

Л. В. Ковтанюк, Г. Л. Панченко, Е. О. Попова

О ТЕПЛОТВОРНОЙ СПОСОБНОСТИ НЕОБРАТИМОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ МАТЕРИАЛА ПРОБКИ В КРУГЛОЙ ТРУБЕ

Институт автоматизации и процессов управления Дальневосточного отделения РАН, Владивосток, Россия

Аннотация. В статье представлено решение связанной краевой задачи теории больших деформаций о деформировании пробки конечной длины в круглой трубе под действием изменяющегося перепада давления. Предполагается, что пробка имеет цилиндрическую форму, а ее материал является несжимаемым и обладает упругими, вязкими и пластическими свойствами. Возрастающий со временем перепад давления задается на граничных поперечных поверхностях пробки. На боковой поверхности пробки задано условие прилипания. Изменение температуры материала происходит за счет его необратимого деформирования. Необратимые деформации накапливаются в материале пробки с начала процесса деформирования и могут быть как деформациями ползучести, так и пластическими деформациями. Предполагается, что параметры ползучести, предел текучести и коэффициент динамической вязкости материала зависят от температуры. При возрастающем перепаде давления рассмотрена ползучесть материала, а также возникновение и развитие вязкопластического течения. Рассчитаны температура и параметры напряженно-деформированного состояния, установлена закономерность продвижения упругопластической границы по деформируемому материалу.

Ключевые слова: термоупругость, вязкоупругость, ползучесть, вязкопластическое течение, большие деформации, деформационное теплопроизводство, теплопроводность, связанное термомодеформирование.

Ковтанюк Лариса Валентиновна, доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАН, заведующий лабораторией механики необратимого деформирования; e-mail: lk@iacp.dvo.ru; <https://orcid.org/0000-0002-2349-4803>; AuthorID: 7247

Панченко Галина Леонидовна, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории механики необратимого деформирования; e-mail: ranchenko@iacp.dvo.ru; <https://orcid.org/0000-0002-6921-2971>; AuthorID: 727612

Попова Елена Олеговна, аспирант лаборатории механики необратимого деформирования; e-mail: polenao@bk.ru

для цитирования: Ковтанюк Л. В., Панченко Г. Л., Попова Е. О. О теплотворной способности необратимого деформирования материала пробки в круглой трубе // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2024. № 1(59). С. 88–100. DOI: 10.37972/chgpu.2024.59.1.007 EDN: JANYEG

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0).

L. V. Kovtanyuk, G. L. Panchenko, E. O. Popova

ON THE CALORIC CAPACITY OF IRREVERSIBLE DEFORMATION OF THE PLUG MATERIAL IN A ROUND PIPE

Institute of Automation and Control Processes of FEB RAS, Vladivostok, Russia

Abstract. The paper presents a solution to a coupled boundary value problem of the theory of large deformations on the deformation of a plug of finite length in a circular pipe under the influence of a changing pressure difference. It is assumed that the plug has a cylindrical shape, and its material is incompressible and has elastic, viscous and plastic properties. The pressure drop, which increases over time, is set on the boundary transverse surfaces of the plug. The adhesion condition is specified on the side surface of the plug. The temperature of the material changes due to its irreversible deformation. Irreversible deformations accumulate in the plug material from the beginning of the deformation process and can be either creep deformations or plastic deformations. It is assumed that the creep parameters, yield strength and dynamic viscosity coefficient of the material depend on temperature. With an increasing pressure drop, the creep of the material, as well as the emergence and development of viscoplastic flow, are considered. The temperature and parameters of the stress-strain state are calculated, and the pattern of movement of the elastoplastic boundary along the deformable material is established.

Keywords: thermoelasticity, viscoelasticity, creep, viscoplastic flow, large deformations, strain-induced heat production, thermal conductivity, coupled thermal deformation.

Larisa V. Kovtanyuk, Dr. Sci. Phys.&Math., Corresponding member of the Russian Academy of Sciences, Head of the Laboratory; e-mail: lk@iacp.dvo.ru; <https://orcid.org/0000-0002-2349-4803>; AuthorID: 7247

Galina L. Panchenko, Candidate of Phys. & Math., Senior Researcher; e-mail: panchenko@iacp.dvo.ru; <https://orcid.org/0000-0002-6921-2971>; AuthorID: 727612

Elena O. Popova, Scientific Researcher; e-mail: polenao@bk.ru

to cite this article: Kovtanyuk L. V., Panchenko G. L., Popova E. O. On the caloric capacity of irreversible deformation of the plug material in a round pipe // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2024. No 1(59).p. 88–100. DOI: 10.37972/chgpu.2024.59.1.007 EDN: JANYEG

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Любой процесс деформирования твердого тела протекает с изменением его температуры. При решении краевых задач изменением температуры часто пренебрегают, так как его учет значительно усложняет модельные соотношения. Нужно учитывать взаимосвязанность процессов деформирования и теплопередачи, а также зависимость постоянных материала, например, таких как предел текучести, вязкость, от температуры. Здесь рассмотрим неизотермическое деформирование упруговязкопластической пробки конечной длины в круглой трубе с жесткими стенками под действием переменного перепада давления. На боковой поверхности пробки задано условие жесткого сцепления. Необратимое деформирование материала связано с его ползучестью и последующим вязкопластическим течением. Вместе с необратимым процессом деформирования рассмотрим еще и необратимый процесс теплопроводности, полагая, что тепло создается внутри только за счет необратимого деформирования, то есть приток тепла в среду через ее границу отсутствует.

