

М. В. Останин, О. Н. Любимова, Е. А. Свердлов

ПРИБЛИЖЕНИЕ КРАЕВЫХ УСЛОВИЙ В АНАЛИТИЧЕСКОМ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ О САМОУРАВНОВЕШЕННЫХ НАПРЯЖЕНИЯХ ДЛЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ОБРАЗЦА ГОРНОЙ ПОРОДЫ

Дальневосточный федеральный университет, Владивосток, Россия

Аннотация. Исследуется явление реверсивного характера деформаций в предразрушающей области образца горной породы при одноосном сжатии на основе модельных представлений теории самоуравновешенных напряжений с учетом экспериментально наблюдаемой деформационной картины на поверхности образца. Экспериментальные данные получены с помощью акустико-деформационного метода. Актуальность данного исследования связана именно с развитием неклассических модельных представлений механики деформируемого твердого тела, эволюции напряженно-деформируемого состояния в массивах и образцах горных пород при разного рода силовых воздействиях. Разработан метод определения полной картины напряженно-деформированного состояния во всем объеме образца на протяжении всей истории нагружения.

Ключевые слова: акустико-деформационный метод, явление реверсивного характера деформаций.

Останин Максим Валентинович, старший преподаватель департамента управления на основе данных, школа экономики и менеджмента; e-mail: ostanin.mv@dvfu.ru; AuthorID: 1064048

Любимова Ольга Николаевна, доктор физико-математических наук, зав. лаборатории механики геоматериалов Научно-исследовательского и образовательного центра геомеханики и геодинамики сильно сжатых горных пород и массивов; e-mail: lyubimova.on@dvfu.ru; <https://orcid.org/0000-0003-4802-7352>; AuthorID: 372335

Свердлов Евгений Алексеевич, студент политехнического института (школы); e-mail: sverdlov.ea@students.dvfu.ru

для цитирования: Останин М. В., Любимова О. Н., Свердлов Е. А. Приближение краевых условий в аналитическом решении задачи о самоуравновешенных напряжениях для цилиндрического образца горной породы // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2024. № 1(59). С. 50–60. DOI: 10.37972/chgpu.2024.59.1.001 EDN: BQFWRW

Статья опубликована на условиях лицензии *Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)*.

M. V. Ostanin, O. N. Lyubimova, E. A. Sverdlov

APPROXIMATION OF BOUNDARY CONDITIONS IN THE ANALYTICAL SOLUTION OF THE PROBLEM OF SELF-BALANCED STRESSES FOR A CYLINDRICAL ROCK SAMPLE

Far Eastern Federal University, Vladivostok, Russia

Abstract. The phenomenon of reversible deformation in the pre-destructive region of a rock specimen under uniaxial compression is investigated on the basis of model representations of the theory of self-equilibrated stresses, taking into account the experimentally observed deformation pattern on the specimen surface. The experimental data were obtained using the acoustic-deformation method. The relevance of this study is related to the development of non-classical model representations of mechanics of deformable solid bodies, the evolution of stress-strain state in arrays and rock samples under different kinds of force actions. A method for determining the complete stress-strain state in the entire volume of the specimen throughout the entire loading history has been developed.

Keywords: acoustic deformation method, the phenomenon of the reversible nature of deformations.

Ostanin V. Maksim, Senior Lecturer, e-mail: ostanin.mv@dvfu.ru; AuthorID: 1064048

Lyubimova N. Olga, Doctor of Ph.D., Head of the Laboratory of Geomaterials Mechanics of the Scientific Research and Educational Center for Geomechanics and Geodynamics of Highly Compressed Rocks and Massifs, e-mail: lyubimova.on@dvfu.ru; <https://orcid.org/0000-0003-4802-7352>; AuthorID: 372335

Sverdlov A. Evgenii, Student of the Polytechnic Institute (school), e-mail: sverdlov.ea@students.dvfu.ru

to cite this article: Ostanin M. V., Lyubimova O. N., Sverdlov E. A. Approximation of boundary conditions in the analytical solution of the problem of self-balanced stresses for a cylindrical rock sample // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2024. No 1(59). p. 50–60. DOI: 10.37972/chgpu.2024.59.1.001 EDN: BQFWRW

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

1. Введение. Последние десятилетия XX века были отмечены открытиями новых геомеханических явлений, которые с позиции традиционных взглядов на деформирование и разрушение горных пород представляются аномальными [1]. Прежде всего, это зональная дезинтеграция пород вокруг подземных выработок [2, 3], а также реверсивный характер деформирования образцов горных пород при их нагружении в предразрушающей области [4]. Такие явления наблюдаются, когда внутренние напряжения в среде превышают величину, характеризующую прочность породы. На сегодняшний день факт их существования надежно установлен экспериментально, что заставляет исследовать наблюдаемые закономерности, а также разрабатывать новые математические модели для описания геомеханической среды [5–7].

