Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния.

DOI: 10.37972/chgpu.2024.59.1.002 *EDN: CLSSNO*
Научная статья *УДК: 519.245*

С. К. Иванов

ОБ ОЦЕНКЕ ТОЧНОСТИ РЕЗУЛЬТАТОВ КОМПЬЮТЕРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРИ НЕТОЧНЫХ ПАРАМЕТРАХ БИНОМИАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Московский государственный университет технологий и управления имени К. Г. Разумовского, Москва, Россия

Аннотация. Для оценки компоненты дисперсии выходного показателя статистической модели необходимо получить оценки производных от математического ожидания выходного показателя статистической модели по параметрам генерируемых в модели случайных величин. Проанализирована сходимость ряда видов оценок таких производных для случая биномиальных случайных величин. Предложены оценки производных с улучшенной сходимостью. Проведён численный эксперимент для подтверждения теоретических выводов.

Ключевые слова: компьютерное моделирование, оценка точности, биномиальное распределение.

Иванов Сергей Константинович, кандидат технических наук, доцент кафедры высшей математики; e-mail: s_k_ivanov@rambler.ru; AuthorID: 5876

для цитирования: *Иванов С. К.* Об оценке точности результатов компьютерного моделирования при неточных параметрах биномиального распределения // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2024. № 1(59). С. 61–75. DOI: 10.37972/chgpu.2024.59.1.002 EDN: CLSSNO

Поступила: 20.02.2024; принята в печать: 01.03.2024; опубликована: 05.07.2024.

Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost.

DOI: `10.37972/chgpu.2024.59.1.002` *EDN: CLSSNO*
Research Article

S. K. Ivanov

ON COMPUTER SIMULATION ACCURACY ESTIMATION WITH INACCURATE PARAMETERS OF BINOMIAL DISTRIBUTION

Moscow State University of Technology and Management named after K. G. Razumovsky, Moscow, Russia

Abstract. To estimate a dispersion of the output value of a Monte-Carlo model due to inaccuracy of input data we need to have estimates of derivatives of the output value by parameters of underlying distributions. A number of estimates of the output value by parameter of binomial distribution are analyzed. Improved estimates are proposed. A numerical experiment was carried out to confirm the theoretical conclusions.

Keywords: computer simulation, accuracy estimation, binomial distribution.

Sergey K. Ivanov, Cand. Tech. Sc., Associate Professor of the Department of Higher Mathematics, `e-mail:` mail1@mail.ru; `e-mail:` s_k_ivanov@rambler.ru; AuthorID: 5876

to cite this article: *Ivanov S. K.* On computer simulation accuracy estimation with inaccurate parameters of binomial distribution // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2024. No 1(59). p. 61–75. DOI: `10.37972/chgpu.2024.59.1.002` EDN: CLSSNO

Received: 20.02.2024; accepted: 01.03.2024; published: 05.07.2024.

1. Введение. Метод статистического моделирования, называемый также методом статистических испытаний или методом Монте-Карло, уже с пионерских работ Улама [1] стал и остаётся традиционным методом исследования сложных систем роазличной природы [2–10]. При этом отдельные подсистемы, процессы, элементы представляются вероятностными распределениями, параметры которых с некоторой ограниченной точностью оцениваются путём усреднения результатов независимых натурных экспериментов или расчётов на частных моделях.

Таким образом, сами эти параметры можно считать случайными величинами, распределение которых хорошо аппроксимируется нормальным законом, то есть величины эти вполне определяются их средними значениями и дисперсией.

Рассмотрим стандартную схему метода статистического моделирования. В модели рассчитывается N независимых реализаций выходного показателя L_m, $m = 1,\, 2,\, \ldots,\, N$, и в качестве его оценки берётся выборочное среднее

$$L = \frac{1}{N}\sum_{m=1}^{N} L_m$$

Как показано в [7, 8], дисперсия L имеет две компоненты: $D(L) = D_1(L) + D_2(L)$, где $D_1(L)$ обусловлена конечностью числа реализаций N, а $D_2(L)$ – неточностью исходных данных. $D_1(L)$ оценивается выборочной дисперсией

$$D_1(L) = \frac{1}{N(N-1)}\sum_{m=1}^{N}\left(L_m - L\right)^2$$

Для $D_2(L)$ там же получено асимптотическое разложение. На практике для оценки этой компоненты используется его главный член, имеющий вид

$$D_2\left(L\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(a^{(i)}\right)^2\sigma_{ii} + 2\sum_{1\le i<j\le n} a^{(i)}a^{(j)}\sigma_{ij}$$

где $a^{(i)}$ – оценка производной по i-му параметру от математического ожидания выходного показателя, σ_{ij} – элементы ковариационной матрицы параметров.

Оценка компоненты дисперсии $D_2(L)$, обусловленной неточностью исходных данных позволяет не только уточнить доверительные интервалы оценки выходного показателя, но и дать разумный критерий для выбора количества реализаций N. Действительно, расчёты имеет смысл проводить до тех пор, пока выборочная оценка компоненты дисперсии $D_1(L)$, обусловленной конечностью N, не сравняется по порядку величины с $D_2(L)$.