1. Основные модельные соотношения. Воспользуемся теорией больших упругопластических деформаций [1], в которой тензоры обратимых \mathbf{m} и необратимых \mathbf{p} деформаций задаются дифференциальными уравнениями изменения (переноса) в форме

$$\frac{D\mathbf{m}}{Dt} = \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\gamma} - \frac{1}{2}((\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\gamma} + \mathbf{z}) \cdot \mathbf{m} + \mathbf{m} \cdot (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\gamma} - \mathbf{z})), \quad (1)$$

$$\frac{D\mathbf{p}}{Dt} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} - \boldsymbol{\varphi} \cdot \mathbf{p} + \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\gamma} - \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\gamma} - \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p}, \quad (2)$$

$$\mathbf{m} = \mathbf{e} + \alpha T_0 \boldsymbol{\theta} \mathbf{I}, \quad \boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\omega} + \mathbf{z}(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{m}), \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{v} + \nabla^T \mathbf{v}),$$

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{v} - \nabla^T \mathbf{v}), \quad \boldsymbol{\theta} = (T - T_0) T_0^{-1}.$$

Здесь \mathbf{v} — вектор скорости; T, T_0 — текущая температура и температура недеформированного состояния (комнатная температура); \mathbf{e} — тензор, задающий упругие деформации; \mathbf{I} — единичный тензор, составленный из символов Кронекера; $\mathbf{z}(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{m})$ — нелинейная часть тензора вращений $\boldsymbol{\varphi}$ ($\boldsymbol{\varphi} = -\boldsymbol{\varphi}^T$), из-за ее громоздкости здесь она не выписана, в общем виде она приведена в [1]; $\boldsymbol{\gamma}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}^e = \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\gamma}$ — источники необратимых и обратимых деформаций в уравнениях изменения, являющиеся скоростями их накопления, α — коэффициент линейного расширения. Зависимость (2) определяет объективную производную по времени, задающую взаимодействие между обратимыми и необратимыми деформациями в процессе деформирования, что обеспечивает геометрическую корректность кинематики среды.

Из зависимостей (1) и (2) следует соотношение для тензора полных деформаций Альманси \mathbf{d}

$$\mathbf{d} = \mathbf{m} + \mathbf{p} - \frac{1}{2} \mathbf{m} \cdot \mathbf{m} - \mathbf{m} \cdot \mathbf{p} - \mathbf{p} \cdot \mathbf{m} + \mathbf{m} \cdot \mathbf{p} \cdot \mathbf{m}. \quad (3)$$

Отсюда следует, что тензор \mathbf{m} является линейной частью тензора обратимых деформаций $\mathbf{c} = \mathbf{m} - 0.5\mathbf{m} \cdot \mathbf{m}$. Из закона сохранения энергии следуют [1] равенства

$$\boldsymbol{\sigma} = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{m}} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{m}), \quad (4)$$

$$\frac{\partial(\rho s)}{\partial t} = -\operatorname{div} \mathbf{J} - T^{-2} \mathbf{q} \cdot \nabla T + T^{-1} \boldsymbol{\sigma} \cdot \cdot \boldsymbol{\gamma}. \quad (5)$$

Здесь $\Psi = \Psi(\mathbf{m}, \theta)$ — плотность распределения внутренней энергии; $\boldsymbol{\sigma}$ — тензор напряжений; s — плотность энтропии; \mathbf{q} — поток тепла; $\mathbf{J} = \rho \mathbf{v} s + \mathbf{q}$ — поток энтропии; ρ — плотность среды; для упрощения математической модели принимается гипотеза о независимости термодинамического потенциала $\Psi(\mathbf{m}, \theta)$ от необратимых деформаций \mathbf{p} .

Считаем, что деформируемый материал механически несжимаем и изменение его объема может происходить только за счет теплового расширения (сжатия). Тогда из (4) следует соотношение для тензора напряжений

$$\boldsymbol{\sigma} = -P_1 \mathbf{I} + (1 + 3\alpha T_0 \theta)^{-1} \frac{\partial W}{\partial \mathbf{m}} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{m}). \quad (6)$$

