

А. Я. Корнилов¹, В. Н. Орлов²

ОБ ОДНОМ АНАЛИТИЧЕСКОМ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ ОБТЕКАНИЯ ТАНДЕМА ИЗ ДВУХ ПРОФИЛЕЙ ПОТОКОМ ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

¹Московский государственный университет технологий и управления им. К. Г. Разумовского (ПКУ), Москва, Россия

²Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, Москва, Россия

Аннотация. В работе рассмотрено безотрывное обтекание системы из двух проницаемых тонких профилей, установившимся потенциальным потоком идеальной невесомой несжимаемой жидкости. Получено конформное отображение физической области на канонический прямоугольник. Для решения рассматриваемой задачи использован аппарат эллиптических функций. Представлен вариант аналитического решения.

Ключевые слова: идеальная жидкость, тета-функции Якоби, конформно-отображающая функция, плоская задача гидродинамики, тандем тонких профилей, подъемная сила.

Корнилов Александр Яковлевич, кандидат физико-математических наук, доцент, Московский государственный университет технологий и управления им. К. Г. Разумовского (ПКУ); e-mail: a.kornilov@mgutm.ru; AuthorID: 161334

Орлов Виктор Николаевич, доктор физико-математических наук, доцент, Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, Москва, Россия; e-mail: orlovvn@mgsu.ru; <https://orcid.org/0000-0001-7606-5490>; AuthorID: 711175

для цитирования: Корнилов А. Я., Орлов В. Н. Об одном аналитическом решении задачи обтекания тандема из двух профилей потоком идеальной несжимаемой жидкости // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2024. № 1(59). С. 76–87. DOI: 10.37972/chgpu.2024.59.1.004 EDN: ENDINA

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0).

A. Ya. Kornilov¹, V. N. Orlov²

ON ONE ANALYTICAL SOLUTION TO THE PROBLEM OF FLOW AROUND A TANDEM FROM TWO PROFILES BY A FLOW OF IDEAL INCOMPRESSIBLE FLUID

¹*Moscow State University of Technology and Management. K.G. Razumovsky (PKU),
Moscow, Russia*

²*National Research Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia*

Abstract. The work considers the continuous flow around a system of two permeable thin profiles by a steady potential flow of an ideal weightless incompressible fluid. A conformal mapping of the physical domain onto a canonical rectangle is obtained. To solve the problem under consideration, the apparatus of elliptic functions is used. A variant of the analytical solution is presented

Keywords: ideal fluid, Jacobi theta functions, conformal mapping function, plane hydrodynamics problem, tandem of thin profiles, lifting force.

Alexander Ya. Kornilov, Candidate of Physics and Mathematics, Docent; e-mail: a.kornilov@mgutm.ru; AuthorID: 161334

Viktor N. Orlov, Doctor of Physical and Mathematics, Docent; e-mail: orlovvn@mgsu.ru; <https://orcid.org/0000-0001-7606-5490>; AuthorID: 711175

to cite this article: Kornilov A. Ya., Orlov V. N. On one analytical solution to the problem of flow around a tandem from two profiles by a flow of ideal incompressible fluid // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2024. No 1(59). p. 76–87. DOI: 10.37972/chgpu.2024.59.1.004 EDN: ENDIHA

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение. Аналитический вид конформного отображения внешности двух симметричных отрезков равной длины на прямоугольник через тета-функции Якоби получено в монографиях Л.И. Седова [1]. В этой же работе, в случае, когда отрезки равной длины расположены не симметрично, внешность этих отрезков конформно отображается на кольцо при помощи сигма-функции Вейерштрасса. В. Коппенфельса и Ф. Штальмана [2] внешности двух отрезков на прямоугольник также приведен с помощью специальных функций Вейерштрасса. В статье Петровой Т.Н. [3] численно получено конформное отображение внешности двух контуров на прямоугольник. В отличии от результатов статьи [3], в данной работе представлен аналитический вариант получения вышеуказанного отображения.

