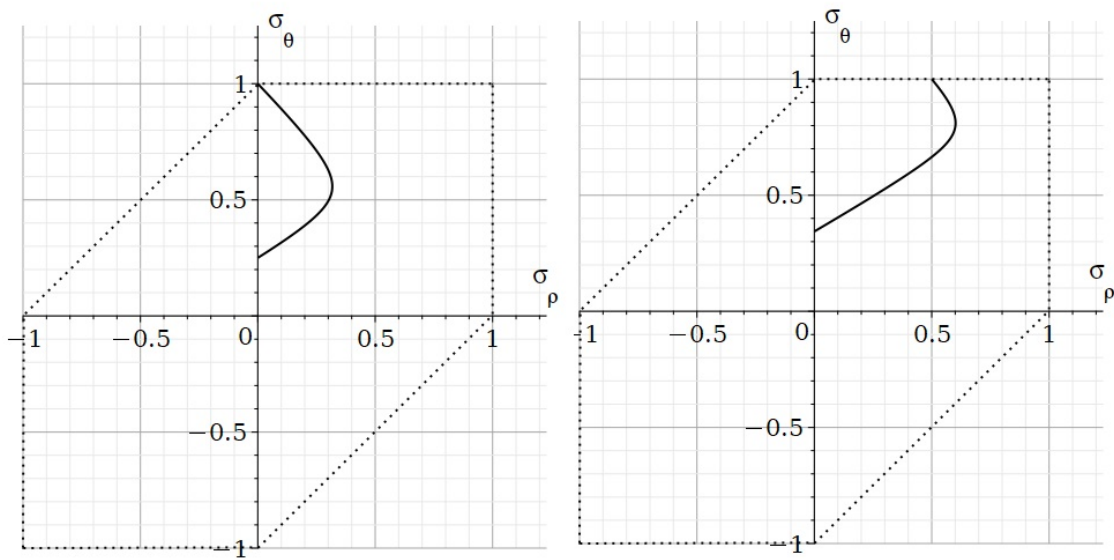


a) $m = 0.75m_{max}$

b) $m = m_{max}$

Рис. 2. Годограф вектора напряжений. Условие пластичности Треска

На рис. 3 показан годограф вектора напряжений в плоскости $\sigma_z = 0$ пространства главных напряжений для разных значений p_a .



a) $p_a = 0, m = 1.202$

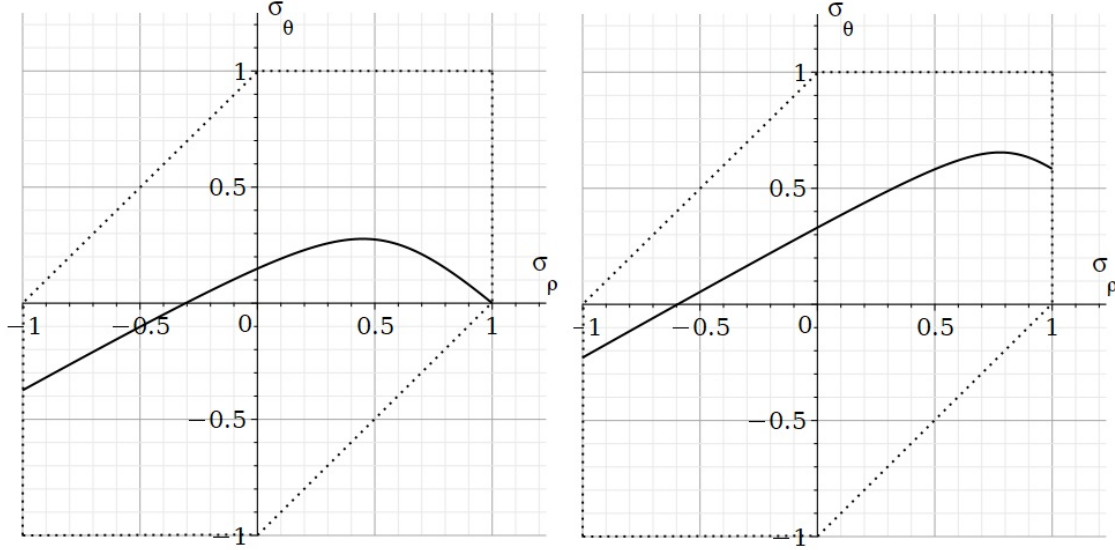
b) $p_a = -0.5k, m = 2.504$

Рис. 3. Годограф вектора напряжений. Условие пластичности Треска

В случае, когда $p_b = k, p_a = -k$, максимальное и минимальное значения параметра m определяются из условий $\sigma_\theta|_{\rho=a} = k$ и $\sigma_\theta|_{\rho=a} = 0$, соответственно:

$$m = m_{max} = \frac{16k}{b^2 - a^2} \frac{b^2}{((1 - \nu)a^2 + (3 + \nu)b^2)},$$

$$m = m_{min} = \frac{4k}{b^2 - a^2} \frac{3b^2 + a^2}{((1 - \nu)a^2 + (3 + \nu)b^2)}.$$

а) $m = m_{min}$ б) $m = 0.9m_{max}$ Рис. 4. Годограф вектора напряжений $p_b = -p_a = -k$

В случае, когда $p_b = k$, $0 < p_a < k$, значение параметра m определяем по формуле

$$m = \frac{4}{b^2 - a^2} \frac{(3b^2 - a^2)k - 2b^2p_a}{((1 - \nu)a^2 + (3 + \nu)a^2)}.$$

Если $p_b = k$, $-k < p_a < 0$, то значение параметра m определяем по формуле.

$$m = \frac{4}{b^2 - a^2} \frac{(b^2 + a^2)k - 2b^2p_a}{((1 - \nu)a^2 + (3 + \nu)a^2)}.$$

На рис. 5 показан годограф вектора напряжений в плоскости $\sigma_z = 0$ для разных значений параметров нагрузки.

Приведенные результаты показывают, что при выполнении на границах диска условия $|\sigma_\rho| = k$ и увеличении значения параметра нагрузки m вектор напряжений будет перемещаться по соответствующей стороне шестиугольника Треска.

9. Граничные условия в перемещениях. Условие пластичности Треска

Во всех точках диска, находящегося в упругом состоянии $|\sigma_\rho| \leq k$, $|\sigma_\theta| \leq k$, для построения годографа напряжений используем формулы (9). Используя формулу для перемещений $Eu = \rho(\sigma_\theta - \nu\sigma_\rho)$ и, задавая конкретные значения для напряжений на границах диска, определяем минимальное и максимальное значения параметра m .

Рассмотрим вариант, когда $\sigma_\rho|_{\rho=a} = k$, $\sigma_\rho|_{\rho=b} = 0$ и окружное напряжение

