Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния.

DOI: `10.37972/chgpu.2024.59.1.008` *EDN: PUSHOQ*

Научная статья *УДК: 539.374*

Нестеров Т. К.

ПЛОСКИЕ МОНОХРОМАТИЧЕСКИЕ СВЯЗАННЫЕ ВОЛНЫ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ И МИКРОВРАЩЕНИЙ В ЛИНЕЙНОМ ПОЛУИЗОТРОПНОМ МИКРОПОЛЯРНОМ ТЕЛЕ

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

Аннотация. В настоящей работе рассматривается процесс распространения плоских монохроматических связанных волн перемещений и микровращений в линейном полуизотропном микрополярном теле. Получено уравнение для определения волнового числа продольной и поперечной плоской монохроматической волны. Рассмотрено дисперсионное уравнение, получены необходимые условия связанности продольных и поперечных волн перемещений и микровращений. Приведена таблица пересчета скоростей продольной и поперечной волны для различных наборов определяющих констант полуизотропного микрополярного тела.

Ключевые слова: микрополярный континуум, полуизотропность, плоская монохроматическая волна, связанная волна перемещений и микровращений, продольная волна, поперечная волна, волновое число.

Нестеров Тимофей Константинович, программист лаборатории моделирования в механике деформируемого твердого тела; `e-mail:` nesterovtim4@gmail.com; AuthorID: 1016707

для цитирования: *Нестеров Т. К.* Плоские монохроматические связанные волны перемещений и микровращений в линейном полуизотропном микрополярном теле // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2024. № 1(59). С. 115–129. DOI: `10.37972/chgpu.2024.59.1.008` EDN: PUSHOQ

Поступила: 01.02.2024; принята в печать: 01.05.2024; опубликована: 05.07.2024.

Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost.

DOI: `10.37972/chgpu.2024.59.1.008` *EDN: PUSHOQ*
Research Article

T. K. Nesterov

PLANE HARMONIC WAVES IN A HEMITROPIC MICROPOLAR BODY

Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia

Abstract. This paper deals with the propagation of plane monochromatic coupled waves of displacement and microrotation in a linear semi-isotropic micropolar body. An equation is obtained for determining the wave number of a longitudinal and transverse plane monochromatic wave. The dispersion equation is considered, and the necessary conditions for the existence of the dependence of the amplitudes of displacements and microrotations for longitudinal and transverse coupled waves are obtained. A table is given for converting the velocities of longitudinal and transverse waves for various sets of material constants of a semi-isotropic micropolar body.

Keywords: Micropolar continuum, semi-isotropy, plane monochromatic waves, coupled waves of displacement and microrotation, longitudinal wave, transverse wave.

Timophey K. Nesterov, Programmer; `e-mail:` nesterovtim4@gmail.com; AuthorID: 1016707

to cite this article: *Nesterov T. K.* Plane harmonic waves in a hemitropic micropolar body // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2024. No 1(59). p. 115–129. DOI: `10.37972/chgpu.2024.59.1.008` EDN: PUSHOQ

Received: 01.02.2024; accepted: 01.05.2024; published: 05.07.2024.

Введение. Математические модели континуумов с микроструктурой это модели сред, в которых точка среды обладает дополнительными степенями свободы, помимо трех, описывающих положение точки среды в пространстве. Дополнительные степени свободы обеспечиваются посредством прикрепления к точке среды т.н. триады "директоров". В таком случае имеет смысл говорить не о точке тела, а о некотором малом теле, построенном на данной триаде директоров. При деформировании такого тела преобразование тройки директоров определяет тензор микродеформации.

Впервые микрополярная теория была предложена в работе [1] в 1909 году. В дальнейшем интерес к ней вернула работа Трусделла и Эриксена, посвященная применению идей, изложенных братьями Коссера, к вопросу расчета оболочек [2]. После этого в 1960-1980 годах теория сред с микроструктурой и в частности теория микрополряных сред получает активное развитие, здесь перечислим некоторые работы [3–7].

Позже в работах [8–11], было замечено, что при моделировании анизотропного микрополярного тела (полуизотропность является простейшим случаем) необходимо привлекать аппарат псевдотензоров [12,13] для получения корректных результатов.