1. Конформное отображение плоскости с двумя исключенными параллельными отрезками на прямоугольник. Пусть в плоскости $z = x + iy$ заданы два исключенные отрезка AC и BD , длинами l_1 и l_2 соответственно, и расположенные параллельно друг другу (рис. 1). Не нарушая общности задачи, система координат вводится с началом в точке A , а координаты B точки обозначаются $(-L, H)$. Требуется найти конформное отображение данной области с дополнительно введенными разрезами $1E - 2E$ и $3E - 4E$ на прямоугольник со сторонами π и $\pi|\tau|/2$ такое, что его первая производная была бы двоякопериодическая функция с основными периодами π и $\pi\tau$ (рис. 2). Из нарушения углов при обходе точек A, C, B, D и E можно найти

$$\frac{dz}{d\zeta} = N \frac{\vartheta_1(\zeta - a)\vartheta_1(\zeta + a)\vartheta_4(\zeta - b)\vartheta_4(\zeta + b)}{\vartheta_1^2(\zeta - ic)\vartheta_1^2(\zeta + ic)}, \quad (1)$$

где N — некоторая действительная постоянная, так как на горизонтальных сторонах прямоугольника функция $dz/d\zeta$ принимает чисто действительные значения.

В силу произвола выбора вертикальных разрезов в плоскости z координаты образов точек C и D можно заранее задать в плоскости $\zeta = \xi + i\eta$.

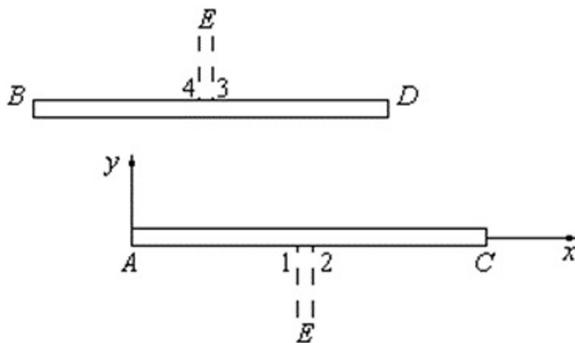


Рис. 1

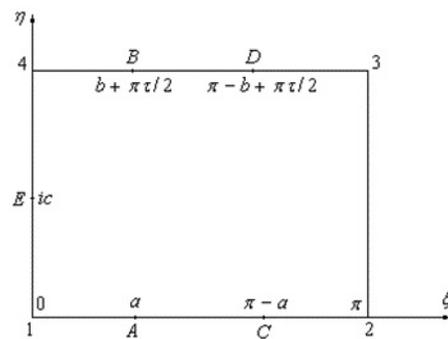


Рис. 2

Неизвестными параметрами конформного отображения являются N , a , b , c и $q = \exp(-\pi|\tau|)$, которые должны быть определены из геометрических характеристик границы области (рис. 1).

2. Производная конформно-отображающей функции. Для нахождения параметров конформного отображения, а также функцию $z = z(\zeta)$, конформно-отображающую плоскость с двумя исключенными отрезками на канонический прямоугольник, представление (1) малоэффективное. Получим иное выражение этой функции. Для этого в начале приведем выражения логарифмических производных от тета-функций Якоби [4]:

$$\frac{\vartheta'_4}{\vartheta_4}(\zeta) = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n \sin 2n\zeta}{1 - q^{2n}}, \quad (2)$$

$$\frac{\vartheta'_1}{\vartheta_1}(\zeta) = \operatorname{ctg} \zeta + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2n} \sin 2n\zeta}{1 - q^{2n}}, \quad (3)$$

$$\frac{d}{d\zeta} \frac{\vartheta'_4}{\vartheta_4}(\zeta) = 8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nq^n \cos 2n\zeta}{1 - q^{2n}}, \quad (4)$$

$$\frac{d}{d\zeta} \frac{\vartheta'_1}{\vartheta_1}(\zeta) = -\frac{1}{\sin^2 \zeta} + 8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nq^{2n} \cos 2n\zeta}{1 - q^{2n}}, \quad (5)$$

где $\vartheta_i = \vartheta_i(\zeta)$ $i = 1, 2, 3, 4$ — тета-функции Якоби.