$$0 \leq \sigma_\theta \leq k.$$

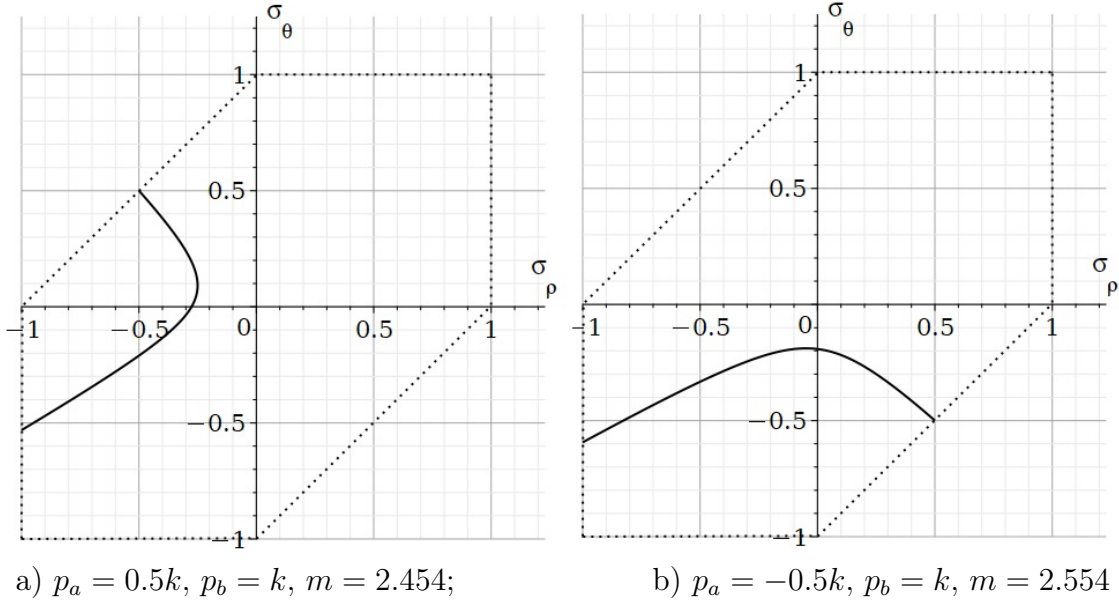


Рис. 5. Голограф вектора напряжений

В этом случае перемещения на границах диска

$$Eu_a = \frac{(3 + \nu)b^4 + (1 - \nu)a^4 - 2(1 + \nu)a^2b^2}{4(b^2 - a^2)}am - \frac{(1 - \nu)a^2 + (1 + \nu)b^2}{b^2 - a^2}ak, \quad (14)$$

$$Eu_b = \frac{2(1 + \nu)b^2a^2 + (1 - \nu)b^4 - (3 + \nu)a^4}{4(b^2 - a^2)}mb - \frac{2a^2bk}{b^2 - a^2}.$$

Соответствующие рассматриваемому случаю минимальное и максимальное допустимые значения параметра m будут

$$m_{min} = \frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2} \frac{4k}{(1 - \nu)a^2 + (3 + \nu)b^2}, \quad (15)$$

$$m_{max} = \frac{b^2}{b^2 - a^2} \frac{8k}{(1 - \nu)a^2 + (3 + \nu)b^2}.$$

Подставляя выражения из (15) в формулы (14), получим

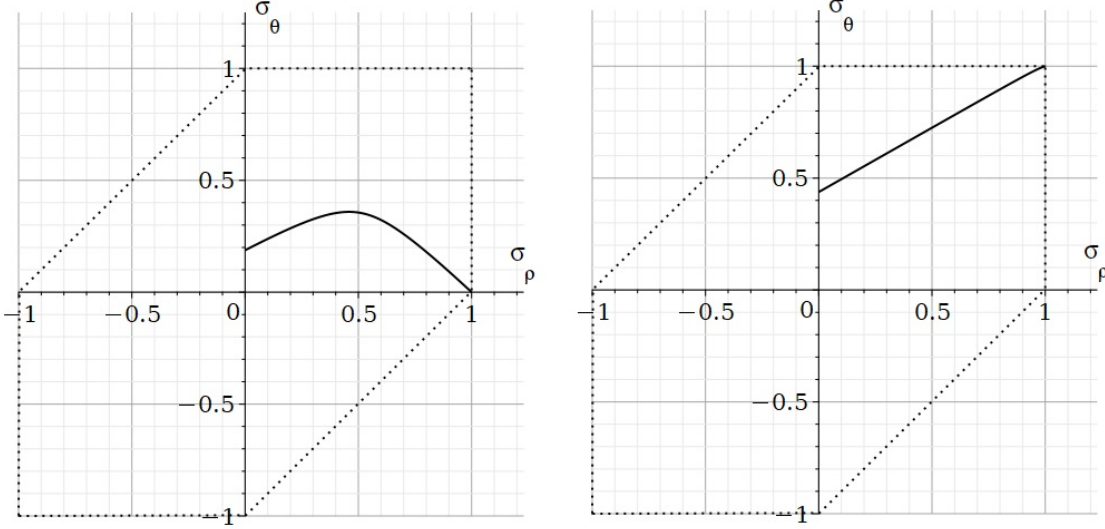
$$\min(Eu_a) = \left(\frac{a^2 + b^2}{b^2 - a^2} - \frac{(1 - \nu)a^2 + (1 + \nu)b^2}{b^2 - a^2} \right) ak,$$