В зависимости (6) P — неизвестная функция добавочного гидростатического давления; $W = \rho_0 \Psi(\mathbf{m}, \theta)$ — упругий потенциал; ρ_0 — плотность материала в его свободном состоянии. Далее предположим, что деформируемый материал является изотропным. Это позволяет разложить упругий потенциал в ряд Тейлора относительно свободного состояния [2]

$$\begin{aligned} W = W(J_1, J_2, \theta) = & -2\mu J_1 - \mu J_2 + b J_1^2 + (b - \mu) J_1 J_2 - \chi J_1^3 + \nu_1 J_1 \theta + \nu_2 \theta^2 - \\ & - \nu_3 J_1 \theta^2 - \nu_4 J_1^2 \theta - \nu_5 J_2 \theta - \nu_6 \theta^3 + \dots, \quad (7) \\ J_1 = \operatorname{tr} \mathbf{c}, \quad J_2 = \mathbf{c} \cdot \cdot \mathbf{c}. \end{aligned}$$

Здесь μ — модуль сдвига, b , χ , ν_m ($m = 1, 2, \dots, 6$) — иные термомеханические постоянные. Если принять закон теплопроводности в простейшей форме Фурье, то из (5) и (7) следует уравнение теплопроводности

$$\begin{aligned} (1 + \beta_1 \theta + \beta_2 \operatorname{tr} \mathbf{c}) \frac{\partial \theta}{\partial t} + \beta_3 (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\gamma}) \cdot \cdot \mathbf{c} = & g \Delta \theta - \frac{1}{2\nu_2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \cdot \boldsymbol{\gamma}, \quad (8) \\ \beta_1 = \frac{\nu_2 (1 - 3\alpha T_0) - 3\nu_6}{\nu_2}, \quad \beta_2 = -\frac{\nu_3}{\nu_2}, \quad \beta_3 = -\frac{\nu_1 + \nu_5}{\nu_2}, \end{aligned}$$

в котором g — коэффициент температуропроводности.

Диссипативный механизм деформирования связан с реологическими и пластическими свойствами материала. Считаем, что необратимые деформации накапливаются в материале с начала процесса деформирования в результате процесса ползучести.

В областях, где напряженное состояние еще не достигло поверхности текучести, или, где пластическое течение было, но прекратилось, соответствующий диссипативный механизм деформирования зададим в форме степенного закона

ползучести Нортона [3]. В этом законе тензор скоростей необратимых деформаций γ полагается равным тензору скоростей деформаций ползучести ϵ^v

$$V(\sigma) = B\Sigma^n(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3), \quad \Sigma = \max|\sigma_i - \sigma_j|, \quad \gamma = \epsilon^v = \frac{\partial V(\Sigma)}{\partial \sigma}. \quad (9)$$

В (9) $V(\sigma)$ — термодинамический потенциал; $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ — главные значения тензора напряжений; B, n — параметры ползучести материала.

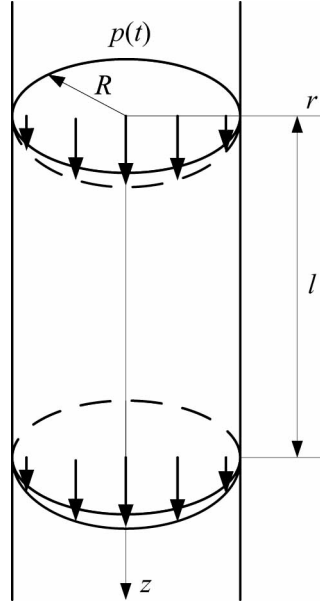


Рис. 1. Геометрия задачи

При дальнейшем увеличении нагружающих усилий в некоторый момент времени напряженное состояние достигает поверхности текучести, что приводит к смене диссипативного механизма деформирования. Таким образом, в материале начинается пластическое течение. Поэтому в увеличивающейся области пластического течения полагаем, что $\gamma = \epsilon^p$, где ϵ^p — тензор скоростей пластических деформаций. Не разделяя необратимые деформации на составляющие, будем считать, что накопленные к моменту начала пластического течения необратимые деформации ползучести (9) являются начальными значениями для накапливающихся далее в области течения пластических деформаций. В случае учета вязких свойств среды при пластическом течении также требуется совпадение скоростей необратимых деформаций при изменении механизма деформирования с вязкого на пластический.

Из принципа максимума Мизеса следует ассоциированный закон пластического течения [4, 5]

$$\alpha = \lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma}, \quad F(\sigma, \alpha) = k, \quad \lambda > 0, \quad \alpha = \epsilon^p - \epsilon^{v_0}, \quad (10)$$

связывающий тензор скоростей пластических деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ с тензором напряжений. В (10) $\boldsymbol{\varepsilon}^{v_0}$ — тензор скоростей деформаций ползучести в момент начала пластического течения, k предел текучести.

В качестве пластического потенциала примем [4] обобщенное условие пластического течения Треска – Сен-Венана

$$F(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}^p) = k, \quad F(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}^p) = \frac{1}{2} \max |\sigma_i - \sigma_j| - \eta \max |\varepsilon_k^p|. \quad (11)$$

Здесь ε_k^p — главные значения тензора скоростей пластических деформаций; η — коэффициент вязкого сопротивления пластическому течению.