Учитывая, что функция $dz/d\zeta$ на горизонтальных сторонах прямоугольника принимает чисто действительные значения, свойства функций (3) и (4), а также теорему Вейерштрасса - Якоби [5], рациональную дробь (1) можно записать в следующем виде:

$$\frac{dz}{d\zeta}(\zeta) = A \left[\frac{d}{d\zeta} \frac{\vartheta'_1}{\vartheta_1}(\zeta - ic) + \frac{d}{d\zeta} \frac{\vartheta'_1}{\vartheta_1}(\zeta + ic) \right] + iB \left[\frac{\vartheta'_1}{\vartheta_1}(\zeta - ic) - \frac{\vartheta'_1}{\vartheta_1}(\zeta + ic) \right], \quad (6)$$

где A , B — произвольные действительные параметры.

Нетрудно проверить, что при прибавлении к аргументу ζ число $\pi\tau/2$ функция (6) принимает вид:

$$\frac{dz}{d\zeta}(\zeta + \frac{\pi\tau}{2}) = A \left[\frac{d}{d\zeta} \frac{\vartheta'_4}{\vartheta_4}(\zeta - ic) + \frac{d}{d\zeta} \frac{\vartheta'_4}{\vartheta_4}(\zeta + ic) \right] + iB \left[\frac{\vartheta'_4}{\vartheta_4}(\zeta - ic) - \frac{\vartheta'_4}{\vartheta_4}(\zeta + ic) \right]. \quad (7)$$

Из (6) и (7) с учетом функций (2) - (5), получаем конформно-отображающую функцию:

$$z(\zeta) = A \left[\frac{\vartheta'_1}{\vartheta_1}(\zeta - ic) + \frac{\vartheta'_1}{\vartheta_1}(\zeta + ic) \right] + iB \ln \frac{\vartheta_1(\zeta - ic)}{\vartheta_1(\zeta + ic)} + C, \quad (8)$$

где

$$= -A \left[\frac{\vartheta_1'}{\vartheta_1}(a - ic) + \frac{\vartheta_1'}{\vartheta_1}(a + ic) \right] - iB \ln \frac{\vartheta_1(a - ic)}{\vartheta_1(a + ic)}. \quad (9)$$

Для аргумента $\zeta + \pi\tau/2$ имеем

$$z(\zeta + \frac{\pi\tau}{2}) = -2(cB + iA) + A \left[\frac{\vartheta_4'}{\vartheta_4}(\zeta - ic) + \frac{\vartheta_4'}{\vartheta_4}(\zeta + ic) \right] + iB \ln \frac{\vartheta_4(\zeta - ic)}{\vartheta_4(\zeta + ic)} + C. \quad (10)$$

Функции (8) и (9) можно переписать в другом виде, удобном для реализации численных экспериментов:

$$z(\zeta) = 2A \left[4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2n} \operatorname{ch} 2nc \cdot \sin 2n\zeta}{1 - q^{2n}} + \frac{\sin 2\zeta}{\operatorname{ch} 2c - \cos 2\zeta} \right] + \quad (11)$$

$$+ 2B \left[2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2n} \operatorname{sh} 2nc \cdot \sin 2n\zeta}{n(1 - q^{2n})} - \operatorname{arctg}(cthc \cdot \operatorname{tg} \zeta) \right] + C,$$

$$z(\zeta + \frac{\pi\tau}{2}) = -2(cB + iA) + 8A \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n \operatorname{ch} 2nc \cdot \sin 2n\zeta}{1 - q^{2n}} + \quad (12)$$

$$+ 4B \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n \operatorname{sh} 2nc \cdot \sin 2n\zeta}{n(1 - q^{2n})} + C,$$

$$C = -2A \left[4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2n} \operatorname{ch} 2nc \cdot \sin 2na}{1 - q^{2n}} + \frac{\sin 2a}{\operatorname{ch} 2c - \cos 2a} \right] - \quad (13)$$

$$- 2B \left[2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2n} \operatorname{sh} 2nc \cdot \sin 2na}{n(1 - q^{2n})} - \operatorname{arctg}(cthc \cdot \operatorname{tg} a) \right].$$