1. Уравнения Навье –Ламе линейного полуизотропного микрополярного тела. Вывод системы уравнений Навье –Ламе для линейного полуизотропного микрополярного тела можно найти в работе [14], и в терминах псевдотензоров [8,11]:

$$
\begin{aligned}
&(\underset{1}{a}+\underset{1}{c})\nabla^j\nabla_p u^p + \underset{1}{b}\nabla^p\nabla_p u^j + \frac{1}{e^2}(\underset{1}{b}-\underset{1}{c})\epsilon^{jpq}\nabla_p \overset{[+1]}{\phi}{}_q + \\
&\qquad + \frac{1}{2}(\overset{[-1]}{\underset{3}{a}} + \overset{[-1]}{\underset{3}{c}})\nabla^j\nabla_p \overset{[+1]}{\phi}{}^p + \frac{1}{2}\overset{[-1]}{\underset{3}{b}}\nabla^p\nabla_p \overset{[+1]}{\phi}{}^j = -\rho(X^j - \ddot{u}^j);\\
&(\overset{[-2]}{\underset{2}{a}} + \overset{[-2]}{\underset{2}{c}})\nabla_j\nabla_p \overset{[+1]}{\phi}{}^p + \overset{[-2]}{\underset{2}{b}}\nabla^p\nabla_p \overset{[+1]}{\phi}{}_j + \frac{1}{2}(\overset{[-1]}{\underset{3}{a}} + \overset{[-1]}{\underset{3}{c}})\nabla_j\nabla_p u^p + \\
&\qquad + \frac{1}{2}\overset{[-1]}{\underset{3}{b}}\nabla^p\nabla_p u_j - \frac{2}{e^2}(\underset{1}{b}-\underset{1}{c})g_{jp}\overset{[+1]}{\phi}{}^p + (\underset{1}{b}-\underset{1}{c})\epsilon_{jpq}\nabla^p u^q \\
&\qquad\qquad + (\overset{[-1]}{\underset{3}{b}} - \overset{[-1]}{\underset{3}{c}})\epsilon_{jpq}\nabla^p \overset{[+1]}{\phi}{}^q = -\rho(\overset{[-1]}{Y}{}_j - \overset{[-2]}{J}\overset{[+1]}{\ddot{\phi}}{}_j),
\end{aligned}
\tag{1}
$$

здесь u^j – вектор макроперемещений (в дальнейшем просто вектор перемещений); $\overset{[+1]}{\phi}{}^j$ – аксиальный вектор микровращения, в квадратных скобках над корневым символом указывается вес псевдотензора; X^j, $\overset{[-1]}{Y}{}_j$ – объемные силы и моменты; ρ, $\overset{[-2]}{J}$ – плотность и тензор микроинерции; $\overset{[W_p]}{\underset{p}{a}}$, $\overset{[W_p]}{\underset{p}{b}}$, $\overset{[W_p]}{\underset{p}{c}}$ где $p = (1, 2, 3)$ – набор материальных констант, соответствующий упругому потенциалу полуизотропного микрополярного тела, записанному в виде основной энергетической формы; $\overset{[-1]}{\epsilon}_{jpq}$, $\overset{[+1]}{\epsilon}{}^{jpq}$ – символы перестановок; $\overset{[+1]}{e}$, $\dfrac{1}{\overset{[-1]}{e}}$ – ориентирующий псевдоскаляр.

Систему уравнений (1) можно можно получить в терминах абсолютных тензоров, согласно методу предложенному в работе [15]. Суть метода заключается в том, чтобы посредством умножения или деления интересующего псевдотензора на целую степень ориентирующего псевдоскаляра $\overset{[+1]}{e}$ (который является ковариантно постоянным) свести итоговый вес произведения к нулю, тем самым получив абсолютный тензор. Благодаря данному подходу система уравнений (1) будет представима в терминах абсолютных тензоров:

$$\begin{aligned}
&(\underset{1}{a}+\underset{1}{c})\nabla^j\nabla_p u^p+\underset{1}{b}\nabla^p\nabla_p u^j+(\underset{1}{b}-\underset{1}{c})e^{jpq}\nabla_p\phi_q+\\
&\qquad+\frac{1}{2}(\underset{3}{a}+\underset{3}{c})\nabla^j\nabla_p\phi^p+\frac{1}{2}\underset{3}{b}\nabla^p\nabla_p\phi^j+\rho(X^j-\ddot{u}^j)=0,\\
&(\underset{2}{a}+\underset{2}{c})\nabla_j\nabla_p\phi^p+\underset{2}{b}\nabla^p\nabla_p\phi_j+\frac{1}{2}(\underset{3}{a}+\underset{3}{c})\nabla_j\nabla_p u^p+\\
&\qquad+\frac{1}{2}\underset{3}{b}\nabla^p\nabla_p u_j-2(\underset{1}{b}-\underset{1}{c})\phi_j+(\underset{1}{b}-\underset{1}{c})e_{jpq}\nabla^p u^q\\
&\qquad\qquad+(\underset{3}{b}-\underset{3}{c})e_{jpq}\nabla^p\phi^q+\rho(Y_j-J\ddot{\phi}_j)=0,
\end{aligned}\tag{2}$$

здесь e^{jpq} – тензор перестановок. Отметим, что в системе уравнений (2) второе уравнение дополнительно умножили на $\overset{[+1]}{e}$.