Для оценивания производных, определяющих главный член асимптотического разложения $D_2(L)$ предлагались два способа.

В [5] предлагалось оценивать их варьированием параметров и использованием конечно-разностной аппроксимации. Этот подход имеет два недостатка. Во-первых, появляются дополнительные реализации модели, значительно увеличивающие время расчётов без увеличения их точности. Во-вторых, имеет место трудно разрешимое противоречие. С одной стороны для увеличения точности конечно-разностной аппроксимации мы должны уменьшать интервал варьирования. Но при этом у оценки производной появляется малый знаменатель, существенно увеличивающий дисперсию этой оценки. Уже первый недостаток делает практически нецелесообразным применение этого способа для сложных моделей.

В [2, 7, 8] предлагалось оценивать производные без увеличения числа реализаций путём усреднения получаемых значений выходного показателя $L_m, m = 1, 2, \ldots, N$, с весовым коэффициентом, зависящим от вида соответствующего распределения. А именно, оценка a производной $\frac{\partial M(L)}{\partial c}$ по параметру распределения с плотностью $f(c, x)$, в соответствии с которым в m-й реализации модели генерируется случайная величина ξ_m, имеет вид

$$a = \frac{1}{N}\sum_{m=1}^{N} L_m R(\xi_m), \tag{1}$$

$$R(x) = \frac{1}{f(c, x)}\frac{\partial f(c, x)}{\partial c}.$$

Аналогичная оценка может быть построена и для дискретного распределения. В частности, для оценки производной a по параметру K биномиального распределения (часто трактуемому как коэффициент готовности элементов моделируемой системы)

$$P\{\xi = k\} = C_n^k K^k (1-K)^{n-k}, 0 < K < 1,$$

$$R(x) = \frac{x - nK}{K(1-K)}.$$

Следует отметить, что в типичном случае систем с высоконадёжными элементами коэффициент готовности K элемента близок к 1. Следовательно и здесь появляется описанная выше проблема малого знаменателя.

В этой работе далее мы исследуем сходимость оценки производной a вида (1) по параметру K биномиального распределения и предложим для этой производной оценки с улучшенной сходимостью.

2. Исследование сходимости оценки a. Сходимость в среднем квадратичном определяется скоростью убывания дисперсии оценки (1) производной. По порядку величины это $O(1/N)$. Но нас интересует величина этой дисперсии при конечных N, поскольку при моделировании ограничиваются конечным и желательно минимальным количеством реализаций модели. Не умаляя общности, будем считать, что $0 \le L_m \le 1$. Обозначим $M(\cdot|\xi = i)$ оператор условного математического ожидания при условии $\xi = i$.

Теорема 1. Если $M(L^2|\,\xi = i) \ge d > 0$ для любого $i = 0, 1, \ldots, n$, то

$$\frac{nd}{NK(1-K)} - \frac{4n^2}{N} \le D(a) \le \frac{n}{NK(1-K)}. \tag{2}$$

Доказательство. Дисперсия $D(a)$ имеет вид

$$D\left(a\right)=\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{n}C_n^iK^i\left(1-K\right)^{n-i}\left(\frac{i-nK}{K\left(1-K\right)}\right)^2M(L^2|\xi=i)-$$

$$-\frac{1}{N}\left[\sum_{i=0}^{n}C_n^iK^i\left(1-K\right)^{n-i}\frac{i-nK}{K\left(1-K\right)}M(L|\xi=i)\right]^2\leq$$

$$\leq\frac{1}{NK^2\left(1-K\right)^2}\sum_{i=0}^{n}C_n^iK^i\left(1-K\right)^{n-i}\left(i-nK\right)^2=\frac{1}{NK^2\left(1-K\right)^2}\cdot nK\left(1-K\right)=$$

$$=\frac{n}{NK\left(1-K\right)}.$$

Таким образом, получена верхняя оценка в выражении (2) Теоремы 1.

Получим теперь нижнюю оценку. Во первых, аналогично предыдущему получаем первый член нижней оценки

$$\sum_{i=0}^{n}C_n^iK^i\left(1-K\right)^{n-i}\left(\frac{i-nK}{K\left(1-K\right)}\right)^2M(L^2|\xi=i)\geq$$

$$\geq\frac{d}{K^2\left(1-K\right)^2}\sum_{i=0}^{n}C_n^iK^i\left(1-K\right)^{n-i}\left(i-nK\right)^2=\frac{d}{K^2\left(1-K\right)^2}\cdot nK\left(1-K\right)=\frac{nd}{K\left(1-K\right)}.$$