При этом функции (6) и (7) примут вид:

$$\frac{dz}{d\zeta}(\zeta) = 4A \left[4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nq^{2n} \operatorname{ch} 2nc \cdot \cos 2n\zeta}{1 - q^{2n}} + \frac{\operatorname{ch} 2c \cdot \cos 2\zeta - 1}{(\operatorname{ch} 2c - \cos 2\zeta)^2} \right] + \quad (14)$$

$$+ 2B \left[2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2n} \operatorname{sh} 2nc \cdot \cos 2n\zeta}{1 - q^{2n}} - \frac{\operatorname{sh} 2c}{\operatorname{ch} 2c - \cos 2\zeta} \right],$$

$$\frac{dz}{d\zeta}(\zeta + \frac{\pi\tau}{2}) = 16 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nq^n \operatorname{ch} 2nc \cdot \cos 2n\zeta}{1 - q^{2n}} + 8B \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n \operatorname{sh} 2nc \cdot \cos 2n\zeta}{1 - q^{2n}}. \quad (15)$$

3. Определение параметров конформного отображения. Поскольку функция (1) в точках $\zeta = a$, $\zeta = \pi - a$, $\zeta = b + \pi\tau/2$ и $\zeta = \pi - b + \pi\tau/2$ обращается в нуль, то функции (14) и (15) в этих же точках должна принимать нулевое значение, т. е.

$$2A \left[4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nq^n \operatorname{ch} 2nc \cdot \cos 2na}{1 - q^{2n}} + \frac{\operatorname{ch} 2c \cdot \cos 2a - 1}{(\operatorname{ch} 2c - \cos 2a)^2} \right] + \quad (16)$$

$$+ B \left[4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2n} \operatorname{sh} 2nc \cdot \cos 2na}{1 - q^{2n}} - \frac{\operatorname{sh} 2c}{\operatorname{ch} 2c - \cos 2a} \right] = 0,$$

$$2A \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nq^n \operatorname{ch} 2nc \cdot \cos 2nb}{1 - q^{2n}} + B \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2n} \operatorname{sh} 2nc \cdot \cos 2nb}{1 - q^{2n}} = 0. \quad (17)$$

Запишем условия задания длин исключенных отрезков

$$\zeta(\pi - a) - z(a) = l_1 \quad \zeta\left(\pi - b + \frac{\pi\tau}{2}\right) - z\left(b + \frac{\pi\tau}{2}\right) = l_2,$$

которые с учетом (11) - (13) примут вид:

$$l_1 = -4A \left[4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2n} \operatorname{ch} 2nc \cdot \sin 2na}{1 - q^{2n}} + \frac{\sin 2a}{\operatorname{ch} 2c - \cos 2a} \right] - 8B \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2n} \operatorname{sh} 2nc \cdot \sin 2na}{n(1 - q^{2n})}, \quad (18)$$

$$l_2 = -16 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n \operatorname{ch} 2nc \cdot \sin 2nb}{1 - q^{2n}} - 8B \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n \operatorname{sh} 2nc \cdot \sin 2nb}{n(1 - q^{2n})}. \quad (19)$$

Из условия задания расстояния между отрезками с учетом (12), находим

$$A = -\frac{H}{2}, \quad (20)$$

а из смещения передней кромки (точка B) на расстояние $-L$ от точки A по горизонтали получаем:

$$L = 2cB - 8A \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n \operatorname{ch} 2nc \cdot \sin 2nb}{1 - q^{2n}} - 4B \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n \operatorname{sh} 2nc \cdot \sin 2nb}{n(1 - q^{2n})} - C. \quad (21)$$

$$B = H \cdot \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nq^n \operatorname{ch} 2nc \cdot \cos 2nb}{1 - q^{2n}}}{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n \operatorname{sh} 2nc \cdot \cos 2nb}{1 - q^{2n}}}. \quad (22)$$

Таким образом, уравнения (16), (18), (19) и (21) служат для определения четырех параметров конформного отображения: a , b , C и q .

4. Постановка задачи и аналитическое решение. Пусть тандем из двух тонких профилей разной длины максимальной хорды l_1 и l_2 обтекается потенциальным установившимся потоком идеальной несжимаемой жидкости. Согласно линейной теории [1] в силу малости кривизны α контуров тонких профилей за исключением передних кромок (точки A и B) краевые условия в физической области течения $\tilde{z} = \tilde{x} + i\tilde{y}$ можно сносить на границы исключенных отрезков в плоскости $z = x + iy$ (рис. 3).