Однако, специфика моделирования геомеханических сред связана не только с описанием напряженно-деформированного состояния, но и с экспериментальным определением свойств горных пород и масштабными переходами [8]. Ситуация осложняется предысторией деформирования и изначально предварительно напряженным состоянием изучаемых сред и материалов, при этом история их деформирования и эволюции напряжений неизвестна. Горные породы формировались, эволюционировали, разрушались в течение длительного времени, поэтому начальное представление их как ненапряженных, далеко от реальности. Временные параметры и недоступность геологических объектов, не позволяет непосредственно наблюдать за происходящими процессами. Перечисленные особенности, накладывают существенные ограничения на применение модельных представлений механики сплошных сред в исследовании геоматериалов [9, 10].

Целью данной работы является определение напряженно-деформированного состояния образцов горных пород на основе аналитического решения при моделировании упругого поведения цилиндрических образцов горной породы при одноосном сжатии, полученного в работе [11].

2. Основная часть. Известно, что предразрушающее состояние, а также реверсивный характер деформаций горных образцов [10] может быть описан с помощью модели сплошной среды с учетом самоуравновешенных напряжений [11].

Согласно этой модели, состояние предразрушения характеризуется наличием дефектов различных типов в образце [12]. Они создают дополнительное поле напряжений, меняющее деформированное состояние материала. Это проявляется в том, что при нагрузке, превышающей критическое значение, измеряемые на поверхности образца деформации зависят от угла, тогда как в отсутствие дефектов при P меньше P_* такой зависимости от угла нет. Поскольку образец находится в равновесии, то силы, определяемые полем T_{ij} , должны быть скомпенсированы. Естественным кандидатом в качестве компенсирующего поля является упругое поле напряжений Π_{ij} . При этом полное поле напряжений Σ_{ij} внутри образца равно $\Sigma_{ij} = T_{ij} + \Pi_{ij}$. Оно удовлетворяет уравнениям равновесия и краевым условиям в следующей форме:

$$\frac{\partial \Pi_{ij}}{\partial x_j} = F_i, \quad \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} = -F_i, \quad \Pi_{ij} n_j |_{dV} = -T_{ij} n_j, \quad (1)$$

значит, что функциональная зависимость упругого поля в образце от угловой переменной может определяться или объемными силами F_i или взаимодействием упругого поля с полем дефектов на границе. При этом структура и распределение поля T_{ij} в материале зависит от типа рассмотренных дефектов. Но в условиях проведенного эксперимента эволюция дефектной структуры не рассматривалась, и, следовательно, можно считать $F_i=0$:

$$\frac{\partial \Pi_{ij}}{\partial x_j} = 0, \quad \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} = 0, \quad (2)$$

тогда граничные условия к уравнениям (2) совпадают с последним соотношением в (1)

$$\Pi_{ij} n_j |_{dV} = -T_{ij} n_j. \quad (3)$$

В ходе эксперимента на боковой поверхности образца измеряются деформации, которые определяют напряжения в дискретном наборе точек. Поэтому возможная постановка задачи состоит в построении такого упругого поля Π_{ij} , чтобы соответствующие ему деформации E_{ij} совпадали с измеренными значениями на границе в дискретном наборе точек.

