

С. И. Сенашов, И. Л. Савостьянова

ИЗГИБ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОГО БРУСА КОРОВЧАТОГО СЕЧЕНИЯ

Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнева, Красноярск, Россия

Аннотация. Для выдвижения антенн на космических аппаратах используются полые стержни коробчатого сечения большой длины. Эти стержни изготавливаются из многослойных композитных материалов. Под действием солнечного излучения в стержнях возникают напряжения, которые существенно влияют на функции приборов, находящихся на выдвигаемой конструкции. В работе рассмотрен упруго-пластический коробчатый стержень, который изгибается поперечной силой. Предполагается, что деформации в стержне упруго-пластические и боковая поверхность его свободна от напряжений. Центр тяжести поперечного сечения не совпадает с точкой приложения силы. С помощью законов сохранения построено точное решение, описывающее напряженное состояние этой конструкции. Напряженное состояние вычисляется в каждой точке рассмотренной фигуры с помощью интегралов по внешним контурам поперечного сечения.

Ключевые слова: упруго-пластический изгиб, коробчатый брус, точное решение, законы сохранения.

Сенашов Сергей Иванович, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры математического моделирования и процессов управления; e-mail: sen@sibsau.ru; <https://orcid.org/0000-0001-5542-4781>; AuthorID: 214483

Савостьянова Ирина Леонидовна, доцент кафедры информационных экономических систем; e-mail: savostyanova@sibsau.ru; AuthorID: 742389

для цитирования: Сенашов С. И., Савостьянова И. Л. Изгиб упруго-пластического бруса коробчатого сечения // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2024. № 1(59). С. 107–114. DOI: 10.37972/chgpu.2024.59.1.006 EDN: EBWYKU

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0).

S. I. Senashov, I. L. Savostyanova

BENDING OF AN ELASTIC-PLASTIC BEAM OF BOX SECTION

Reshetnev Siberian State University of Science and Technology, Krasnoyarsk, Russia

Abstract. In space technology, hollow box-shaped rods of large length are used to extend antennas on spacecraft. These rods are made of multilayer composite materials. Under the influence of solar radiation, stresses arise in the rods, which significantly affect the functions of the devices located on the extended structure. In the work, the authors considered an elasto-plastic box-shaped rod that bends by transverse force. It is assumed that deformations in the rod are elasto-plastic and its lateral surface is stress-free. The center of gravity of the cross section does not coincide with the point of application of force. The authors have constructed an exact solution using conservation laws describing the stress state of this structure. The authors calculated the stress state at each point of the considered figure using integrals along the external contours of the cross section.

Keywords: elastic-plastic bending, box bar, exact solution, conservation laws.

Sergei I. Senashov, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor; e-mail: sen@sibsau.ru; <https://orcid.org/0000-0001-5542-4781>; AuthorID: 214483

Irina L. Savostyanova, Ph.D. in Pedagogy; e-mail: savostyanova@sibsau.ru; AuthorID: 742389

to cite this article: Senashov S. I., Savostyanova I. L. Bending of an elastic-plastic beam of box section // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2024. No 1(59). p. 107–114. DOI: 10.37972/chgpu.2024.59.1.006 EDN: EBWYKU

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

1. Введение. Проблема компактного размещения и развертывания крупногабаритных трансформируемых конструкций из транспортного положения в рабочее для наземных и комических условий ставит задачи поиска концепций, способных разрешить основное противоречие: минимальная масса, максимальные компактность и необходимые габариты в рабочем состоянии. Перспективный способ, развертывания крупногабаритных трансформируемых конструкций, базируется на упругой энергии, запасаемой в процессе компактного размещения. Перспективными составными частями таких конструкций являются гибкие, упругие стержни из армированных композиционных материалов. Проблема изгиба и кручения армированного композитного стержня во многом определяет потенциальные возможности конструкции в целом. Ситуация, когда масса изделия должна быть минимальна, а надежность развертывания максимальна, требует детального изучения механики процесса, с полным пониманием ограничений, накладываемых на конструкцию, и, как следствие, ограничений на технологию изготовления составных частей таких конструкций.