Далее

$$|\sum_{i=0}^{n}C_n^iK^i\left(1-K\right)^{n-i}\frac{i-nK}{K\left(1-K\right)}M(L|\,\xi=i)|\leq$$

$$\leq\max\left|\sum_{nK<i}C_n^iK^i\left(1-K\right)^{n-i}\frac{i-nK}{K\left(1-K\right)}M(L|\,\xi=i)\right|$$

$$+\left|\sum_{i\leq nK}C_n^iK^i\left(1-K\right)^{n-i}\frac{i-nK}{K\left(1-K\right)}M(L|\,\xi=i)\right|.$$

Для первого члена под знаком максимума справедлива оценка

$$\left|\sum_{nK<i}C_n^iK^i\left(1-K\right)^{n-i}\frac{i-nK}{K\left(1-K\right)}M(L|\,\xi=i)\right|\leq$$

$$\leq\frac{1}{K\left(1-K\right)}\left(\sum_{i=0}^{n}C_n^iK^i\left(1-K\right)^{n-i}i-nK\sum_{nK<i}C_n^iK^i\left(1-K\right)^{n-i}\right)=$$

$$=\frac{n}{\left(1-K\right)}\left(1-\sum_{nK<i}C_n^iK^i\left(1-K\right)^{n-i}\right)\leq\frac{n}{\left(1-K\right)}.$$

Для него же справедлива и другая оценка

$$\left|\sum_{nK<i} C_n^i K^i (1-K)^{n-i} \frac{i-nK}{K(1-K)} M(L|\,\xi=i)\right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{K(1-K)}[\sum_{i=0}^{n} C_n^i K^i (1-K)^{n-i} (n-nK)] = \frac{n}{K}.$$

Отсюда

$$\left|\sum_{nK<i} C_n^i K^i (1-K)^{n-i} \frac{i-nK}{K(1-K)} M(L|\,\xi=i)\right| \leq \min\left\{\frac{n}{(1-K)}, \frac{n}{K}\right\} \leq 2n. \quad (3)$$

А поскольку для второго члена справедливо соотношение

$$\left|\sum_{i\leq nK} C_n^i K^i (1-K)^{n-i} \frac{i-nK}{K(1-K)} M(L|\,\xi=i)\right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{K(1-K)} \sum_{i\leq nK} C_n^i K^i (1-K)^{n-i} (nK-i) =$$

$$= \frac{1}{K(1-K)} \sum_{n(1-K)\leq n-i} C_n^{n-i} K^{n-i} (1-K)^i [(n-i)-n(1-K)],$$

то по аналогии с (3) отсюда выводим, что также

$$\left|\frac{1}{K(1-K)} \sum_{n(1-K)\leq n-i} C_n^{n-i} K^{n-i} (1-K)^i [(n-i)-n(1-K)]\right| \leq 2n.$$

То есть

$$|\sum_{i=0}^{n} C_n^i K^i (1-K)^{n-i} \frac{i-nK}{K(1-K)} M(L|\,\xi=i)| \leq 2n$$

и следовательно

$$-\left[\sum_{i=0}^{n} C_n^i K^i (1-K)^{n-i} \frac{i-nK}{K(1-K)} M(L|\,\xi=i)\right]^2 \geq -4n^2.$$

Собирая вместе полученные неравенства, приходим к (2), что и требовалось доказать.

Из (2) следует, что при фиксированном N дисперсия $D(a) \to \infty$ при $K \to 0$ или при $K \to 1$. То есть при значениях K близких к 0 или 1 необходимо просчитывать весьма большое число реализаций модели N, чтобы компенсировать увеличение дисперсии.

3. Улучшенные оценки производных. Для построения улучшенных оценок воспользуемся тем, что рассматриваемую биномиальную случайную величину ξ можно представить в виде суммы n независимых случайных величин ξ_i^0, $i = 1, 2, \ldots, n$, принимающих значения 0 и 1 с вероятностями $(1-K)$ и K, соответственно. Обозначим K_i показатель, соответствующий случайной величине ξ_i^0. При этом $K_i = K$. Тогда по правилу дифференцирования сложной функции

$$\frac{\partial M(L)}{\partial K} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial M(L)}{\partial K_i} \cdot \frac{\partial K_i}{\partial K} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial M(L)}{\partial K_i}.$$

Таким образом, задача свелась к получению оценок производных $\frac{\partial M(L)}{\partial K_i}$ Для этого продифференцируем равенство

$$M(L) = K_i M\left(L \,|\, \xi_i^0 = 1\right) + (1-K_i)\, M\left(L \,|\, \xi_i^0 = 0\right)$$

и получим

$$\frac{\partial M(L)}{\partial K_i} = M\left(L \,|\, \xi_i^0 = 1\right) - M\left(L \,|\, \xi_i^0 = 0\right).$$

Отсюда видно, что в качестве оценки $\frac{\partial M(L)}{\partial K_i}$ можно взять величину

$$\hat{a}_1(i) = \frac{1}{N_1} \sum_{m \in A_1} L_m - \frac{1}{N_0} \sum_{m \in A_0} L_m,$$

где A_0 – множество реализаций, в которых $\xi_i^0 = 0$, A_0 – множество реализаций, в которых $\xi_i^0 = 1$, $N_0 = |A_0|$, $N_1 = |A_1|$, $N_0 + N_0 = N$. Если какое-то из множеств пустое, то соответствующий член полагается равным 0. Улучшенной оценкой $\frac{\partial M(L)}{\partial K}$ будет служить величина

$$a_1 = \sum_{i=1}^{n} \hat{a}_1(i).$$

Уже по построению оценки a_1 видно, что у неё отсутствует свойственная оценке a проблема малых знаменателей. Построенные таким образом оценки мы будем называть улучшенными.