$$\min(Eu_b) = \left(\frac{a^2 + b^2}{b^2 - a^2} \frac{2(1 + \nu)a^2b^2 + (1 - \nu)b^4 - (3 + \nu)a^4}{b^2 - a^2((1 - \nu)a^2 + (3 + \nu)b^2)} - \frac{2a^2}{b^2 - a^2} \right) bk,$$

$$\max(Eu_a) = \left(2b^2 \frac{(3 + \nu)b^4 - (1 - \nu)b^4 - 2(1 + \nu)a^2b^2}{(b^2 - a^2)^2((1 - \nu)a^2 + (3 + \nu)b^2)} - \frac{(1 - \nu)a^2 + (1 + \nu)b^2}{b^2 - a^2} \right) ak,$$

$$\max(Eu_b) = \left(2b^2 \frac{(1 - \nu)b^4 + 2(1 + \nu)a^2b - (3 + \nu)a^4}{(b^2 - a^2)^2((1 - \nu)a^2 + (3 + \nu)b^2)} - \frac{2a^2}{b^2 - a^2} \right) bk.$$

На рис. 6 показано изображение годографа вектора напряжений при задании разных значений перемещений на границах диска.



a) $m = 2.504$, $Eu_a = -0.06$, $Eu_b = 0.188$ b) $m = 1.302$, $Eu_a = 0.14$, $Eu_b = 0.438$

Рис. 6. Годограф вектора напряжений. Условие Треска

Если $Eu|_{\rho=a} = (1-\nu)ak$, $Eu|_{\rho=b} = (1-\nu)bk$, то при $m = 0$ диск будет находиться в предельном состоянии $\sigma_\rho = \sigma_\theta = k$. С увеличением значения параметра m диск переходит в упругое состояние.

10. Гладкие функции пластичности

Одно из отличий гладких функций пластичности от кусочно-гладких в том, что для кусочно-гладких функций пластичности в зависимости от значения внешних параметров (параметры нагрузки и геометрические параметры) и параметров материала надо выяснять, какой из режимов будет выполняться и в какой области диска, что может приводить к громоздким алгоритмам решения задач. Поскольку для всех гладких функций пластичности алгоритмы решения задач о зарождении пластических областей в диске весьма схожи, то можно ограничиться рассмотрением функции условия пластичности Мизеса [23].

11. Условие пластичности Мизеса

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2k^2.$$

Поскольку компоненты σ_ρ , σ_θ , σ_z тензора напряжения являются главными, для плоского напряженного состояния ($\sigma_z = 0$) условие пластичности Мизеса запишем в виде

$$(\sigma_\rho - \sigma_\theta)^2 + \sigma_\rho^2 + \sigma_\theta^2 = 2k^2.$$

Из условия

$$((\sigma_\rho - \sigma_\theta)^2 + \sigma_\rho^2 + \sigma_\theta^2)|_{\rho=a} = 2k^2$$

следуют формулы, позволяющие выразить один параметр нагрузки через другие, например,

$$m = m_{a1} = 2 \frac{4p_b b^2 - (a^2 + 3b^2)p_a + \sqrt{4k^2 - 3p_a^2}(b^2 - a^2)}{((3 + \nu)a^2 + (1 - \nu)b^2)(b^2 - a^2)},$$

$$m = m_{a2} = 2 \frac{4p_b b^2 - (a^2 + 3b^2)p_a - \sqrt{4k^2 - 3p_a^2}(b^2 - a^2)}{((3 + \nu)a^2 + (1 - \nu)b^2)(b^2 - a^2)}.$$

Аналогично из условия

$$((\sigma_\rho - \sigma_\theta)^2 + \sigma_\rho^2 + \sigma_\theta^2)|_{\rho=b} = 2k^2$$

находим

$$m = m_{b1} = 2 \frac{(3a^2 + b^2)p_a - 4p_a a^2 + \sqrt{4k^2 - 3p_a^2}(b^2 - a^2)}{((3 + \nu)a^2 + (1 - \nu)b^2)(b^2 - a^2)},$$

$$m = m_{b2} = 2 \frac{(3a^2 + b^2)p_a - 4p_a a^2 - \sqrt{4k^2 - 3p_a^2}(b^2 - a^2)}{((3 + \nu)a^2 + (1 - \nu)b^2)(b^2 - a^2)}.$$