Считаются известными: координаты передней кромки верхнего профиля относительно передней кромки нижнего профиля, т. е. $x_B = -L$, $y_B = H$; границы проницаемых участков $M_i N_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$) т. е. $x_{M_i} y_{N_i}$ ($i = 1, 2, 3, 4$); коэффициенты проницаемости k_i для участков $M_i N_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$); скорость набегающего невозмущенного потока на бесконечности V_{∞} ; плотность жидкости ρ ; внутри

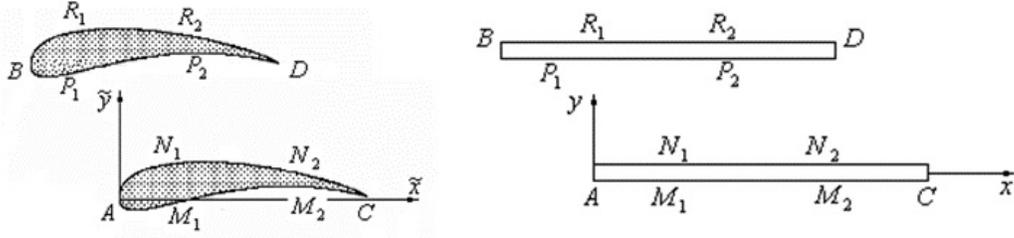


Рис. 3. Физическая область течения

тонких профилей поддерживаются постоянные давления p_1 и p_2 с коэффициентами давления $C_{p1} = \frac{p_\infty - p_1}{\alpha \rho V_\infty^2}$ для первого и $C_{p2} = \frac{p_\infty - p_2}{\alpha \rho V_\infty^2}$ для второго профилей. Предполагается, что суммарный расход жидкости на нижнем и верхнем контурах каждого профиля равен нулю.

Требуется аналитически получить формулу для вычисления подъёмной силы. Определим краевые условия задачи.

Уравнения границ контуров имеют вид:

$$y = \alpha f_1(x) = \begin{cases} \alpha f_{11}(x) & \text{на нижнем контуре AC;} \\ \alpha f_{12}(x) & \text{на верхнем контуре AC;} \end{cases} \quad (23)$$

$$y = \alpha f_2(x) = \begin{cases} \alpha f_{21}(x) & \text{на нижнем контуре BD;} \\ \alpha f_{22}(x) & \text{на верхнем контуре BD;} \end{cases} \quad (24)$$

где α — некоторый малый параметр.

Введем в рассмотрение комплексно-сопряженную скорость возмущенного потока [1]:

$$\omega(\zeta) = \frac{dW}{d\zeta} - V_\infty = U - iV, \quad (25)$$

где $W = \varphi + i\psi$ — комплексный потенциал набегающего потока, а $dW/d\zeta = V_x - iV_y$ — комплексно-сопряженная скорость этого потока.

Согласно работе [6] запишем краевые условия для функции (25):

- на непроницаемых участках тонкого профиля AC

$$V = V_\infty \alpha f'_{1x}(x); \quad (26)$$

- на проницаемых участках профиля AC

$$V + k_i U = V_\infty \alpha [f'_{1x}(x) + k_i C_{p1}], \quad (i = 1, 2); \quad (27)$$

- на непроницаемых участках тонкого профиля BD

$$V = V_\infty \alpha f'_{2x}(x); \quad (28)$$

- на проницаемых участках профиля BD

$$V + k_i U = V_\infty \alpha [f'_{2x}(x) + k_j C_{p2}], \quad (i = 3, 4); \quad (29)$$

Согласно линейной теории [1] функция (25) в передних кромках профилей имеет следующие особенности:

$$\omega(z) \sim z^{-1/2}, \quad \text{и} \quad \omega(z + L - iH) \sim (z + L - iH)^{-1/2}. \quad (30)$$

В дальнейшем решение краевой задачи (26) - (30) будет строится в классе функций (25) ограниченной на обоих концах пронизаемых участков. При этом предполагается, что в потоке дополнительные гидродинамические особенности отсутствуют.

5. Краевые условия на каноническом прямоугольнике. Решение задачи строится в параметрическом виде на каноническом прямоугольнике со сторонами π и $\pi|\tau|/2$ в плоскости $\zeta = \xi + i\eta$. Для этого линеаризованная физическая область течения (рис. 3) при помощи функции (1) конформно отображается на данный прямоугольник. Соответствие точек границ области приведено на рис. 4.