4. Смещение улучшенных оценок, несмещённые оценки . Смещённость оценки $\hat{a}_1(i)$ следует из Теоремы 2.

Теорема 2. Математическое ожидание $\hat{a}_1(i)$ имеет вид

$$M\hat{a}_1(i) = \frac{\partial M(L)}{\partial K_i} - (1-K)^N M\left(L \,|\, \xi_i^0 = 1\right) + K^N M\left(L \,|\, \xi_i^0 = 0\right).$$

Доказательство.

$$M\hat{a}_1(i) = \sum_{k=1}^{N-1} P\{N_1 = k\}\, M\left(\frac{1}{k} \sum_{m \in A_1} L_m - \frac{1}{N-k} \sum_{m \in A_0} L_m\right) +$$

$$+P\left\{N_1 = N\right\} M\left(\frac{1}{N}\sum_{m\in A_1} L_m\right) - P\left\{N_1 = 0\right\} M\left(\frac{1}{N}\sum_{m\in A_0} L_m\right) =$$

$$= M\left(L\,|\,\xi_i^0 = 1\right) - M\left(L\,|\,\xi_i^0 = 0\right) - (1-K)^N M\left(L\,|\,\xi_i^0 = 1\right) + K^N M\left(L\,|\,\xi_i^0 = 0\right).$$

Что и требовалось доказать.

Из Теоремы 2 следует асимптотическая несмещённость $\hat{a}_1(i)$. Действительно, смещение

$$\Delta\{\hat{a}_1(i) = -(1-K)^N M\left(L\,|\,\xi_i^0 = 1\right) + K^N M\left(L\,|\,\xi_i^0 = 0\right)$$

при возрастании N стремится к нулю с экспоненциальной скоростью: $\Delta\{\hat{a}_1(i) = O(\delta^N)$, где $\delta = \max\{K, 1-K\}$.

Как следствие получаем

$$\Delta\{a_1(i) = -(1-K)^N \sum_{i=1}^{n} M\left(L\,|\,\xi_i^0 = 1\right) + K^N \sum_{i=1}^{n} M\left(L\,|\,\xi_i^0 = 0\right).$$

Если $(r-1)$ раз применить стандартный приём, когда из рассматриваемой оценки вычитается выборочная оценка её смещения, то можно получить оценку $\hat{a}_r(i)$, смещение которой имеет порядок $O(\delta^{rN})$:

$$\hat{a}_r(i) = \left(\sum_{j=0}^{r-1} (1-K)^{jN}\right) \frac{1}{N_1}\sum_{m\in A_1} L_m - \left(\sum_{j=0}^{r-1} K^{jN}\right) \frac{1}{N_0}\sum_{m\in A_0} L_m.$$

Смещение такой оценки равно

$$\Delta\{\hat{a}_r(i) = -(1-K)^{rN} M\left(L\,|\,\xi_i^0 = 1\right) + K^{rN} M\left(L\,|\,\xi_i^0 = 0\right)$$

а следовательно смещение оценки $a_r = \sum\limits_{i=1}^{n} \hat{a}_r(i)$ равно

$$\Delta(a_r) = -(1-K)^{rN} \sum_{i=1}^{n} M\left(L\,|\,\xi_i^0 = 1\right) + K^{rN} \sum_{i=1}^{n} M\left(L\,|\,\xi_i^0 = 0\right).$$

Производя предельный переход r$\to\infty$, можно получить оценку a_∞, несмещённую при всех N

$$a_\infty = \sum_{i=1}^{n} \hat{a}_\infty(i)$$

$$\hat{a}_\infty(i) = \left(\frac{1}{1-(1-K)^N}\right) \frac{1}{N_1}\sum_{m\in A_1} L_m - \left(\frac{1}{1-K^N}\right) \frac{1}{N_0}\sum_{m\in A_0} L_m.$$

Дисперсия этой оценки уже не остаётся ограниченной на всём интервале значений K, однако при $K \to 0$ и $K \to 1$ она всё же растёт существенно медленнее, чем дисперсия a, как это будет продемонстрировано далее.

5. Дисперсия улучшенных оценок. Для исследования дисперсии улучшенных оценок нам понадобится следующее утверждение общего характера.