Поле упругих напряжений Π_{ij} и деформаций E_{ij} можно связать линейными соотношениями с некоторыми коэффициентами A, B .

$$\Pi_{ij} = A(E_{ij} + BE_{kk}\delta_{ij}), \quad A = E/(1 + \nu) = 2\mu, \quad B = \nu/(1 - 2\nu). \quad (4)$$

Так как уравнения равновесия (1) являются линейными, то представим поле Π_{ij} в виде суммы классического решения σ_{ij}^e , которое хорошо известно [13] и некоторого упругого поля π_{ij}

$$\Pi_{ij} = \sigma_{ij}^e + \pi_{ij}. \quad (5)$$

Дополнительно потребуем, чтобы первый инвариант π_{kk} обращался в нуль. Тогда тензор π_{ij} можно записать в следующем виде:

$$\pi_{ij} = \mu \left(\frac{\partial a_i}{\partial x_j} + \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \right), \quad (6)$$

где a_i - компоненты вектора перемещений.

Для определения компонент a_i ($i=1,2,3$) подставим напряжения π_{ij} в виде (6) в первое из уравнений (2), получим систему уравнений в перемещениях, в цилиндрической системе координат она имеет вид:

$$\begin{aligned}
\Delta a_r - \frac{a_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} &= 0, \\
\Delta a_\varphi - \frac{a_\varphi}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial a_r}{\partial \varphi} &= 0, \\
\Delta a_z &= 0, \\
\Delta^2 &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.
\end{aligned} \tag{7}$$

Ограниченное решение системы (7) уравнений записываем в виде рядов Фурье по тригонометрическим функциям [14]:

$$\begin{aligned}
a_r &= \sum_n (u_n^{(1)}(\rho) \cos(n\varphi) + u_n^{(2)}(\rho) \sin(n\varphi)) \cos(m\gamma z), \\
a_\varphi &= \sum_n (v_n^{(1)}(\rho) \cos(n\varphi) + v_n^{(2)}(\rho) \sin(n\varphi)) \cos(m\gamma z), \\
a_z &= \sum_n (w_n^{(1)}(\rho) \cos(n\varphi) + w_n^{(2)}(\rho) \sin(n\varphi)) \cos(m\gamma z),
\end{aligned} \tag{8}$$

где $\rho = \gamma r$, $\gamma = \frac{\pi}{h}$.

Подставим соотношения (8) в систему уравнений (7.), тогда коэффициенты Фурье $u_n^{(i)}(\rho)$, $v_n^{(i)}(\rho)$, $w_n^{(i)}(\rho)$ определяются следующим образом:

$$\begin{aligned}
u_n^{(i)}(\rho) &= \frac{A_n^{(i)}}{2\gamma} I_{n+1}(\rho) + \frac{B_n^{(i)}}{2\gamma} I_{n-1}(\rho), \\
v_n^{(i)}(\rho) &= \frac{A_n^{(i)}}{2\gamma} I_{n+1}(\rho) - \frac{B_n^{(i)}}{2\gamma} I_{n-1}(\rho), \\
w_n^{(i)}(\rho) &= \frac{C_n^{(i)}}{\gamma} I_n(\rho).
\end{aligned} \tag{9}$$

Так как первый инвариант тензора деформаций ε_{kk} должен равняться нулю, то постоянные $A_n^{(i)}$, $B_n^{(i)}$, $C_n^{(i)}$ связаны условием:

$$C_n^{(i)} = \frac{A_n^{(i)} + B_n^{(i)}}{2}. \tag{10}$$

Тогда компоненты тензора упругих напряжений в цилиндрических координатах находим из закона Гука:

$$\begin{aligned}
\pi_{\varphi\varphi} &= \sum_n (\pi_{\varphi\varphi}^{(1)}(n\rho) \cos(n\varphi) + \pi_{\varphi\varphi}^{(2)}(\rho) \sin(n\varphi)) \cos(m\gamma z), \\
\pi_{zz} &= \sum_n (\pi_{zz}^{(1)}(n\rho) \cos(n\varphi) + \pi_{zz}^{(2)}(\rho) \sin(n\varphi)) \cos(m\gamma z),
\end{aligned} \tag{11}$$

где

$$\begin{aligned}\pi_{\varphi\varphi}^{(i)}(n, \rho) &= m(A_{nm}^{(i)}(\frac{n+1}{\rho}I_{n-1} - \frac{2n^2+2n}{\rho^2}I_n) - B_{nm}^{(i)}\frac{n-1}{\rho}I_{n-1}), \\ \pi_{zz}^{(i)}(n, \rho) &= -m(A_{nm}^{(i)} + B_{nm}^{(i)})I_n,\end{aligned}\quad (12)$$

здесь компоненты напряжений содержат набор неизвестных параметров $A_{nm}^{(i)}$, $B_{nm}^{(i)}$.