В современной литературе имеется достаточно решений, описывающих напряженно – деформированное состояние упруго - пластических тел (смотрите, например, [1 - 3] и цитируемую там литературу). Построение точных частных решений опирается, в частности, на методы группового анализа дифференциальных уравнений: симметрии и законы сохранения [4, 5]. Теория симметрий позволяет строить решения так называемым «полуобратным методом», когда к построенному тем или иным способом решению подбирается соответствующая краевая задача. Для решения конкретных краевых задач более перспективным, по мнению авторов, являются законы сохранения, построенные для данной системы уравнений [3, 6]. При этом методика законов сохранения приводит, к так называемому, «численно-аналитическому методу», когда окончательное решение получается в виде интегралов по границе заданной области. Законы сохранения уже показали свою эффективность для решения ряда краевых задач упругости и пластичности, а так уже применяются для решения задач, возникающих для многослойных и композитных материалов.

2. Постановка задачи. Рассмотрено упруго-пластическое состояние бруса коробчатого сечения находящегося под действием поперечной силы. С помощью построенных законов сохранения вычислим напряженное состояние в каждой точке этой конструкции.

В матрице S выполняются уравнение равновесия и уравнение, которое является следствием соотношений Бельтрами–Митчелла

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{\partial \tau_1}{\partial x} + \frac{\partial \tau_2}{\partial y} - P[\delta_1(x - x^0) + \delta_2(y - y^0)] = 0, \\ F_2 &= \frac{\partial \tau_1}{\partial y} - \frac{\partial \tau_2}{\partial x} + P[\delta_1(y - y^0) - \delta_2(x - x^0)] + 2K = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где S - поперечное сечение, I_{ij} - моменты инерции сечения, S_i - статические моменты,

$$\delta_1 = -\frac{I_{11}S - I_{12}S_1^2}{\Delta}, \delta_2 = \frac{I_{12}S - I_{12}S_1S_2}{\Delta}, \Delta = \begin{vmatrix} I_{22} & I_{12} & S_2 \\ I_{12} & I_{11} & S_1 \\ S_2 & S_1 & S \end{vmatrix},$$

$$x^0 = \frac{S_2}{S}, y^0 = \frac{S_1}{S}, \sigma_{33} = P(l-z)(\delta_1(x-x^0) + \delta_2(y-y^0)),$$

$$S = \iint_S ds, S_1 = \iint_S y ds, S_2 = \iint_S x ds, I_{11} = \iint_S y^2 ds, I_{12} = \iint_S xy ds, I_{22} = \iint_S x^2 ds,$$

$\tau_1 = \tau_{xz}, \tau_2 = \tau_{yz}, \sigma_{33} = P(l-z)(\delta_1(x-x^0) + \delta_2(y-y^0))$ - компоненты тензора напряжений, ν - коэффициент Пуассона матрицы, x^0, y^0 - координаты центра тяжести сечения. Пусть брус нагружен в концевом сечении силами, равномерно распределенными с равнодействующей $P = (P, 0, 0)$, которая действует в направлении оси x , центр тяжести поперечного сечения бруса не совпадает с началом координат (рисунок 1).

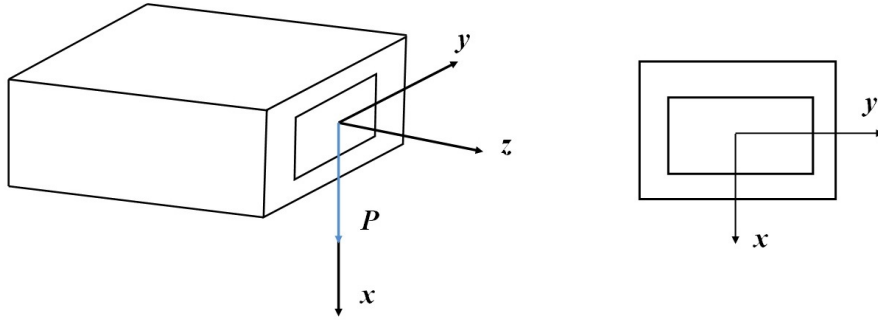


Рис. 1. Изгиб упруго-пластического бруса коробчатого сечения

Постоянная K характеризует крутку вокруг продольной оси бруса, вычисление этой постоянной можно найти в [7, стр. 455]. Материал бруса имеет предел текучести k_S .

Замечание. Второе уравнение (1) без труда получается как следствие первого уравнения (1) и соотношений Бельтрами-Митчелла $\Delta\tau_1 = \frac{P\delta_1}{(1+\nu)}, \Delta\tau_2 = \frac{P\delta_2}{1+\nu}, \Delta$ - оператор Лапласа.