Преобразуем краевые условия (26) - (29):

Граница Γ_1 :

$$V(\xi) = V_\infty \alpha f'_{1x}(\xi), \quad (31)$$

при $\eta = 0$ и $\xi \in (m_1, n_1) \cup (n_2, m_2)$;

Граница Γ_2 :

$$V(\xi) + k_1 U(\xi) = V_\infty \alpha [f'_{1x}(\xi) + k_1 C_{p1}], \quad (32)$$

при $\eta = 0$ и $\xi \in (0, m_1) \cup (m_2, \pi)$;

Граница Γ_3 :

$$V(\xi) + k_2 U(\xi) = V_\infty \alpha [f'_{1x}(\xi) + k_2 C_{p1}], \quad (33)$$

при $\eta = 0$ и $\xi \in (n_1, n_2)$;

Граница Γ_4 :

$$V(\xi) = V_\infty \alpha f'_{2x}(\xi), \quad (34)$$

при $\eta = \pi|\tau|/2$ и $\xi \in (r_1, p_1) \cup (p_2, r_2)$;

Граница Γ_5 :

$$V(\xi) + k_3 U(\xi) = V_\infty \alpha [f'_{2x}(\xi) + k_3 C_{p2}], \quad (35)$$

при $\eta = \pi|\tau|/2$ и $\xi \in (p_1, p_2)$;

Граница Γ_6 :

$$V(\xi) + k_3 U(\xi) = V_\infty \alpha [f'_{2x}(\xi) + k_4 C_{p1}], \quad (36)$$

при $\eta = \pi|\tau|/2$ и $\xi \in (0, r_1) \cup (r_2, \pi)$.

Условие (30) поведения функции $\omega(\zeta) = \omega[z(\zeta)]$ в передних кромках профилей на каноническом прямоугольнике означает, что решение краевой задачи (31) - (36) Гильберта должно иметь простые полюсы в точках $\zeta = a$ и $\zeta = b +$

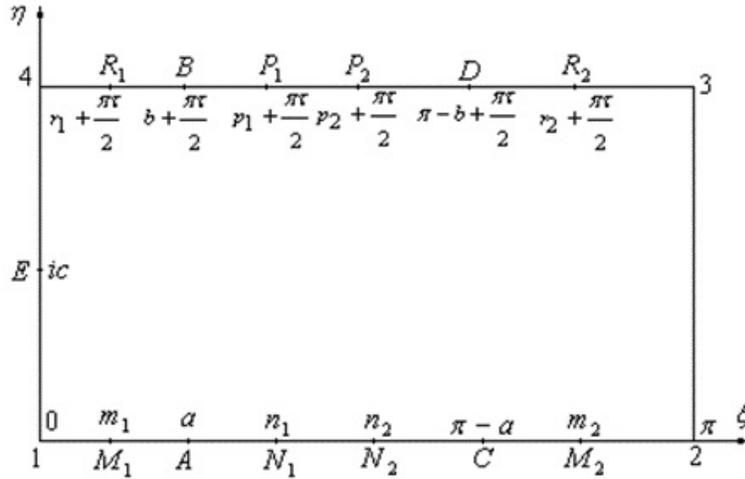


Рис. 4

$\pi|\tau|/2$. Условие задания скорости набегающего потока на бесконечности можно в соответствии с формулой (25) записать в виде

$$\omega(ic) = 0. \quad (37)$$

Секундный расход жидкости на проницаемом участке вычисляется согласно формуле

$$Q = \rho \int_L V_n ds, \quad (38)$$

где L — некоторый замкнутый участок. Так как нормальная составляющая скорости

$$V_n = -V_\infty \alpha f'(x) + V,$$

то (38) с точностью до величин второго порядка малости примет вид

$$Q = -\rho V_\infty \alpha \int_L f'(x) dx + \rho \int_L V dx,$$

или

$$Q = -\rho V_\infty \alpha [f(x_p) - f(x_n)] + \rho \int_L V dx, \quad (39)$$

где x_n и x_p — абсциссы правой и левой границ проницаемого участка.