Лемма 1. Для $K \in (0,1)$ справедлива формула

$$\sum_{j=1}^{N} C_N^j \frac{(1-K)^j K^{N-j}}{j} = \sum_{j=0}^{N-1} \frac{K^j - K^N}{N-j}. \tag{4}$$

Доказательство. Обозначим $S(K)$ левую часть (4). Непосредственным дифференцированием получаем уравнение

$$K(1-K)\frac{dS(K)}{dK} = 1 + K^N + N(1-K)S(K).$$

Нас интересуют его решения вида

$$S(K) = \sum_{j=0}^{N} b_i K^i, \tag{5}$$

удовлетворяющие условию $S(K) \to 0$ при $K \to 1$. Подставляя (5) в уравнение, методом неопределённых коэффициентов находим

$$b_j = \frac{1}{N-j},\ j = 0,1,\ldots,N-1;\ b_N = -\sum_{j=0}^{N-1}\frac{1}{N-j}.$$

Откуда

$$S(K) = \sum_{j=0}^{N} b_i K^i = \sum_{j=0}^{N-1}\frac{1}{N-j}K^i + (-\sum_{j=0}^{N-1}\frac{1}{N-j})K^N = \sum_{j=0}^{N-1}\frac{K^j - K^N}{N-j}.$$

Что и требовалось доказать.

Из Леммы 1 следует, что

$$\sum_{j=1}^{N} C_n^j \frac{(1-K)^j K^{N-j}}{j} \le \sum_{j=0}^{N-1}\frac{K^j}{N-j} = \sum_{j=0}^{[\frac{N}{2}]}\frac{K^j}{N-j} + \sum_{j=[\frac{N}{2}]+1}^{N-1}\frac{K^j}{N-j} \le$$

$$\le \frac{1}{N-[\frac{N}{2}]}\sum_{j=0}^{[\frac{N}{2}]}K^j + K^{[\frac{N}{2}]+1}\sum_{j=0}^{N-[\frac{N}{2}]-2}K^j \le \left(\frac{2}{N} + K^{\frac{N}{2}}\right)\sum_{i=0}^{\infty}K^i = \tag{6}$$

$$= \frac{1}{1-K}\left(\frac{2}{N} + K^{\frac{N}{2}}\right).$$

Теорема 3. Справедлива следующая верхняя оценка для дисперсии $D\{\hat{a}_1(i)\}$

$$D\{\hat{a}_1(i)\} \le \frac{1}{2}\min\left\{1, \frac{1}{K(1-K)}\left(\frac{1}{N} + \frac{K^{\frac{N}{2}+1} + (1-K)^{\frac{N}{2}+1}}{2}\right)\right\} + \tag{7}$$

$$+3K^N + 3(1-K)^N.$$

Доказательство.

$$M(\hat{a}_1(i)^2) = \sum_{j=1}^{N-1} P\{N_1 = j\} M(\frac{1}{j} \sum_{m\in A_1} L_m - \frac{1}{N-j} \sum_{m\in A_0} L_m)^2 +$$

$$+P\{N_1 = N\} M\left(\frac{1}{N}\sum_{m\in A_1} L_m\right)^2 + P\{N_1 = 0\} M\left(\frac{1}{N}\sum_{m\in A_0} L_m\right)^2 =$$

$$= \sum_{j=1}^{N-1} P\{N_1 = j\}\left(\frac{D(L\,|\,\xi_i^0 = 1)}{j} + \frac{D(L\,|\,\xi_i^0 = 0)}{N-j}\right) + P\{N_1 = N\}\frac{D(L\,|\,\xi_i^0 = 1)}{N} +$$

$$+P\{N_1 = 0\}\frac{D(L\,|\,\xi_i^0 = 0)}{N} + \sum_{j=1}^{N-1} P\{N_1 = j\}\left(M\left(L\,|\,\xi_i^0 = 1\right) - M\left(L\,|\,\xi_i^0 = 0\right)\right)^2 +$$

$$+P\{N_1 = N\}\left(M\left(L\,|\,\xi_i^0 = 1\right)\right)^2 + P\{N_1 = 0\}\left(M\left(L\,|\,\xi_i^0 = 0\right)\right)^2.$$

Поскольку $0 \le L \le 1$, то

$$0 \le M(L\,|\,\xi_i^0 = 1) \le 1,\ 0 \le M(L\,|\,\xi_i^0 = 0) \le 1,\ D(L\,|\,\xi_i^0 = 1) \le \tfrac{1}{4},$$
$$D(L\,|\,\xi_i^0 = 0) \le \tfrac{1}{4}.$$

Отсюда

$$M(\hat{a}_1(i)^2) \le \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{N} \frac{C_N^j K^j (1-K)^{N-j}}{j} + \frac{1}{4}\sum_{j=0}^{N-1} \frac{C_N^j K^j (1-K)^{N-j}}{N-j} +$$

$$+[M\left(L\,|\,\xi_i^0 = 1\right) - M\left(L\,|\,\xi_i^0 = 0\right)]^2 + K^N + (1-K)^N = .$$

$$\frac{1}{4}\sum_{j=1}^{N} \frac{C_N^j K^j (1-K)^{N-j}}{j} + \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{N} \frac{C_N^j (1-K)^j K^{N-j}}{N-j} +$$

$$+(M\left(L\,|\,\xi_i^0 = 1\right) - M\left(L\,|\,\xi_i^0 = 0\right))^2 + K^N + (1-K)^N.$$