3. Задача сопряжения модельного представления с экспериментальными данными. Согласно изложенной выше постановке задачи, неизвестные параметры должны определяться из условий совпадения компонент тензора деформаций E_{ij} со значениями, которые измеряются экспериментально в дискретном наборе точек на поверхности образца.

Поскольку $\Pi_{rr} + \Pi_{\varphi\varphi} + \Pi_{zz} = -P$, то при $r = R$ и $z = 0$ получаем следующие соотношения:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\mu}\pi_{\varphi\varphi}|_{r=R, z=0} &= (E_{\varphi\varphi} - \frac{\nu}{E}P)|_{r=R, z=0}, \\ \frac{1}{2\mu}\pi_{zz}|_{r=R, z=0} &= (E_{zz} - \frac{1}{E}P)|_{r=R, z=0}.\end{aligned}\quad (13)$$

В ходе эксперимента тензометрические датчики располагаются на поверхности образца по окружности в точках $\varphi_k = \frac{\pi k}{4}$, $k = 0, 7$.

Предварительный анализ показывает, что в рядах Фурье можно взять одну гармонику по оси z . Вычисляя значения напряжений и деформаций в этих точках, получаем систему линейных алгебраических уравнений для определения неизвестных параметров $A_{nm}^{(i)}$, $B_{nm}^{(i)}$.

Численные расчеты проводились при следующих значениях параметров: $\nu = 0,19$, $E = 7,02 * 10^4$, $h = 108$, $R = 27$. Используя экспериментальные данные для продольных $E_{\varphi\varphi}$ и поперечных деформаций E_{zz} с поверхности образца, находим значения $A_{nm}^{(1)}$, $B_{nm}^{(1)}$. Затем вычисляем коэффициенты Фурье $\pi_{ij}^k(n, \rho)$ и определяем компоненты тензора напряжений $\pi_{\varphi\varphi}$ и π_{zz} . Используя данные шести пар тензодатчиков построим аналитические решения $E_{\varphi\varphi}$ и E_{zz} . Оставшиеся два датчика будем использовать в качестве тестовых для сравнения с теоретическим решением. Сравним экспериментальные данные со значениями деформаций, вычисленными теоретически, по формулам:

$$\begin{aligned}E_{\varphi\varphi}|_{\varphi=\varphi_i, r=R, z=0} &= (\frac{1}{2\mu}\pi_{\varphi\varphi} + \frac{\nu}{P}E)|_{\varphi=\varphi_i, r=R, z=0}, \\ E_{zz}|_{\varphi=\varphi_i, r=R, z=0} &= (\frac{1}{2\mu}\pi_{\varphi\varphi} + \frac{1}{P}E)|_{\varphi=\varphi_i, r=R, z=0}.\end{aligned}\quad (14)$$

Относительные отклонения аналитического решения от экспериментальных значений вычислялись по следующим формулам:

$$\delta = \frac{\sqrt{\sum (E_{\text{exp}}^i - E_{\text{theory}}^i)^2}}{\sqrt{\sum (E_{\text{exp}}^i)^2}}, \quad (15)$$

в точке $\varphi = \varphi_k$:

$$\begin{aligned} \delta_{\varphi}^k &= \frac{|E_{\varphi\varphi}^{\text{exp}}(\varphi_k) - E_{\varphi\varphi}^{\text{theory}}(\varphi_k)|}{|E_{\varphi\varphi}^{\text{exp}}(\varphi_k)|}, \\ \delta_z^k &= \frac{|E_{zz}^{\text{exp}}(\varphi_k) - E_{zz}^{\text{theory}}(\varphi_k)|}{|E_{zz}^{\text{exp}}(\varphi_k)|}. \end{aligned} \quad (16)$$

Относительные погрешности в проверочных точках соответственно равны $\delta_{\varphi} = 61, 2$, $\delta_z = 12, 9$ в точке $\varphi = \frac{5\pi}{4}$ и $\delta_{\varphi} = 46, 87$, $\delta_z = 19, 41$ в точке $\varphi = \frac{3\pi}{2}$.