Поскольку с точностью до величин второго порядка малости справедливо преобразование

$$V dx = V \frac{dx}{d\xi} d\xi = V \frac{dz}{d\xi} d\xi = -Im \left[\omega(\zeta) \frac{dz}{d\zeta} \right] d\xi,$$

то (39) перепишем в виде

$$Q = -\rho V_\infty \alpha [f(x_{\text{п}}) - f(x_{\text{л}})] - \rho \int_{\zeta_{\text{н}}}^{\zeta_{\text{в}}} \text{Im} \left[\omega(\zeta) \frac{dz}{d\zeta} \right] d\zeta,$$

и если граница проницаемого участка при конформном отображении переходит на горизонтальный отрезок ($d\xi = d\zeta$), то

$$Q = -\rho V_\infty \alpha [f(x_{\text{п}}) - f(x_{\text{л}})] - \rho \text{Im} \int_{\zeta_{\text{н}}}^{\zeta_{\text{в}}} \omega(\zeta) \frac{dz}{d\zeta} d\zeta. \quad (40)$$

Таким образом, функция $\omega(\zeta)$ должна удовлетворять следующим условиям: Q_{AC} и Q_{BD} , или с учетом (40) имеем два уравнения

$$V_\infty \alpha [f(m_2) - f(m_1) + f(n_2) - f(n_1)] + \text{Im} \int_{\Gamma_2} \omega(\zeta) \frac{dz}{d\zeta} d\zeta + \text{Im} \int_{\Gamma_3} \omega(\zeta) \frac{dz}{d\zeta} d\zeta = 0; \quad (41)$$

$$V_\infty \alpha [f(p_2) - f(p_1) + f(r_2) - f(r_1)] + \text{Im} \int_{\Gamma_5} \omega(\zeta) \frac{dz}{d\zeta} d\zeta + \text{Im} \int_{\Gamma_6} \omega(\zeta) \frac{dz}{d\zeta} d\zeta = 0. \quad (42)$$

6. Общее решение задачи. Согласно работе [7] решение краевой задачи (31) - (36) Гильберта для прямоугольника представим в виде

$$\omega(\zeta) = G(\zeta)\chi(\zeta), \quad (43)$$

где $G(\zeta)$ — фундаментальное решение

$$G(\zeta) = \left[\frac{\vartheta_1(m_1 - \zeta)}{\vartheta_1(\zeta - m_2)} \right]^{\gamma_1} \left[\frac{\vartheta_1(\zeta - n_2)}{\vartheta_1(\zeta - n_1)} \right]^{\gamma_2} \left[\frac{\vartheta_4(\zeta - p_2)}{\vartheta_4(\zeta - p_1)} \right]^{\gamma_3} \left[\frac{\vartheta_4(r_1 - \zeta)}{\vartheta_4(\zeta - r_2)} \right]^{\gamma_3} \times \\ \times \frac{\vartheta_1(\zeta - f_1)\vartheta_1(\zeta - f_2)\vartheta_4(\zeta - f_3)\vartheta_4(\zeta - f_4)}{\vartheta_1(\zeta - e_1)\vartheta_1(\zeta - e_2)\vartheta_4(\zeta - e_3)\vartheta_4(\zeta - e_3)}, \quad \gamma_j = \frac{1}{\pi} \text{arctg} k_j; \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

При этом должно выполняться условие разрешимости краевой задачи:

$$\gamma_1(m_2 - m_1) + \gamma_2(n_2 - n_1) + \gamma_3(p_2 - p_1) + \gamma_4(r_2 - r_1) + \sum_{n=1}^4 (f_i - e_i) = 0.$$

7. Вычисление подъемной силы. Главный вектор давления потока на каждый тонкий профиль можно вычислить по формуле Жуковского – Чаплыгина [8] и затем найти главный вектор всего тандема тонких профилей. Однако, промежуточные вычисления можно избежать, если вычислить главный вектор давления потока на систему «тандем профилей». Для этого тандем профилей охватываем некоторой замкнутой кривой тогда

$$\vec{R} = X + iY = \oint_{p\bar{n}ds}. (44)$$

В соответствии с уравнением Бернулли [8]

$$p = p_{\infty} - \frac{1}{2}\rho V^2 + \frac{1}{2}\rho V_{\infty}^2$$

и линейной теории формулу (44) можно преобразовать к виду

$$Y = -\rho V_{\infty} Re \oint_{\omega(\zeta)} \frac{dz}{d\zeta}. (45)$$

По теореме Коши [9] (45) можно свести к вычислению вычета от подынтегральной функции в точке $\zeta = ic$ т. е.