С использованием (6) и очевидного неравенства

$$\sum_{j=1}^{N} C_N^j \frac{(1-K)^j K^{N-j}}{j} \le \sum_{j=0}^{N} C_N^j (1-K)^j K^{N-j} = 1$$

получаем

$$M(\hat{a}_1(i)^2) \le \frac{1}{4}[\frac{1}{1-K}\left(\frac{2}{N} + K^{\frac{N}{2}}\right) + \frac{1}{K}\left(\frac{2}{N} + (1-K)^{\frac{N}{2}}\right)] +$$

$$+[M\left(L\,|\,\xi_i^0 = 1\right) - M\left(L\,|\,\xi_i^0 = 0\right)]^2 + K^N + (1-K)^N \le$$

$$\le \frac{1}{2}\min\left\{1, \frac{1}{K(1-K)}\left(\frac{1}{N} + \frac{K^{\frac{N}{2}+1} + (1-K)^{\frac{N}{2}+1}}{2}\right)\right\} +$$

$$+[M\left(L\,|\,\xi_i^0 = 1\right) - M\left(L\,|\,\xi_i^0 = 0\right)]^2 + K^N + (1-K)^N.$$

По Теореме 2

$$[M\hat{a}_1(i)]^2 = [M\left(L\,|\,\xi_i^0=1\right) - M\left(L\,|\,\xi_i^0=0\right) - (1-K)^N M\left(L\,|\,\xi_i^0=1\right) + $$
$$+K^N M\left(L\,|\,\xi_i^0=0\right)]^2 = [M\left(L\,|\,\xi_i^0=1\right) - M\left(L\,|\,\xi_i^0=0\right)]^2 +$$
$$+[(1-K)^N M\left(L\,|\,\xi_i^0=1\right) - K^N M\left(L\,|\,\xi_i^0=0\right)]^2 +$$
$$+2\left(K^N + (1-K)^N\right) M\left(L\,|\,\xi_i^0=1\right) M\left(L\,|\,\xi_i^0=0\right) -$$
$$-2(1-K)^N M\left(L\,|\,\xi_i^0=1\right)^2 - 2K^N M\left(L\,|\,\xi_i^0=0\right)^2 \geq$$
$$\geq [M\left(L\,|\,\xi_i^0=1\right) - M\left(L\,|\,\xi_i^0=0\right)]^2 - 2K^N - 2(1-K)^N.$$

Собирая полученные оценки, получаем

$$D\{\hat{a}_1(i) = M([\hat{a}_1(i)]^2) - [M\{\hat{a}_1(i)\}]^2 \leq$$
$$\leq \frac{1}{2}\min\left\{1, \frac{1}{K(1-K)}\left(\frac{1}{N} + \frac{K^{\frac{N}{2}+1} + (1-K)^{\frac{N}{2}+1}}{2}\right)\right\} + 3K^N + 3(1-K)^N.$$

Что и требовалось доказать.

Для дисперсии оценки $a_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} \hat{a}_1(i)$ имеем

$$D(a_1) = D\sum_{i=1}^{n}\hat{a}_1(i)\} \leq (\sum_{i=1}^{n} D(\hat{a}_1(i))^{\frac{1}{2}})^2 \leq$$
$$\leq \frac{n^2}{2}\min\left\{1, \frac{1}{K(1-K)}\left(\frac{1}{N} + \frac{K^{\frac{N}{2}+1} + (1-K)^{\frac{N}{2}+1}}{2}\right)\right\} + 3n^2K^N + 3n^2(1-K)^N.$$

Для дисперсий $D(\hat{a}_r(i))$ и $D(a_r)$ справедливы неравенства

$$D\{\hat{a}_r(i) \leq r^2 D\{\hat{a}_1(i); \quad D(a_r) \leq r^2 D(a_1).$$

6. Численный пример. Рассмотрим простую модель, в которой генерируется биномиальная случайная величина ξ, такая что $P\{\xi\ =1\}=K$,$P\{\xi\ =0\}$=1-K. Математическое ожидание выходного показателя и его дисперсия при условии ξ =0 равны L_0 и D_0. Соответствующие величины при условии ξ =1 равны L_1 и D_1. N, как и раньше, обозначает число реализаций.