При построении годографа вектора напряжений, исключая отрицательные значения величин m_{a1} , m_{b1} , m_{a2} , m_{b2} , выбираем

$$m = m_1 = \min(m_{a1}, m_{b1})$$

или

$$m = m_2 = \min(m_{a2}, m_{b2}).$$

Для условия Мизеса радиальное напряжение может изменяться в пределах

$$-\frac{2k}{\sqrt{3}} \leq \sigma_\rho \leq \frac{2k}{\sqrt{3}}.$$

Область допустимых значений для параметров p_a , p_b :

$$-\frac{2k}{\sqrt{3}} \leq p_a, p_b \leq \frac{2k}{\sqrt{3}}.$$

Если заданы граничные условия в перемещениях, и $u|_{\rho=a} = 0$, $u|_{\rho=b} = 0$, то формулы (9) для напряжений примут вид

$$\sigma_\rho = \left((1 + \nu)(b^2 + a^2) - (3 + \nu)\rho^2 + \frac{1 - \nu}{\rho^2} a^2 b^2 \right) \frac{m}{8},$$

$$\sigma_\theta = \left((1 + \nu)(b^2 + a^2) - (3 + \nu)\rho^2 - \frac{1 - \nu}{\rho^2} a^2 b^2 \right) \frac{m}{8}.$$

Когда при увеличении угловой скорости вращения диска параметр m достигнет значения

$$m = \frac{4k}{(b^2 - a^2)\sqrt{\nu^2 - \nu + 1}},$$

на внутренней $\rho = a$ и внешней $\rho = b$ границах диска эквивалентное напряжение достигнет предельного значения

$$\sigma_{eq} = k.$$

12. Условие пластичности Ишлинского

Заданы граничные условия в перемещениях и $u|_{\rho=a} = 0$, $u|_{\rho=b} = 0$. В данном случае из формул (9) для напряжений получаем, что

$$\begin{aligned} \sigma_\rho|_{\rho=a} &= \frac{b^2 - a^2}{4} m, & \sigma_\theta|_{\rho=a} &= \nu \frac{b^2 - a^2}{4} m, \\ \sigma_\rho|_{\rho=b} &= -\frac{b^2 - a^2}{4} m, & \sigma_\theta|_{\rho=b} &= -\nu \frac{b^2 - a^2}{4} m. \end{aligned}$$

При увеличении значения параметра m на внутренней $\rho = a$ и внешней $\rho = b$ границах диска эквивалентное напряжение одновременно достигнет значения

$$\sigma_{eq} = k.$$

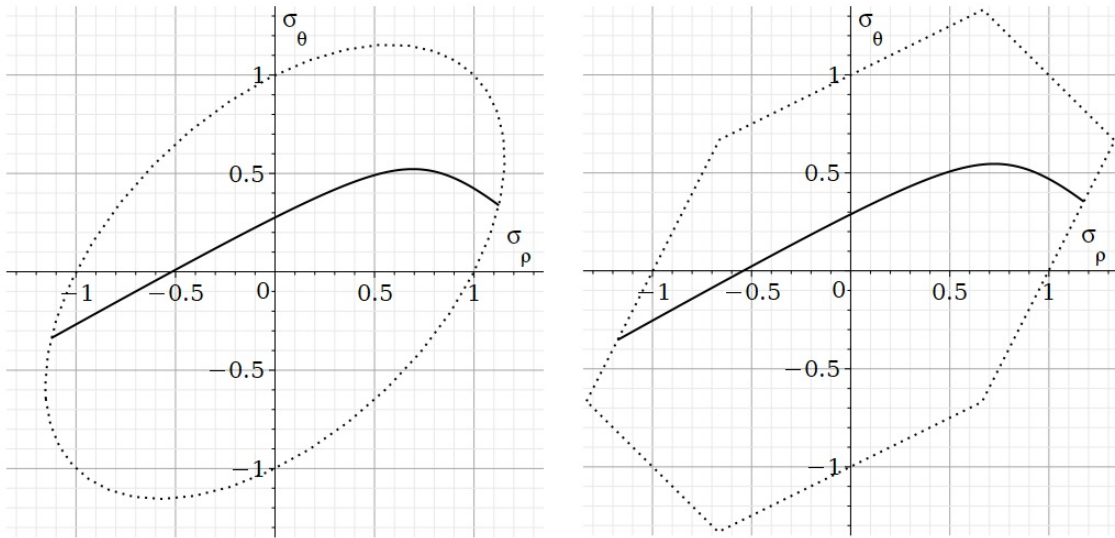
При выборе условия А. Ю. Ишлинского [22] на границах диска будет выполняться режим