Поточечный способ определения коэффициентов Фурье имеет ряд недостатков:

- отсутствие поточечной сходимости приводит к большим значениям относительных погрешностей;
- неопределенность в выборе количества гармоник, связанная с совместностью системы линейных алгебраических уравнений;
- необходимость дополнительно исследовать расположение тензодатчиков.

Поэтому, определим коэффициенты в рядах Фурье используя аппроксимирующие функции $E_{zz}^{\text{approx}}(\varphi)$, $E_{\varphi\varphi}^{\text{approx}}(\varphi)$, по формулам:

$$\begin{aligned} \pi_{\varphi\varphi}^1(\rho, n) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} \left(E_{\varphi\varphi}^{\text{approx}}(\varphi) - \frac{\nu}{E} P \right) \cos(n\varphi) d\varphi, \\ \pi_{\varphi\varphi}^2(\rho, n) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} \left(E_{\varphi\varphi}^{\text{approx}}(\varphi) - \frac{\nu}{E} P \right) \sin(n\varphi) d\varphi, \\ \pi_{zz}^1(\rho, n) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} \left(E_{zz}^{\text{approx}}(\varphi) - \frac{\nu}{E} P \right) \cos(n\varphi) d\varphi, \\ \pi_{zz}^2(\rho, n) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} \left(E_{zz}^{\text{approx}}(\varphi) - \frac{\nu}{E} P \right) \sin(n\varphi) d\varphi. \end{aligned} \quad (17)$$

4. Результаты расчетов на основе предложенной модели. Аппроксимирующие функции строились на основе значений продольных и поперечных деформаций с поверхности образца методом наименьших квадратов для заданного уровня нагрузки [15]. В таблицах 1 и 2 представлены относительные отклонения аналитического решения от экспериментальных значений для трех видов аппроксимирующих функций:

I. $f(\varphi) = a_{11}(\rho \cos(\varphi))^2 + a_{22}(\rho \sin(\varphi))^2 + 2a_{12}\rho^2 \cos(\varphi) \sin(\varphi) + 2a_{13} \cos(\varphi) + 2a_{23} \sin(\varphi) + a_{33} = 0$,

II. $f(\varphi) := A\varphi + B$,

III. $f(\varphi) = A\varphi^3 + B\varphi^2 + C\varphi + D$.

Вид аппроксимирующей функции	Относительное отклонение в точке $\varphi = 0$, δ_φ^0	Относительное отклонение по всем значениям, δ_φ
I	14,55%	14,35%
II	13,71%	13,53%
III	5,68%	11,65%

Таблица 1. Вид аппроксимирующей функции и относительные отклонения для продольных и поперечных деформаций на поверхности образца.

Вид аппроксимирующей функции	Относительное отклонение в точке $\varphi = 0$, δ_z^0	Относительное отклонение по всем значениям, δ_z
I	5,20 %	3,50 %
II	7,80 %	4,44 %
III	6,62 %	3,87 %

Таблица 2. Вид аппроксимирующей функции и относительные отклонения для продольных и поперечных деформаций на поверхности образца.

Используя предложенный подход к описанию напряженно деформированного состояния образца вычислены значения продольных E_{zz} и поперечных $E_{\varphi\varphi}$ деформаций на всем интервале нагружения (от 0 до 336 МПа) для трех пар тензометрических датчиков с использованием аппроксимирующей функции в виде многочлена третьей степени. На рисунках 1-3 представлены графики продольных и поперечных деформаций, вычисленные предложенным способом и экспериментальные значения для трех пар тензометрических датчиков.

5. Заключение. В рамках неклассических положений о самоуравновешенных напряжениях получено аналитическое решение трехмерной краевой задачи механики деформируемого твердого тела для цилиндрических образцов при одноосном сжатии с учетом экспериментальных данных и вычислены относительные отклонения, также в ходе построения аналитического решения было выявлено, что на относительную погрешность наибольшее влияние оказывает выбор аппроксимирующей функции для определения коэффициентов по формулам (15) чем увеличение количества гармоник в аналитическом решении. Наименьшая относительная погрешность достигалась при выборе аппроксимирующей функции в виде многочлена третьей степени (5) и числе гармоник в аналитическом решении $n = 4$.