При температурном воздействии на материал от нее зависят и параметры материала. Для параметров ползучести и принимаем зависимости в форме [6]

$$B = \frac{c_1}{\sigma_0^{n-1}} \exp\left(-\frac{Q}{R_u T_0(1+\theta)}\right), \quad n = b_1 + \frac{b_2}{T_0(1+\theta)}. \quad (12)$$

В (12) c_1 , σ_0 , b_1 и b_2 — постоянные материала, Q — энергия активации, R_u — универсальная газовая постоянная. Для предела текучести и коэффициента вязкости пластического течения будем использовать соотношения [7]

$$k = k_0 \left(1 - \frac{\theta}{\theta_m}\right)^2, \quad \eta = \eta_0 \exp(-v T_0 \theta), \quad \theta_m = \frac{T_m - T_0}{T_0}. \quad (13)$$

В (13) T_m — температура плавления деформируемого материала, k_0 , η_0 — предел текучести и вязкость материала при комнатной температуре, v — экспоненциальная скорость.

2. Постановка задачи и деформирование до вязкопластического течения. Рассмотрим постановку краевой задачи в рамках модели, описанной в параграфе 1. Пусть есть недеформируемая цилиндрическая труба радиуса R , в которой расположен слой материала конечной длины l (рис. 1). Этот слой имеет такой же радиус, как и труба и образует плотную пробку. Материал пробки является несжимаемым и обладает упругими, вязкими и пластическими свойствами. При этом вязкие свойства материал проявляет сначала в форме ползучести, затем при достижении напряженным состоянием поверхности нагружения в форме вязкого сопротивления пластическому течению.

Решение этой краевой задачи в цилиндрической системе координат r, φ, z ищется в классе функций $\theta = \theta(r, t)$, $u = u_z(r, t)$, $v = v_z(r, t)$, где u и v — отличные от нуля компоненты векторов перемещений и скорости.

Механическое нагружение представляет собой перепад давления $p(t)$ на граничных поверхностях пробки $z = u(r, t)$ и $z = l + u(r, t)$. Пусть граничные условия для $\sigma_{zz}(r, z, t)$ имеют вид

$$\sigma_{zz}(0, u(0, t), t) = -p(t), \quad \sigma_{zz}(0, l + u(0, t), t) = 0, \quad (14)$$

где $r = 0$ — координата максимального перемещения граничных точек пробки.

Согласно второму условию (14), сопротивление продавливанию на свободном конце пробки при $r = 0$ предполагается отсутствующим. Но его можно задавать

постоянной величиной, отличной от нуля. Это не влияет на способ решения задачи.

На боковой поверхности пробки зададим условия прилипания

$$u|_{r=R} = v|_{r=R} = 0. \quad (15)$$

Первоначально, пока пластическое течение отсутствует, необратимые деформации накапливаются в материале в результате медленного процесса ползучести. Необратимое деформирование материала вызывает его разогрев. Поэтому примем для температуры следующие условия

$$\theta(r, 0) = 0, \quad \left. \frac{\partial \theta(r, t)}{\partial r} \right|_{r=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial \theta(r, t)}{\partial r} \right|_{r=R} = 0. \quad (16)$$

При выбранной кинематике движения отличными от нуля компонентами тензора деформаций Альманси будут d_{rr} и d_{rz} . Из формулы (3) получаем для них следующие соотношения

$$d_{rr} = -\frac{1}{2}u'^2, \quad d_{rz} = \frac{1}{2}u', \quad u' = \frac{\partial u}{\partial r}. \quad (17)$$

Напряжения определяются обратимыми деформациями и согласно соотношениям (6) и (7) имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_{\varphi\varphi} &= -(P_1 + 2\mu) + 2(b - (\nu_4 + 3b\beta)\theta)(m_{rr} + m_{zz}) - 2(\mu - (\nu_4 + 3b\beta)\theta)m_{rz}^2 + \\ &+ (\nu_1 + 6\mu\beta)\theta - (\nu_3 + 3\nu_1\beta + 18\mu\beta^2)\theta^2 = -p_1, \quad \sigma_{rz} = 2(\mu - l_1\theta)m_{rz}, \\ \sigma_{rr} &= -p_1 + 2(\mu - l_1\theta)m_{rr} + (3\mu + l_1\theta)m_{rz}^2, \quad l_1 = \nu_1 + \nu_5 + 3\mu\beta, \\ \sigma_{zz} &= -p_1 + 2(\mu - l_1\theta)m_{zz} + (3\mu + l_1\theta)m_{rz}^2, \quad \beta = \alpha T_0. \end{aligned} \quad (18)$$

Зависимости (18) для компонент тензора напряжений выписаны с точностью до слагаемых первого порядка малости по компонентам обратимых деформаций m_{rr} и m_{zz} и второго — по компоненте m_{rz} .