Для данной модели выражения для дисперсии и смещения оценок производных от выходного показателя по K принимают следующий вид:

$$D(a) = \frac{D_1(1-K) + D_0K + (L_1(1-K) + L_0K)^2}{NK(1-K)};$$

$$D(a_\infty) = \frac{D_0}{(1-K^N)^2}\sum_{m=0}^{N-1}\frac{K^m - K^N}{N-m} + \frac{L_0^2K^N}{(1-K^N)^2} + 2\frac{L_0L_1K^N(1-K)^N}{(1-K^N)(1-(1-K)^N)} +$$
$$+\frac{D_1}{(1-(1-K)^N)^2}\sum_{m=0}^{N-1}\frac{(1-K)^m - (1-K)^N}{N-m} + \frac{L_1^2(1-K)^N}{(1-(1-K)^N)^2};$$

$$D(a_1) = D_0 \sum_{m=0}^{N-1} \frac{K^m - K^N}{N-m} + D_1 \sum_{m=0}^{N-1} \frac{(1-K)^m - (1-K)^N}{N-m} +$$

$$+L_0^2 K^N (1-K^N) + L_1^2 (1-K)^N \left(1 - \left(1-K\right)^N\right) + +2L_0 L_1 K^N (1-K)^N;$$

$$\Delta(a_1) = L_0 K^N - L_1 (1-K)^N .$$

В таблицах 1-3 приведены результаты расчётов зависимости $D(a)$, $D(a_\infty)$, $D(a_1) + \Delta^2(a_1)$ от N при $L_0 = 0,5$; L_1 =0,6 и $D_0 = D_1 = 0,0004$. Расчёты проводились при K =0,7; K =0,85 и K =0,9.

Графики соответствующих зависимостей приведены на рисунках 1-3.

Эти простые примеры наглядно показывают, что улучшенные оценки демонстрируют существенно более быструю сходимость с ростом N по сравнению с предлагавшимися ранее оценками вида a.

N	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$D(a)$	0,6698	0,4465	0,3349	0,2679	0,2233	0,1914	0,1674	0,1488	0,134	0,1218
$D(a_\infty)$	0,5682	0,2184	0,1091	0,0624	0,0386	0,025	0,0167	0,0113	0,0078	0,0054
$D(a_1)+$ $\Delta^2(a_1)$	0,1554	0,0959	0,0634	0,0433	0,0301	0,0211	0,0148	0,0104	0,0074	0,0052

Таблица 1. Результаты расчётов для $K = 0,7$.

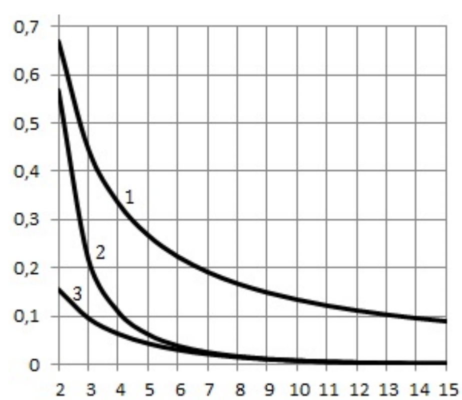

Рис. 1. Зависимость от N: 1 – D(a), 2 – D(a_∞), 3 – D(a_1) + $\Delta^2(a_1)$; $K = 0,7$.

На графике непосредственно видна гораздо более быстрая сходимость улучшенных оценок a_1 и a_∞ по сравнению с ранее предлагавшейся оценкой a.

Второй график показывает, что более быстрая сходимость улучшенных оценок a_1 и a_∞ по сравнению с ранее предлагавшейся оценкой aсохраняется и при приближении K к единице.

Из рассмотрения последнего графика видно, что и при K ещё более близком к единице улучшенные оценки a_1 и a_∞ сходятся существенно быстрее ранее

N	3	5	7	9	11	13	15	17
$D(a)$	0,6944	0,4167	0,2976	0,2315	0,1894	0,1603	0,1389	0,1225
$D(a_\infty)$	1,0367	0,3593	0,1743	0,0987	0,0609	0,0396	0,0266	0,0184
$D(a_1)+\Delta^2(a_1)$	0,1550	0,1113	0,0806	0,0583	0,0423	0,0307	0,0222	0,0161

Таблица 2. Результаты расчётов для $K = 0,85$.

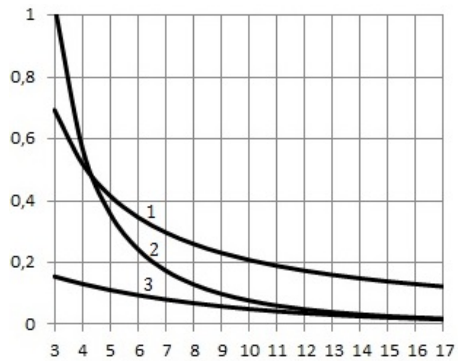

Рис. 2. Зависимость от N: 1 – $D(a)$, 2 – $D(a_\infty)$, 3 – $D(a_1)+\Delta^2(a_1)$; $K = 0,85$.

N	4	6	8	10	12	14	16	18
$D(a)$	0,7236	0,4824	0,3618	0,2894	0,2412	0,2067	0,1809	0,1608
$D(a_\infty)$	1,3883	0,6061	0,3325	0,2062	0,1377	0,0967	0,0703	0,0524
$D(a_1)+\Delta^2(a_1)$	0,1643	0,1332	0,108	0,0876	0,071	0,0576	0,0468	0,0379

Таблица 3. Результаты расчётов для $K = 0,9$.