$$|2\sigma_\rho - \sigma_\theta| = 2k,$$

когда параметр инерционной нагрузки

$$m = \frac{8k}{(2 - \nu)(b^2 - a^2)}.$$

На рис. 7 на плоскости $\sigma_z = 0$ в пространстве главных напряжений показан годограф вектора напряжений и кривые пластичности для разных условий пластичности.



а) условие Мизеса

б) условие Ишлинского

Рис. 7. Годограф вектора напряжений. $u_a = 0$, $u_b = 0$

Алгоритм решения задачи об определении значения параметров нагрузки, когда происходит зарождение пластических областей во вращающемся диске, если заданы граничные условия (3) или (4) и напряжения вычисляются по формулам (5), (10) или (5), (11), соответственно, строится по аналогии с рассмотренными выше.

13. О записи условия пластичности Треска

$$\max \{ |\sigma_\rho - \sigma_\theta|, |\sigma_\theta - \sigma_z|, |\sigma_z - \sigma_\rho| \} = k. \quad (16)$$

При построении кривых пластичности можно использовать выражение

$$|\sigma_\rho - \sigma_\theta| + |\sigma_\theta - \sigma_z| + |\sigma_z - \sigma_\rho| = 2k. \quad (17)$$

Уравнения (16) и (17) в пространстве главных напряжений определяют одну и ту же призму Треска. Заметим, что известные альтернативные формы записи условия пластичности Треска [6, 7, 21] не отражают его сути, а именно: выбор максимального касательного напряжения.

Заключение. Математические модели упругопластических тел при выборе кусочно-линейных функций пластичности позволяют получить аналитические решения ряда одномерных задач, но приводят к значительно более громоздким алгоритмам решения поставленных задач по сравнению с математическими моделями упругопластических тел при выборе гладких функций пластичности. Это связано с тем, что, когда пластическая область включает части, в которых реализуются разные режимы пластичности, приходится повторять выполнение однотипных алгоритмов решения задачи. При этом утверждение, что соотношения ассоциированного закона пластического течения интегрируются и сводятся к соотношениям ассоциированного закона пластического деформирования справедливо только в случае, если в пластической области выполняется только один режим кусочно-линейного условия пластичности. Тем не менее в силу ряда причин, в том числе и исторических, изучение особенностей моделей, включающих кусочно-линейные функции пластичности, является весьма важным элементом математической теории пластичности. Исследования, изложенные в настоящей работе, показывают, каким образом при выборе условия пластичности Треска происходит изменение напряженного состояния в точках, где реализуется режим $\sigma_\rho = -k$ или $\sigma_\rho = k$. Это исследование весьма важно, поскольку после опубликования работ [15, 16], в которых U. Garger сделал вывод о том, что выбор условия пластичности Треска приводит к неприемлемым результатам. Было высказано предложение отказаться от использования условия пластичности Треска, заменив его условием пластичности максимального касательного напряжения с учетом изотропного упрочнения. Критический анализ работы [15] дан в [24].

ДОПОЛНИТЕЛЬНО

Вклад авторов. Вклад авторов равноценен.

Конфликт интересов. Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

Источник финансирования. Авторы заявляют об отсутствии внешнего финансирования при проведении исследования.

ADDITIONAL INFORMATION

Authors' contribution. The authors' contribution is equal.

Competing interests. The authors declare that they have no competing interests.