В рамках квазистатического приближения выпишем уравнения равновесия в рассматриваемом случае

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} = 0. \quad (19)$$

Из решения второго уравнения (19) следует, во-первых, что p_1 является линейной функцией z : $p_1 = c(t)z + p_0(r, t)$, во-вторых, компонента напряжений σ_{rz} имеет вид

$$\sigma_{rz} = \frac{c(t)r}{2} + \frac{c_2(t)}{r}. \quad (20)$$

Функцию интегрирования $c_2(t)$ в (20) следует положить равной нулю, чтобы напряжение σ_{rz} имело конечное значение при $r = 0$. Для нахождения функции

интегрирования $c(t)$ воспользуемся граничными условиями (14). Таким образом, для компоненты σ_{rz} получим соотношение

$$\sigma_{rz} = -\frac{pr}{2l}, \quad p = p(t). \quad (21)$$

Потенциал ползучести (9) в данном случае примет вид

$$V(\sigma_{ij}) = B((\sigma_{rr} - \sigma_{zz})^2 + 4\sigma_{rz}\sigma_{zr})^{\frac{n}{2}}. \quad (22)$$

В потенциале (22) ограничимся слагаемыми до порядка n по напряжениям, тогда для скоростей деформаций ползучести из (9), (18) и (22) получим

$$\varepsilon_{rz}^v = -Bn \left(\frac{pr}{l}\right)^{n-1}, \quad \varepsilon_{rr}^v = -\varepsilon_{zz}^v = \frac{\varepsilon_{rz}^v m_{rr} - m_{zz}}{2 m_{rz}}. \quad (23)$$

С учетом зависимостей (18) и (23) уравнение теплопроводности (8) примет форму

$$\left(1 + \beta_1\theta + \frac{\beta_3 l_1 p^2 r^2}{8l^2(\mu - l_1\theta)^3}\right) \frac{\partial\theta}{\partial t} + \frac{\beta_3 pr^2 \frac{\partial p}{\partial t}}{8l^2(\mu - l_1\theta)^2} = g \left(\frac{\partial^2\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial\theta}{\partial r}\right) - \frac{Bn}{2\nu_2} \left(\frac{pr}{l}\right)^n. \quad (24)$$

Уравнение теплопроводности (24) с учетом (12) и (16) было решено численно.

Из соотношений (1) и (2) следует, что кинематика среды в рассматриваемом случае описывается зависимостями

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rz} &= \frac{dd_{rz}}{dt} = \frac{\partial d_{rz}}{\partial t} = \frac{v'}{2} = \varepsilon_{rz}^e + \gamma_{rz} = \frac{\partial m_{rz}}{\partial t} + \frac{\partial p_{rz}}{\partial t}, \\ \varphi_{rz} &= -\varphi_{rz} = \frac{2\varepsilon_{rz}(1 - m_{zz})}{m_{rr} + m_{zz} - 2}, \quad \gamma_{rr} = \frac{dp_{rr}}{dt} + 2p_{rz}(\varphi_{zr} + \gamma_{rz}), \\ \gamma_{zz} &= \frac{dp_{zz}}{dt} + 2p_{rz}(\varphi_{rz} + \gamma_{rz}), \quad \gamma_{rr} = -\gamma_{zz} = \frac{\gamma_{rz} m_{rr} - m_{zz}}{2 m_{rz}}, \end{aligned} \quad (25)$$

в которых скорости необратимых деформаций равны скоростям деформаций ползучести: $\gamma_{rr} = \varepsilon_{rr}^v$, $\gamma_{rz} = \varepsilon_{rz}^v$ и $\gamma_{zz} = \varepsilon_{zz}^v$.

Из (18), (21), (23) и (25) следуют соотношения для компонент тензоров обратимых и необратимых деформаций m_{rz} и p_{rz} , а также для градиента перемещений точек пробки

$$m_{rz} = -\frac{pr}{4l(\mu - l_1\theta)}, \quad p_{rz} = -\int_0^t Bn \left(\frac{pr}{l}\right)^{n-1} dt, \quad u' = 2(m_{rz} + p_{rz}). \quad (26)$$

Интегрируя последнее уравнение (26) с учетом условия прилипания (15), найдем перемещения точек материала пробки. Для компонент обратимых деформаций m_{rr} , m_{zz} и необратимых деформаций p_{rr} , p_{zz} из зависимостей (25) получим систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_{zz}}{\partial t} &= \gamma_{rz} \left(m_{rz} - \frac{p_{zz}}{m_{rz}} \right) + \frac{4(\varepsilon_{rz}^e + \gamma_{rz}) p_{rz}}{2 + m_{rz}^2} \left(1 + p_{zz} - \frac{m_{rz}^2}{2} - 2m_{rz} p_{rz} \right), \\ p_{rr} &= -p_{zz} - 2p_{rz}^2, \quad m_{zz} = -p_{zz} + \frac{m_{rz}^2}{2} + 2m_{rz} p_{rz}, \quad m_{rr} = -m_{zz} - m_{rz}^2. \end{aligned} \quad (27)$$