$$Y = 2\pi\rho V_{\infty} Im\left\{\omega \frac{dz}{d\zeta}(\zeta)\right\}. (46)$$

Так как $\omega(ic) = 0$, то подъемная сила (46) преобразуется к виду

$$Y = \pi H\rho V_{\infty} Im \frac{d\omega}{d\zeta}(ic). (47)$$

8. Заключение. Предложен явный вид функции конформно-отображающей плоскость с двумя исключенными параллельными отрезками, с проницаемыми участками на контурах, на канонический прямоугольник. Найдена производная конформно-отображающей функции. Решена гидродинамическая задача обтекание тандема из двух тонких профилей, с проницаемыми участками на контурах, потенциальным потоком идеальной несжимаемой жидкости. Найдено математическое решение поставленной задачи. Аналитически получена формула для вычисления главного вектора давления потока на систему «тандем профилей». На основе аналитического решения могут быть найдены оптимальные расположения проницаемых участков на тонких профилях.

ДОПОЛНИТЕЛЬНО

Вклад авторов. Вклад авторов равноценен.

Конфликт интересов. Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

Источник финансирования. Авторы заявляют об отсутствии внешнего финансирования при проведении исследования.

ADDITIONAL INFORMATION

Authors' contribution. The authors declare that they have no competing interests.

Competing interests. The authors declare that they have no competing interests.

Funding. This study was not supported by any external sources of funding.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М. : Наука, 1966. С. 448.
- [2] Коппенфельс В., Штальман Ф. Практика конформных отображений. М. : ИЛ, 1963. С. 406.
- [3] Петрова Т. Н. Численное конформное отображение внешности двух контуров на прямоугольник // Труды Всерос. научн. шк. «Гидродинамика больших скоростей». Чебоксары : Изд-во Чуваш. ун-та, 1996. С. 130–132.
- [4] Уиттекер Э., Ватсон Д. Н. Курс современного анализа. М. : ГИФМЛ, 1963. Т. 2. С. 516.
- [5] Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Проблемы гидродинамики и их математические модели. М. : Наука, 1977. С. 408.
- [6] Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. М.-Л. : Физматгиз, 1962. С. 708.
- [7] Васильев В. Н. Обтекание безграничным потоком тонкого профиля с проницаемым участком на верхнем контуре // Известия НАНИ ЧР. 1996. № 6. С. 15–27.
- [8] Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М. : Наука, 1971. С. 847.
- [9] Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Проблемы гидродинамики и их математические модели. Москва : Наука, 1977. С. 408.

REFERENCES

- [1] Sedov L. I. Plane problems of hydrodynamics and aerodynamics. M. : Science, 1966. P. 448.
- [2] Koppenfels V., Stahlman F. Practice conformal mappings. M. : IL, 1963. P. 406.
- [3] Petrova T.N. Numerical conformal mapping of the appearance of two contours onto a rectangle // Proceedings of Vseros. scientific school "Hydrodynamics of high speeds". Cheboksary : Publishing house Chuvash. university, 1996. P. 130–132.
- [4] Whittaker E., Watson D.N. Course of modern analysis. M. : GIFML, 1963. Vol. 2. P. 516.
- [5] Lavrentyev M. A., Shabat B. V. Problems of hydrodynamics and their mathematical models. M. : Science, 1977. P. 408.
- [6] Kantorovich L. V., Krylov V. I. Approximate methods of higher analysis. M.-L. : Fizmatgiz, 1962. P. 708.
- [7] Vasiliev V.N. Unlimited flow around a thin profile with a permeable section on the upper contour // Izvestia NANI CR. 1996. no. 6. P. 15–27.
- [8] Loitsyansky L. G. Fluid and Gas Mechanics. M. : Science, 1971. P. 847.
- [9] Lavrentiev M.A., Shabbat B.V. Problems of hydrodynamics and their mathematical models. Moscow : Science, 1977. P. 408.