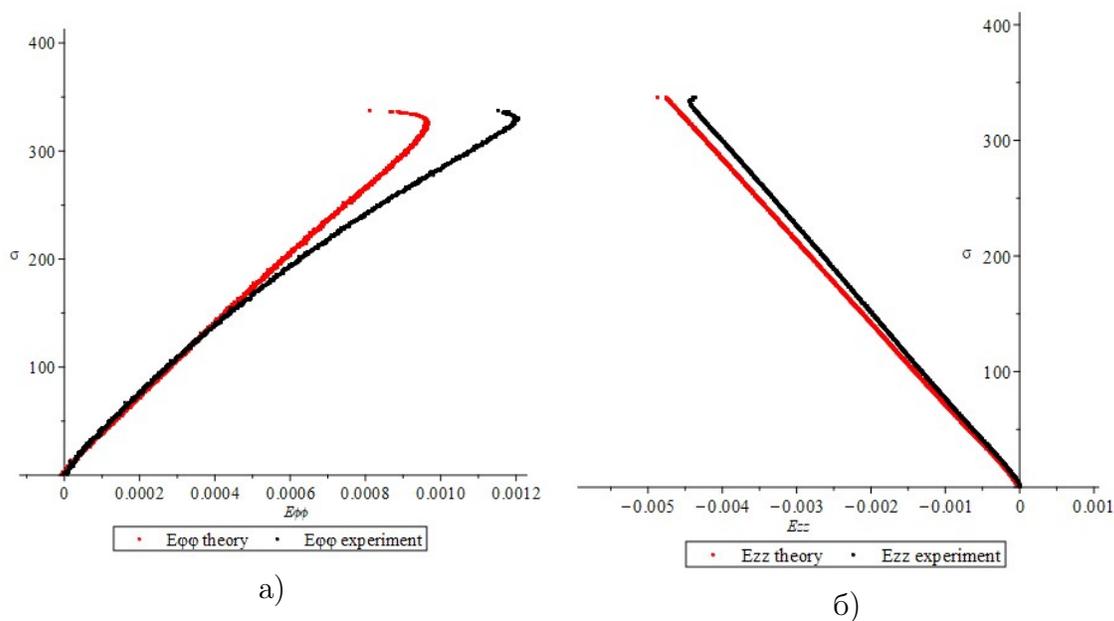


Рис. 1. Значения $E_{\varphi\varphi}$ (а) и E_{zz} (б) вычисленные теоретически и экспериментальные данные для пары датчиков №1, $\varphi = 0$

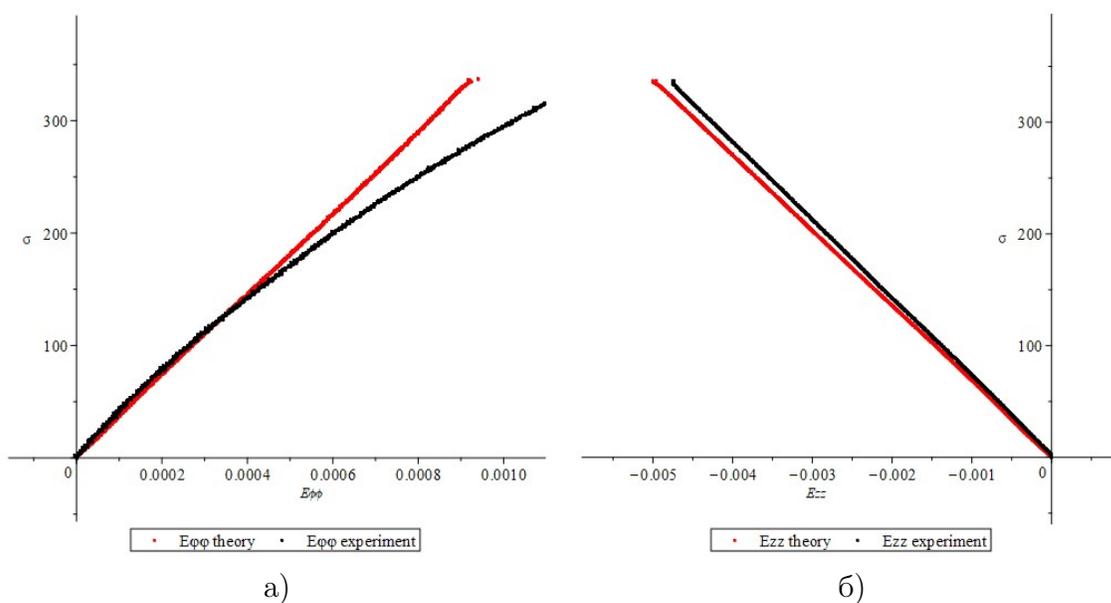


Рис. 2. Значения $E_{\varphi\varphi}$ (а) и E_{zz} (б) вычисленные теоретически и экспериментальные данные для пары датчиков №4, $\varphi = \frac{3\pi}{4}$

ДОПОЛНИТЕЛЬНО

Вклад авторов. Вклад авторов равноценен.