Funding. This study was not supported by any external sources of funding.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ивлев Д.Д. Теория идеальной пластичности. М.: Наука, 1966. 232 с.
- [2] Быковцев Г.И., Ивлев Д.Д. Теория пластичности. Владивосток: Дальнаука, 1998. 528 с.
- [3] Ивлев Д.Д. Механика пластических сред. Т. I. Теория идеальной пластичности. М.: Физматлит, 2001. 448 с.
- [4] Ишлинский А.Ю., Ивлев Д.Д. Математическая теория пластичности. М.: Физматлит, 2003. 704 с.
- [5] Малинин Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. М.: Наука, 1969. 420 с.
- [6] Chakrabarty J. Theory of Plasticity. Amsterdam: Elsevier, 2005. 896 p.
- [7] Lubliner J. Plasticity. Theory. New York: Dover Publications, Incorporated. 2008. 540 p.
- [8] Ковалев В.А., Радаев Ю.Н. Об одной форме определяющих соотношений математической теории пластичности (течение на ребре призмы Кулона–Треска) // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия “Физико-математические науки”. 2008. № 6 (65). С. 260–280.
- [9] Буренин А.А., Ткачева А.В. Кусочно-линейные пластические потенциалы как средство расчетов плоских неустановившихся температурных напряжений // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2020. № 6. С. 40–49.
- [10] Прокудин А.Н., Фирсов С.В. Деформирование вращающегося полого цилиндра с жестким внешним покрытием // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2019. № 4. С. 120–135.
- [11] Alexandrova N., Real P. V. Elastic–plastic stress distributions and limit angular velocities in rotating hyperbolic annular discs // Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science. 2007. V. 221. P. 137–142.
- [12] Timoshenko S.P., Goodier J.N. Theory of Elasticity, 3rd ed. New York: McGraw-Hill. 1970. 591 p.
- [13] Качанов Л.М. Основы теории пластичности. М.: Наука, 1969. 420 с.
- [14] Соколовский В.В. Теория пластичности. М.: Высшая школа, 1969. 608 с.
- [15] Gamer U. Tresca’s Yield Condition and the Rotating Disk // Transactions ASME: Journal of Applied Mechanics. 1983. V. 50. No. 2. P. 676–678.

- [16] Gamer U. The Elastic-plastic shrink fit with supercritical interference // *Acta Mechanica*. 1986. V. 61, P. 1–14.
- [17] Rees D.W.A. Elastic-Plastic Stresses in Rotating Discs by von Mises and Tresca // *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*. 1999. V. 79. Iss. 4. P. 281–288.
- [18] Sahni M., Sharma S. Elastic-plastic deformation of a thin rotating solid disk of exponentially varying density // *Research on Engineering Structures and Materials*. 2017. V. 3. Iss. 2. P. 123–133.
- [19] Aleksandrova N.N., Artemov M.A., Baranovsky E.S. et al. On stress/strain state in a rotating disk // *Journal of Physics: Conference Series*. 2019. V. 1203. Article ID 012001.
- [20] Kamal S.M., Dixit U.S. Design of a disk-mandrel assembly for achieving rotational autofrettage in the disk // *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*. 2021. V. 235. P. 2452–2467.
- [21] Kolupaev V.A., Yum M.-H., Altenbach H. Yield criteria of hexagonal symmetry in the π -plane // *Acta Mechanica*. 2013. V. 224. P. 1527–1540.
- [22] Ишлинский А.Ю. Гипотеза прочности формоизменения // *Ученые записки МГУ. Механика*, 1940. № 46. С. 117–124.
- [23] von Mises R. *Mechanik des festen Körpers im plastischen deformablen Zustand* // *Nachrichten der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften Göttingen. Mathematisch-physikalische Klasse*. 1913. P. 589–592.
- [24] Semka E.V., Artemov M.A., Babkina Yu.N. et al. Mathematical modeling of rotating disk states // *Journal of Physics: Conference Series*. 2020. V. 1479. Article ID 012122.