Граничные условия. Внешняя и внутренние поверхности бруса предполагаются свободной от напряжений, поэтому на них выполняются условия

$$\tau_1 n + \tau_2 m = 0, \quad (2)$$

а также условие пластичности

$$\tau_1^2 + \tau_2^2 = k^2 = k_s^2 - \frac{1}{3}\sigma_{33}^2, \quad (3)$$

Здесь n, m - компоненты вектора внешней нормали к боковой поверхности. В результате из (2), (3) получаем следующие граничные условия

$$\tau_1 = -mk, \tau_2 = nk. \quad (4)$$

3. Законы сохранения уравнений (1). Сохраняющийся ток закона сохранения ищем в виде

$$A = \alpha^1 \tau_1 + \beta^1 \tau_2 + \gamma^1, B = \alpha^2 \tau_1 + \beta^2 \tau_2 + \gamma^2, \quad (5)$$

где $\alpha^i, \beta^i, \gamma^i$ - функции от x, y . Имеем

$$\partial_x A + \partial_y B = \omega_1 F_1 + \omega_2 F_2, \quad (6)$$

Подставляем (5) в (6), получаем

$$\partial_x(\alpha^1 \tau_1 + \beta^1 \tau_2 + \gamma^1) + \partial_y(\alpha^2 \tau_1 + \beta^2 \tau_2 + \gamma^2) = \omega_1(\partial_x \tau_1 + \partial_y \tau_2 + C) + \omega_2(\partial_x \tau_2 - \partial_y \tau_1 + D). \quad (7)$$

В формулах (7) для краткости введены обозначения

$$C = -P[\delta_1(x - x^0) + \delta_2(y - y^0)], D = P[\delta_1(y - y^0) - \delta_2(x - x^0)] + 2K.$$

Из (7) получаем

$$\alpha^1 = \beta^2, \alpha^2 = -\beta^1, \partial_x \beta^1 + \partial_y \alpha^1 = 0, \partial_x \alpha^1 - \partial_y \beta^1 = 0, \partial_x \gamma^1 + \partial_y \gamma^2 = \alpha^1 C + \beta^1 D. \quad (8)$$

Из (8) следует, что система уравнений (1) допускает бесконечную серию законов сохранения.

4. Вычисления компонент тензора напряжений в брус. Пусть $(x_0, y_0) \in S$. Рассмотрим решение уравнений (8), которое имеет особенность в этой точке.

$$\begin{aligned} \alpha^1 &= \frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \beta^1 = \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \\ \gamma^1 &= P\left\{-[\delta_1(x_0 - x^0) + \delta_2(y_0 - y^0)] + \frac{2K}{y - y_0}\right\} \arctg \frac{x - x_0}{y - y_0} + \\ &+ \frac{[\delta_1(y_0 - y^0) - \delta_2(x_0 - x^0)]}{2} \ln[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2] - \delta_2(x - x_0)\}, \\ \gamma^2 &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Опишем вокруг точки $(x_0, y_0) \in S_1$ окружность радиуса ε : $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \varepsilon^2$, сделаем разрез, как это изображено на рисунке 2.

По формуле Грина получаем

$$\iint_S (A_x + B_y) dx dy = \oint_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} A dy - B dx - \oint_{\varepsilon} A dy - B dx = 0, \quad (10)$$

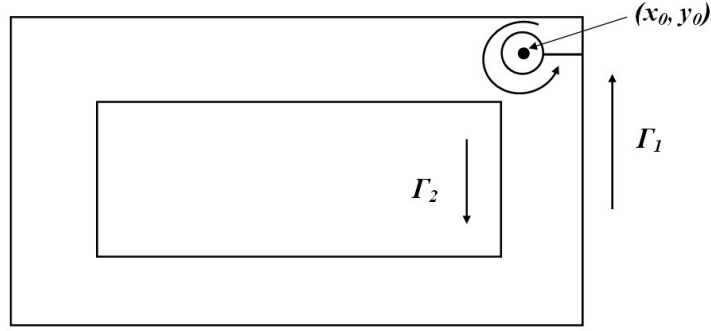


Рис. 2. Направление обхода контуров при вычислении интеграла (10)

где ε - окружность $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \varepsilon^2$.