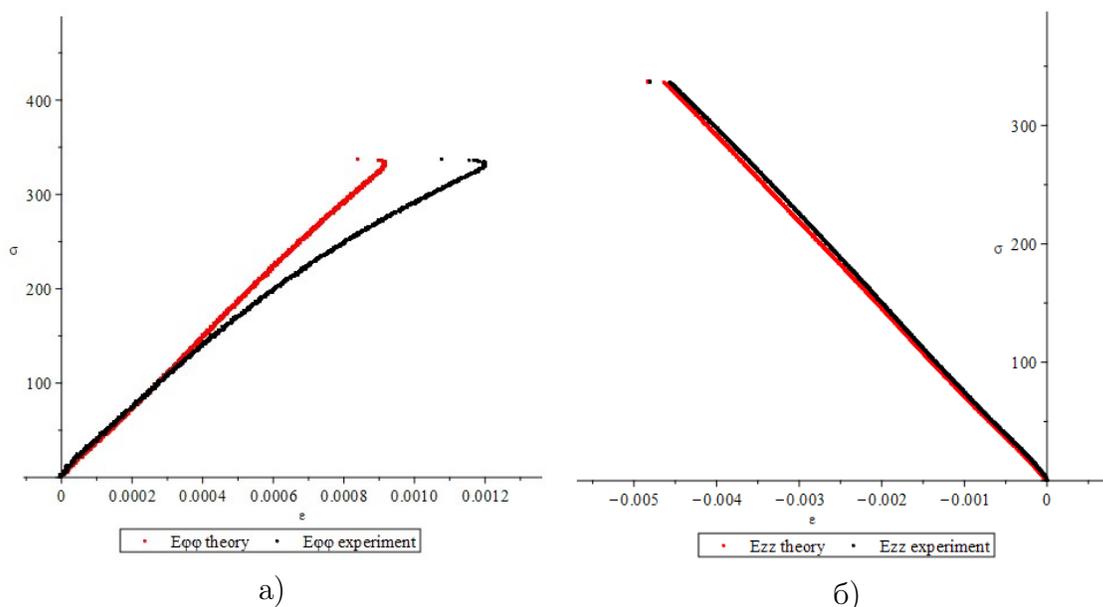


Рис. 3. Значения $E_{\varphi\varphi}$ (а) и E_{zz} (б) вычисленные теоретически и экспериментальные данные для пары датчиков №8, $\varphi = \frac{7\pi}{4}$

Конфликт интересов. Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

Источник финансирования. Статья написана при поддержке Фонда целевого капитала ДВФУ: договор от 05.07.2022 № Д-231-22, проект № 22-07-01-001.

ADDITIONAL INFORMATION

Authors' contribution. The contribution of the authors is equivalent.

Competing interests. The authors declare that they have no competing interests.

Funding. The article was written with the support of the FEFU Endowment Fund: agreement dated 07/05/2022 No. D-231-22, project No. 22-07-01-001.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Гузев М.А., Макаров В.В. Деформирование и разрушение сильно сжатых горных пород вокруг выработок. 2007. 232 p.
- [2] Гузев М.А. Моделирование осцилляционного деформирования сильно сжатых горных пород // «Вестник Дальневосточного государственного технического университета» № 3/4 (8/9). 2011. С. 38-47.
- [3] Опанасюк А.А. Периодический осцилляционный характер деформирования образцов сильно сжатых горных пород. № 12, Сб. науч. трудов. Донецк: «Норд-Пресс». 2006. С. 79–80.
- [4] Голосов А.М. Об эффекте реверсивного деформирования образцов горных пород при одноосном сжатии // Вестник инженерной школы ДВФУ. 2016. № 1(26). С. 127–133.
- [5] Гузев М.А., Горбунов А.В. Неевклидова модель сплошной среды и описание остаточных напряжений // Вестник инженерной школы ДВФУ. 2020. № 2(43). С. 3–12.
- [6] Гузев М.А., Макаров В.В., Ушаков А.А. Моделирование упругого поведения сжатых горных образцов в предразрушающей области. № 6. 2005. С. 3–13.
- [7] Кадич А., Эделен Д. Калибровочная теория дислокаций и дисклинаций. 1987. 168 с.