REFERENCES

- [1] Ivlev D.D. *Theory of ideal plasticity*. M.: Nauka, 1966. 232 p. (in Russian)
- [2] Ivlev D.D. *Mechanics of plastic media. V. I. Theory of ideal plasticity*. M.: Fizmatlit, 2001. 448 p. (in Russian)
- [3] Bykovtsev G.I., Ivlev D.D. *Plasticity theory*. Vladivostok: Dalnauka, 1998. 528 p. (in Russian)
- [4] Ishlinsky A.Yu., Ivlev D.D. *Mathematical theory of plasticity*. M.: Fizmatlit, 2003. 704 p. (in Russian)
- [5] Malinin N.H. *Applied theory of plasticity and creep*. M.: Nauka, 1969. 420 p. (in Russian)
- [6] Chakrabarty J. *Theory of Plasticity*. Amsterdam: Elsevier, 2005. 896 p.
- [7] Lubliner J. *Plasticity. Theory*. New York: Dover Publications, Incorporated. 2008. 540 p.
- [8] Kovalev V.A., Radaev Yu.N. On one form of constitutive relations of the mathematical theory of plasticity (flow on the edge of a Coulomb-Tresca prism) // *Bulletin of the Samara State Technical University. Series “Physical and Mathematical Sciences.”* 2008. No. 6 (65). P. 260–280. (in Russian)
- [9] Burenin A.A., Tkacheva A.V. Piecewise linear plastic potentials as a means of calculating plane transient temperature stresses // *Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Mechanics of Solids*. 2020. No. 6. P. 40–49. (in Russian)
- [10] Prokudin A.N., Firsov S.V. Deformation of a rotating hollow cylinder with a rigid outer coating // *Bulletin of the Perm National Research Polytechnic University. Mechanics*. 2019. No. 4. P. 120–135. (in Russian)

- [11] Alexandrova N., Rea P. V. Elastic–plastic stress distributions and limit angular velocities in rotating hyperbolic annular discs // Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science. 2007. V. 221. P. 137–142.
- [12] Timoshenko S.P, Goodier J.N. Theory of Elasticity, 3rd ed. New York: McGraw-Hill. 1970. 591 p.
- [13] Kachanov L.M. Fundamentals of the Theory of Plasticity. North-Holland Publishing Company. Amsterdam/London 1971. 482 p.
- [14] Sokolovskii V.V. Theory of plasticity. Moscow: Vishaya Shkola, Higher. Shk. 1950, 396 p.
- [15] Gamer U. Tresca’s Yield Condition and the Rotating Disk // Transactions ASME: Journal of Applied Mechanics. 1983. V. 50. No. 2. P. 676–678.
- [16] Gamer U. The Elastic-plastic shrink fit with supercritical interference // Acta Mechanica. 1986. V. 61, P. 1–14.
- [17] Rees D.W.A. Elastic-Plastic Stresses in Rotating Discs by von Mises and Tresca // Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik. 1999. V. 79. Iss. 4. P. 281–288.
- [18] Sahni M., Sharma S. Elastic-plastic deformation of a thin rotating solid disk of exponentially varying density // Research on Engineering Structures and Materials. 2017. V. 3. Iss. 2. P. 123–133.
- [19] Aleksandrova N.N., Artemov M.A., Baranovsky E.S. et al. On stress/strain state in a rotating disk // Journal of Physics: Conference Series. 2019. V. 1203. Article ID 012001.
- [20] Kamal S.M., Dixit U.S. Design of a disk-mandrel assembly for achieving rotational autofrettage in the disk // Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science. 2021. V. 235. P. 2452–2467.
- [21] Kolupaev V.A., Yum M.-H., Altenbach H. Yield criteria of hexagonal symmetry in the π -plane // Acta Mechanica. 2013. V. 224. P. 1527–1540.
- [22] Ishlinsky A.Yu. Hypothesis of the strength of shape change // Scientific notes of Moscow State University. Mechanics, 1940. No. 46. P. 117–124. (in Russian)
- [23] von Mises R. Mechanik des festen Körpers im plastischen deformablen Zustand // Nachrichten der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften Göttingen. Mathematisch-physikalische Klasse. 1913. P. 589–592.
- [24] Semka E.V., Artemov M.A., Babkina Yu.N. et al. Mathematical modeling of rotating disk states // Journal of Physics: Conference Series. 2020. V. 1479. Article ID 012122.