Учитывая зависимости (18), граничные условия (14) и интегрируя первое уравнение равновесия (19), получим зависимости для вычисления компонент тензора напряжений по найденным ранее распределениям температуры, перемещений и компонентам обратимых деформаций

$$\begin{aligned} \sigma_{zz} &= \frac{p}{l} (z - l - u(0, t)) - \int_0^r \frac{2(\mu - l_1\theta) m_{rr} + (3\mu + l_1\theta) m_{rz}^2}{r} dr + \\ &+ 2(\mu - l_1\theta) (m_{zz} - m_{rr}) - 2(\mu - l_1\theta(0, t)) (m_{zz}(0, t) - m_{rr}(0, t)), \\ \sigma_{rr} &= \sigma_{zz} + 2(\mu - l_1\theta) (m_{rr} - m_{zz}), \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= -p_1 = \sigma_{zz} - 2(\mu - l_1\theta) m_{zz} - (3\mu + l_1\theta) m_{rz}^2. \end{aligned} \quad (28)$$

Найденное решение неизотермической задачи при возрастающем перепаде давления остается справедливым до момента времени t_1 , в который на боковой границе пробки $r = R$ впервые выполнится условие пластического течения (11) в следующем виде

$$|\sigma_{rz}|_{r=R} = k(t_1). \quad (29)$$

В условии (29) предел текучести зависит от температуры и вычисляется по первой формуле (13). Момент начала вязкопластического течения вычисляется из уравнения $p(t_1) R = 2lk(t_1)$.

3. Вязкопластическое течение при возрастающем перепаде давления. С момента времени t_1 в материале развивается область вязкопластического течения $m(t) \leq r \leq R$. Движущаяся граница $r = m(t)$ отделяет область течения от области $0 \leq r \leq m(t)$, в которой материал продолжает деформироваться вязкоупруго. В области $0 \leq r \leq m(t)$ для напряжений выполняются зависимости (18). Используя соотношения (6) и (7), установим, что в области течения $m(t) \leq r \leq R$ компоненты тензора напряжений также удовлетворяют соотношениям (18).

Из интегрирования второго уравнения равновесия (19) в обеих областях с использованием граничных условий (14) следует зависимость (21) для компоненты тензора напряжений σ_{rz} .

Компоненты скоростей деформаций ползучести в области $0 \leq r \leq m(t)$ имеют вид (23), а уравнение теплопроводности в этой области — (24).

Из ассоциированного закона пластического течения (10) следует, что условие пластичности (11) в рассматриваемом случае ($\sigma_{rz} < 0, \varepsilon_{rz}^p < 0$) имеет вид

$$\sigma_{rz} = -k + \eta (\varepsilon_{rz}^p - \varepsilon_{rz}^{v_0}). \quad (30)$$

Разрешая уравнение (30) относительно ε_{rz}^p с использованием соотношения (21), получим

$$\varepsilon_{rz}^p = \frac{1}{\eta} \left(k - \frac{pr}{2l} \right) + \varepsilon_{rz}^{v_0}. \quad (31)$$

Еще раз отметим, что $\varepsilon_{rz}^{v_0}$ в формулах (30) и (31) — это компонента скоростей деформаций ползучести ε_{rz}^v в точке в момент достижения ее упругопластической границей, и в текущий момент времени t она вычисляется из зависимости

$$\varepsilon_{rz}^{v_0} = -Bn \left(\frac{pm}{l} \right)^{n-1}. \quad (32)$$

Из условия непрерывности скоростей необратимых деформаций на границе $r = m(t)$ следует уравнение для определения ее положения

$$\frac{pm}{2l} = k_0 \left(1 - \frac{\theta(m, t)}{\theta_m} \right)^2. \quad (33)$$

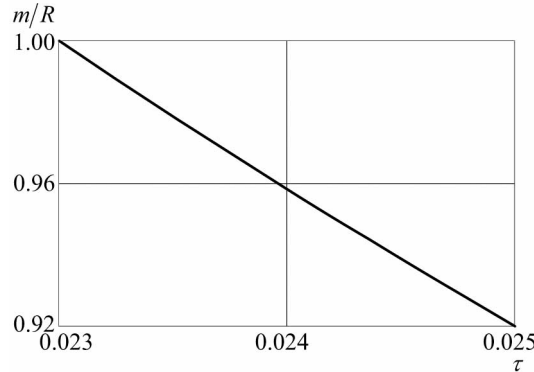


Рис. 2. График упругопластической границы

Уравнение теплопроводности (8) в области вязкопластического течения $m(t) \leq r \leq R$ при использовании зависимостей (18) и (31) принимает форму

$$\begin{aligned} \left(1 + \beta_1 \theta + \frac{\beta_3 l_1 p^2 r^2}{8l^2 (\mu - l_1 \theta)^3} \right) \frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\beta_3 p r^2 \frac{\partial p}{\partial t}}{8l^2 (\mu - l_1 \theta)^2} = g \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) + \\ + \frac{pr}{2l\nu_2} \left(\frac{1}{\eta} \left(k - \frac{pr}{2l} \right) + \varepsilon_{rz}^{v_0} \right). \end{aligned} \quad (34)$$