предлагавшейся оценки a. Сравнение трёх графиков показывает также, что при приближении K к единице сходимость улучшенной оценки a_∞ всё-таки несколько замедляется, как и указывалось ранее. В то же время на сходимость улучшенной оценки a_1 изменение K практически не оказывает влияния.

Заключение. Проведённое в данной работе исследование сходимости оценок производных от выходного показателя модели по параметру K биномиального распределения показывают существенное улучшение сходимости предложенных улучшенных оценок по сравнению с предлагавшимися ранее. В особенности это относится к практически значимому случаю K близких к 1. Это позволяет рекомендовать их к использованию при оценке точности результатов компьютерного моделирования.

ДОПОЛНИТЕЛЬНО

Вклад авторов. 100%.

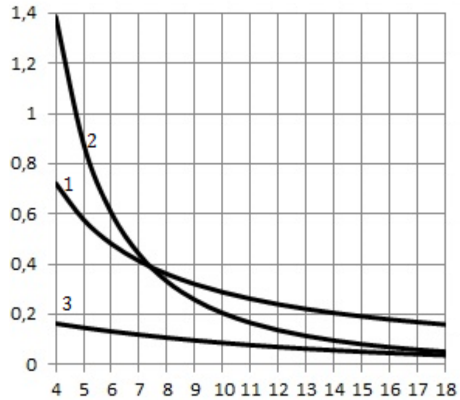

Рис. 3. Зависимость от N: 1 – $D(a)$, 2 – $D(a_\infty)$, 3 – $D(a_1) + \Delta^2(a_1)$; $K = 0,9$.

Конфликт интересов. Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.
Источник финансирования. Авторы заявляют об отсутствии внешнего финансирования при проведении исследования.

ADDITIONAL INFORMATION

Authors' contribution. 100%.
Competing interests. The authors declare that they have no competing interests.
Funding. This study was not supported by any external sources of funding.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Metropolis N., Ulam S. The Monte Carlo Method // Journal of the American Statistical Association. 1949. Т. 44, № 247. С. 335–341.
[2] Бусленко Н. П., Шрейдер Ю. А. Метод статистических испытаний (метод Монте-Карло). Физматлит, 1961. 228 с.
[3] Александров В. М., Сысоев В. Н., Шеменёва В. В. Стохастическая оптимизация систем // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. 1968. № 5. С. 42–51.
[4] Соболь И. М. Метод Монте-Карло. Наука, 1968. 64 с.
[5] Полляк Ю. Г. Вероятностное моделирование на цифровых электронных вычислительных машинах. Советское радио, 1971. 400 с.
[6] Ермаков С. М. Метод Монте-Карло и смежные вопросы. Наука, 1971. 328 с.
[7] Ивницкий В. А. Об оценке точности результатов моделирования сложных систем с неточной входной информацией при схеме независимых испытаний // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. 1974. № 4. С. 31–40.
[8] Шаракшанэ А. С., Железнов И. Г., Ивницкий В. А. Сложные системы. Высшая школа, 1977. 247 с.
[9] Fishman G. S. Monte Carlo: concepts, algorithms, and applications. Springer, 1996. 698 p.
[10] Quantum Monte Carlo simulations of solids / W. M. C. Foulkes [et al.] // Reviews of Modern Physics. 2001. Vol. 73, no. 1. P. 33–83.

REFERENCES

[1] Metropolis N., Ulam S. The Monte Carlo Method // Journal of the American Statistical Association. 1949. Vol. 44, no. 247. P. 335–341.

[2] Buslenko N. P., Shreyder U. A. Method of statistical simulation (Monte Carlo method). FisMathLit, 1961. 228 p. In Russian.

[3] Aleksandrov V. M., Sysoev V. N., Shemeniova V. V. Stochastic optimization of systems // Proceedings of the USSR Academy of Sciences. Technical sybernetics. 1968. no. 5. P. 42–51. In Russian.

[4] Sobol I. M. Monte Carlo method. Nauka, 1968. 64 p. In Russian.

[5] Polliak U. G. Probabilistic modelling on digital computers. Soviet radio, 1971. 400 p. In Russian.

[6] Ermakov S. M. Monte Carlo method and related issues. Science, 1971. 328 p. In Russian.

[7] Ivnitsky V. A. On estimation of complex systems modeling accuracy with inaccurate input information under independent testing scheme // Proceedings of the USSR Academy of Sciences. Technical sybernetics. 1974. no. 4. 31–40 p. In Russian.

[8] Sharakshane A. S., Zheleznov I. G., Ivnitsky V. A. Complex systems. Higher school, 1977. 247 p. In Russian.

[9] Fishman G. S. Monte Carlo: concepts, algorithms, and applications. Springer, 1996. 698 p.

[10] Quantum Monte Carlo simulations of solids / W. M. C. Foulkes [et al.] // Reviews of Modern Physics. 2001. Vol. 73, no. 1. P. 33–83.