- [8] Мясников В. П., Гузев М. А. Неевклидова модель деформирования материалов на различных структурных уровнях. 2000. 5-16 с.
- [9] Геомеханические процессы в геологической среде горнотехнических систем и управление геодинамическими рисками: монография / А. А. Козырев [и др.]. Львов : Апатиты: КНЦ РАН, 2019. 431, ил. ISBN 978-5-91137-391-7 с.
- [10] Периодический характер деформирования образцов сильно сжатых горных пород / В.В. Макаров [и др.] // ГИАБ. 2008. № 1. С. 185 –187.
- [11] Ушаков А.А. Самоуравновешенные поля напряжений //дисс. канд.физ-мат наук. Владивосток. 2006. 128 с.
- [12] Гузев М.А., Макаров В.В., Ушаков А.А. Моделирование упругого поведения сжатых горных образцов в предразрушающей области. No. 6. 2006.
- [13] Амензаде Ю.А. Теория упругости, Изд. 3-е, доп. М.: Высшая школа, 1976. 272с. 1976.
- [14] Толстов Г.П. Ряды Фурье. Изд. 3. М.: Наука, 1980. 384 с.
- [15] Бахвалов Н., Н.Жидков, Кобельков. Г. Численные методы. М.: Изд. Физматлит, 2006. 637 с.

REFERENCES

- [1] Guzev M.A., Makarov V.V. Deformation and destruction of highly compressed rocks around workings. 2007, pp.232.
- [2] Guzev M.A. Modeling of oscillatory deformation of highly compressed rocks // Bulletin of the Far Eastern State Technical University. No 3/4 (8/9). 2011, pp.38-47.
- [3] Opanasyuk A.A. Periodic oscillatory character of deformation of samples of strongly compressed rocks. No. 12, Collection of scientific papers. – Donetsk: Nord-Press. 2006, pp.79-80.
- [4] Votes A.M. On the effect of reversible deformation of rock samples under uniaxial compression // Bulletin of the fevu school of engineering. 2016. no. 1(26), pp.127-133.
- [5] Guzev M.A., Gorbunov A.V. Non-Euclidean continuum model and description of residual stresses // Bulletin of the fevu school of engineering. 2020. no. 2(43), pp.3-12.
- [6] Guzev M.A., Makarov V.V., Ushakov A.A. Modeling of elastic behavior of compressed rock samples in the pre-destructive region. No. 6. 2005, pp.3-13.
- [7] Kadich A., Edelen D. Gauge theory of dislocations and disclinations. 1987, 168 p.
- [8] Myasnikov V. P., Guzev M. A. Non-Euclidean model of deformation of materials at various structural levels. 2000, pp.5-16.
- [9] Geomechanical processes in the geological environment of mining systems and geodynamic risk management: monograph / A. A. Kozyrev [et al.]. Lviv : Apatity: KSC RAS, 2019. 431, ill. ISBN 978-5-91137-391-7 p.
- [10] Periodic character of deformation of samples of strongly compressed rocks / V.V. Makarov [et al.] // GИAB. 2008. no. 1. pp.185-187.
- [11] Ushakov A.A. Self-balanced stress fields //diss. kand.physical sciences. Vladivostok. 2006. 128 p.
- [12] Guzev M.A., Makarov V.V., Ushakov A.A. Modeling of the elastic behavior of compressed rock samples in the pre-destructive region. No. 6. 2006.
- [13] Amenzade Yu.A. Theory of elasticity. 1976. 272 p.
- [14] Tolstov G.P. Fourier series. Ed. 3. Moscow: Nauka, 1980. 384 p.
- [15] Bakhvalov N., Zhidkov N., Kobelkov. G. Numerical methods. M.: Ed. Fizmatlit, 2006. 637 p.