Уравнения (24), (32)–(34) образуют систему уравнений относительно неизвестных функций: θ в областях $0 \leq r \leq m(t)$ и $m(t) \leq r \leq R$, $m(t)$ и $\varepsilon_{rz}^{v_0}$. К этой системе добавим второе и третье граничные условия (16) и начальные условия

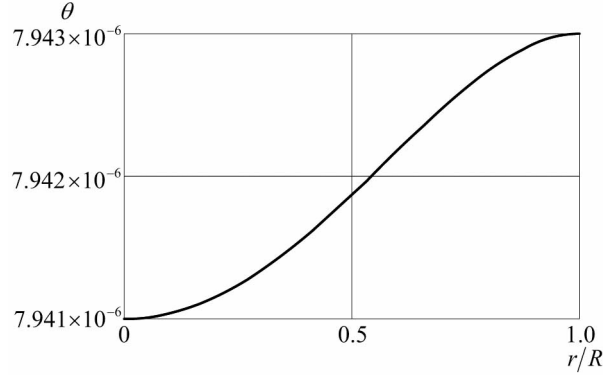


Рис. 3. Распределение температуры в материале

$m(t_2) = R$, $\varepsilon_{rz}^{v_0}(R) = -B(t_2)n(t_2)\left(\frac{p(t_2)R}{l}\right)^{n(t_2)-1}$. Также примем непрерывность искомой функции θ и ее производной $\frac{\partial\theta}{\partial r}$ на границе $r = m(t)$ и непрерывность температуры в момент начала вязкопластического течения t_1 . Для решения этой системы уравнений разработан алгоритм на основе конечно-разностного метода.

Кинематика среды в вязкоупругой области $0 \leq r \leq m(t)$ описывается соотношениями (25) при $\gamma_{rr} = \varepsilon_{rr}^v$, $\gamma_{rz} = \varepsilon_{rz}^v$ и $\gamma_{zz} = \varepsilon_{zz}^v$. Эти же соотношения выполняются и в области течения $m(t) \leq r \leq R$ при $\gamma_{rr} = \varepsilon_{rr}^p$, $\gamma_{rz} = \varepsilon_{rz}^p$ и $\gamma_{zz} = \varepsilon_{zz}^p$.

Расчеты проводились в безразмерных переменных $\frac{r}{R}$ и $\tau = \frac{\alpha_1 t}{\mu}$ при линейной функции $p(t) = \alpha_1 t$. Значения безразмерных постоянных выбирались следующими: $\beta_1 = -2.772$, $\beta_3 = -10$, $k_0\mu^{-1} = 2.298 \times 10^{-3}$, $\theta_m = 2.074$, $l_1\mu^{-1} = 0.452$, $lR^{-1} = 5$, $g\mu\alpha_1^{-1}R^{-2} = 2.638 \times 10^4$, $\nu_2\mu^{-1} = 80$, $b_1 = 2.518$, $b_2T_0^{-1} = 1.482$, $c_1\mu\alpha_1^{-1} = 4.887 \times 10^4$, $\sigma_0\mu^{-1} = 7.199 \times 10^{-6}$, $QR_u^{-1}T_0^{-1} = 52.37$, $\alpha_1\eta_0\mu^{-2} = 3.257 \times 10^{-5}$, $\nu T_0 = 1.212$.

На рисунке 2 представлен график изменения границы области вязкопластического течения в зависимости от времени τ в промежутке от $\tau_1 = 0.023$ до $\tau_2 = 0.025$. Распределение температуры θ в момент времени τ_2 по материалу пробки представлено на рисунке 3.

Для компонент m_{rz} , p_{rz} и градиента перемещений в области $0 \leq r \leq m(t)$ справедливы зависимости (26). Первая и третья формулы (26) также верны и в области $m(t) \leq r \leq R$. Компонента необратимых деформаций p_{rz} в области течения находится путем интегрирования дифференциального уравнения, следующего из (25) и (31):

$$\frac{\partial p_{rz}}{\partial t} = \frac{1}{\eta} \left(k - \frac{pr}{2l} \right) + \varepsilon_{rz}^{v_0}. \quad (35)$$

При решении уравнения (35) используется условие непрерывности компоненты необратимых деформаций p_{rz} в момент времени t_1 .