Рассмотрим решение (9), полагая $x - x_0 = \varepsilon \cos \phi$, $y - y_0 = \varepsilon \sin \phi$, тогда из (10) с учетом (8), при $\varepsilon \rightarrow 0$ получаем

$$2\pi\tau_{12}(x_0, y_0) = \oint_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} \left(m_0 k \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} - n_0 k \frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} + \gamma^1 \right) dy - \\ - \left(m_0 k \frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} + n_0 k \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \right) dx. \quad (11)$$

Рассмотрим другое решение уравнений (8)

$$\alpha_*^1 = \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \\ \beta_*^2 = -\frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \quad \partial_x \gamma_*^1 + \partial_y \gamma_*^2 = \alpha_*^1 C + \beta_*^2 D. \quad \gamma_*^1 = \\ = P[-\delta_1(x - x_0) + \frac{(-\delta_1(x_0 - x^0) + \delta_2(y_0 - y^0))}{2} \ln((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2) + \\ + (\delta_2(x_0 - x^0) - \delta_1(y_0 - y^0) + \frac{2K}{y - y_0}) \operatorname{arctg} \frac{x - x_0}{y - y_0}], \\ \gamma_*^1 = 0. \quad (12)$$

Почти дословно повторяя предыдущие рассуждения с решением (12) получаем

$$2\pi\tau_{23}(x_0, y_0) = \oint_{\Gamma_0} \left(m_0 k \frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} + n_0 k \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \right) dy - \\ - \left(-m_0 k \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} + n_0 k \frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} + \gamma_*^1 \right) dx. \quad (13)$$

Заключение. В работе построены законы сохранения для уравнений, описывающих напряженное состояние упруго–пластического бруса коробчатого сечения под действием поперечной силы для каждой фиксированной точки z . Законы сохранения позволили вычислить напряженное состояние в каждой точке бруса по формулам (12) и (13) с помощью интегралов по внешним границам бруса.

ДОПОЛНИТЕЛЬНО

Вклад авторов. Вклад авторов равноценен.

Конфликт интересов. Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

Источник финансирования. Авторы заявляют об отсутствии внешнего финансирования при проведении исследования.

ADDITIONAL INFORMATION

Authors' contribution. The contribution of the authors is equivalent.

Competing interests. The authors declare that they have no competing interests.

Funding. This study was not supported by any external sources of funding.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Аннин Б. Д., Черепанов Г. П. Упруго–пластическая задача. Новосибирск: Наука, 1983. 238 с.
- [2] Галин Л. А. Упругопластические задачи. Москва: Наука, 1984. 232 с.
- [3] Сенашов С. И. Савостьянова И.Л. Упругопластичность и законы сохранения. Красноярск, СибГУ им. М.Ф.Решетнева, 2023. 190 с.
- [4] Senashov S. I., Yakhno A. N. Conservation Laws, Hodograph Transformation and Boundary Value Problems of Plane Plasticity // SIGMA 8 (2012). 071. 16 pages, <http://dx.doi.org/10.3842/SIGMA.2012.071>. Special Issue "Geometrical Methods in Mathematical Physics"
- [5] Senashov S. I., Vinogradov A.M. Symmetries and conservation laws of 2-dimensional ideal plasticity // Proc. Edinburg Math. Soc. 1988. V.3(2). pp. 415-439.
- [6] Гомонова О. В., Сенашов С. И. Определение областей упругого и пластического деформирования в задаче об одноосном растяжении пластины, ослабленной отверстиями. // Журнал ПМТФ. 2021. Т. 62. №1. С. 208-216.
- [7] Новацкий В. Теория упругости. Москва: Мир, 1975. 872 с.

REFERENCES

- [1] Annin B. D., Cherepanov G. P. Elastic–plastic problem. Novosibirsk, Nauka, 1983. 238 p.
- [2] Galin L. A. Elastoplastic problems. Moscow: Nauka, 1984. 232 p.
- [3] Senashov S. I. Savostyanova I. L. Elastoplasticity and conservation laws. Krasnoyarsk: SibGU, 2023. 190 p.
- [4] Senashov S. I., Yakhno A. N. Conservation Laws, Hodograph Transformation and Boundary Value Problems of Plane Plasticity // SIGMA 8 (2012). 071. 16 pages, <http://dx.doi.org/10.3842/SIGMA.2012.071>. Special Issue "Geometrical Methods in Mathematical Physics"

- [5] Senashov S. I., Vinogradov A. M. Symmetries and conservation laws of 2- dimensional ideal plasticity // Proc. Edinburg Math. Soc. 1988. V.3(2). pp. 415-439.
- [6] Gomonova O. V., Senashov S. I. Determination of elastic and plastic deformation regions in the problem of uniaxial tension of a plate weakened by holes. // Journal of PMTF. 2021. Vol. 62. No.1. pp. 208-216.
- [7] Novatsky V. Theory of elasticity. Moscow: Mir, 1975. 872 p.