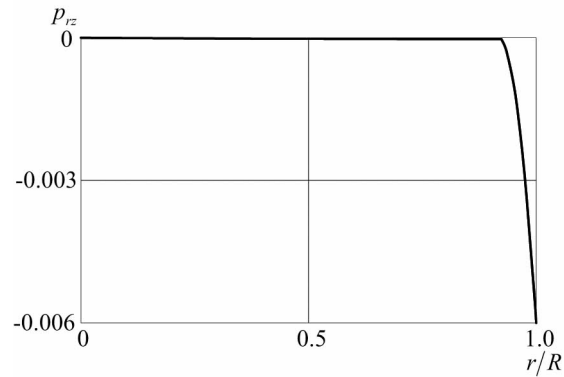


Рис. 4. Компонента необратимых деформаций p_{rz}

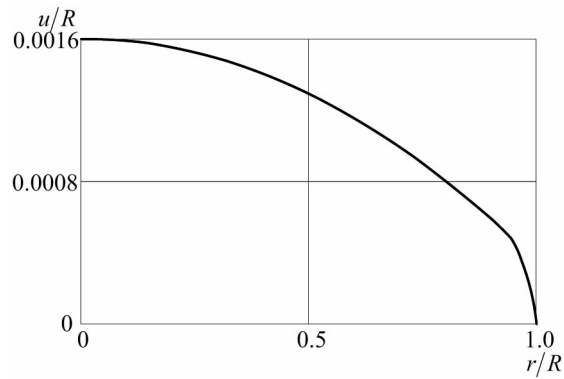


Рис. 5. Распределение перемещений в материале

Рисунок 4 иллюстрирует график компоненты тензора необратимых деформаций p_{rz} в зависимости от радиуса $\frac{r}{R}$ в момент времени τ_2 . Распределение перемещений в материале в момент времени τ_2 представлено на рисунке 5.

Компоненты обратимых деформаций m_{rr} , m_{zz} и необратимых деформаций p_{rr} , p_{zz} в обеих областях вычисляются из системы уравнений (27). В области $0 \leq r \leq m(t)$ $\gamma_{rz} = \varepsilon_{rz}^v$, а в области $m(t) \leq r \leq R$ $\gamma_{rz} = \varepsilon_{rz}^p$.

По вычисленным распределениям температуры и деформаций напряжения в области $0 \leq r \leq m(t)$ находятся из зависимостей (28). Условия непрерывности напряжений на границе $r = m(t)$ приводят к этим же соотношениям для вычисления напряжений в области течения $m(t) \leq r \leq R$.

В данной статье получено решение связанной краевой задачи теории больших деформаций о неизотермическом деформировании материала, образующего пробку конечной длины в круглой недеформируемой трубе, под действием возрастающего со временем перепада давления. Накопление необратимых деформаций в материале связано с его ползучестью и последующим пластическим

течением. Разогрев материала происходит только за счет процессов необратимого деформирования. В условиях достаточно медленного процесса деформирования (квазистатическое приближение) при отсутствии теплового потока и трения на граничной поверхности (условие жесткого сцепления) нагрев материала ожидаемо оказывается незначительным, тем не менее изменение температуры влияет на все характеристики напряженно-деформированного состояния.

ДОПОЛНИТЕЛЬНО

Вклад авторов. Вклад авторов равноценен.

Конфликт интересов. Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

Источник финансирования. Работа выполнена в рамках государственных заданий ИАПУ ДВО РАН (темы № FWW-2021-0005, FWW-2022-0002).

ADDITIONAL INFORMATION

Authors' contribution. The authors declare that they have no competing interests.

Competing interests. The authors declare that they have no competing interests.

Funding. The work was carried out within the framework of state assignments of the Institute of Automation and Control of the Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences (topics No. FWW-2021-0005, FWW-2022-0002).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Буренин А. А., Ковтанюк Л. В. Большие необратимые деформации и упругое послейдействие // Монография. Владивосток: Дальнаука. 2013. 312 с.
- [2] Лурье А. И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
- [3] Norton F. H. The creep steel of high temperature. Y.: Mc Graw Hill, 1929. 110 p.
- [4] Ишлинский А. Ю., Ивлев Д. Д. Математическая теория пластичности. М.: Физматлит, 2001. 704 с.
- [5] Быковцев Г. И., Ивлев Д. Д. Теория пластичности. Владивосток: Дальнаука, 1998. 528 с.
- [6] Alain I. The correlation between the power-law coefficients in creep: the temperature dependence // Journal of Materials Science. 1998. V. 33. P. 3201-3206.
- [7] Pla F. Bifurcation phenomena in a convection problem with temperature dependent viscosity at low aspect ratio // Physica D: Nonlinear Phenomena. 2009. V. 238. I. 5. P. 572-580.

REFERENCES

- [1] Burenin A. A., Kovtanyuk L. V. Large irreversible strains and elastic aftereffect // Monograph. Vladivostok: Dalnauka. 2013. 312 p. (in Russian).
- [2] Lurie A. I. Nonlinear theory of elasticity. M.: Nauka, 1980. 512 p. (in Russian).
- [3] Norton F. H. The creep steel of high temperature. Y.: Mc Graw Hill, 1929. 110 p.
- [4] Ishlinsky A. Yu., Ivlev D. D. Mathematical theory of plasticity. M.: Fizmatlit, 2001. 704 p. (in Russian).
- [5] Bykovtsev G. I., Ivlev D. D. Plasticity theory. Vladivostok: Dalnauka, 1998. 528 p. (in Russian).
- [6] Alain I. The correlation between the power-law coefficients in creep: the temperature dependence // Journal of Materials Science. 1998. V. 33. P. 3201-3206.
- [7] Pla F. Bifurcation phenomena in a convection problem with temperature dependent viscosity at low aspect ratio // Physica D: Nonlinear Phenomena. 2009. V. 238. I. 5. P. 572-580.