Коэффициенты при слагаемых в системе уравнений (2) могут быть пересчитаны для иных материальных констант на основе соотношений представленных в работе [16].

Плоские монохроматические связанные волны перемещений и микровращений в линейном полуизотропном микрополярном теле. Плоская связанная монохроматическая волна перемещений и микровращений в линейном полуизотропном микрополярном представима в виде:

$$u_j=U_j e^{i(k_p x^p-\omega t)},\quad \phi_j=\Phi_j e^{i(k_p x^p-\omega t)},\tag{3}$$

где k_p – волновой вектор, x_p – пространственные ковариантные координаты, ω – частота, U_j,Φ_j – компоненты вектора амплитуды (поляризации) колебаний упругой волны и волны кручения, соответственно.

Подставим выражения, описывающие плоскую монохроматическую волну, (3) в систему уравнений движения (2) и учитывая, что:

$$\nabla_q u^j=ik_q u^j,\quad \partial_t u^j=-i\omega u^j,$$

получим систему из двух векторных уравнений, которым должен удовлетворять вектор амплитуд (поляризации) связанной волны перемещений и микровращений:

$$\begin{aligned}
&(\underset{1}{a}+\underset{1}{c})k^j k_p U^p + \underset{1}{b}k^2 U^j + i(\underset{1}{b}-\underset{1}{c})e^{jpq}k_p\Phi_q + \frac{1}{2}(\underset{3}{a}+\underset{3}{c})k^j k_p\Phi^p + \frac{1}{2}\underset{3}{b}k^2\Phi^j + \rho\omega U^j = 0,\\
&(\underset{2}{a}+\underset{2}{c})k_j k_p\Phi^p + \underset{2}{b}k^2\Phi_j + \frac{1}{2}(\underset{3}{a}+\underset{3}{c})k_j k_p U^p + \frac{1}{2}\underset{3}{b}k^2 u_j\\
&\qquad - 2(\underset{1}{b}-\underset{1}{c})\Phi_j + i(\underset{1}{b}-\underset{1}{c})e_{jpq}k^p U^q + i(\underset{3}{b}-\underset{3}{c})e_{jpq}k^p\Phi^q + \omega^2\rho J\Phi_j = 0.
\end{aligned} \tag{4}$$

Систему линейных алгебраических уравнений (4) можно записать в символической форме:

$$\mathbf{D}\cdot\mathbf{X} = \mathbf{0}, \tag{5}$$

где $\mathbf{X} = (U^1, U^2, U^3, \Phi^1, \Phi^2, \Phi^3)$. Без исключения общности рассмотрим случай коллинеарности волнового вектора $\mathbf{k}$ и третьего пространственного орта[2] $\mathbf{k} = (0,0,k)$, тогда матрица $\mathbf{D}$ будет иметь вид:

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & 0 & d_{14} & d_{15} & 0\\ 0 & d_{22} & 0 & d_{24} & d_{25} & 0\\ 0 & 0 & d_{33} & 0 & 0 & d_{36}\\ d_{41} & d_{42} & 0 & d_{44} & d_{45} & 0\\ d_{51} & d_{52} & 0 & d_{54} & d_{55} & 0\\ 0 & 0 & d_{63} & 0 & 0 & d_{66} \end{pmatrix}$$

С помощью перестановок строк и столбцов матрица $\mathbf{D}$ может быть приведена к блочно –диагональному виду. В таком случае вектор амплитуд примет вид:

$$\mathbf{X} = (\mathbf{X}_\perp, \mathbf{X}_\parallel) = (\mathbf{U}_\perp, \boldsymbol{\Phi}_\perp, \mathbf{X}_\parallel) = (U_1, U_2, \Phi_1, \Phi_2, U_3, \Phi_3), \tag{6}$$

где $\mathbf{X}_\perp = (\mathbf{U}_\perp, \boldsymbol{\Phi}_\perp)$ – компоненты связанной поперечной волны перемещений и микровращений, $\mathbf{U}_\perp = (U_1, U_2)$ – компоненты поперечной волны перемещений, $\boldsymbol{\Phi}_\perp = (\Phi_1, \Phi_2)$ – компоненты поперечной волны микровращений, $\mathbf{X}_\parallel = (U_3, \Phi_3)$ – компоненты перемещений и микровращений продольной волны. Матрица $\mathbf{D}$ преобразуется к виду:

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{D}_{11} & \boldsymbol{D}_{12} & 0\\ \boldsymbol{D}_{21} & \boldsymbol{D}_{22} & 0\\ 0 & 0 & \boldsymbol{D}_{33} \end{pmatrix}, \tag{7}$$

[2]Волновой вектор $\mathbf{k}$ всегда можно представить в таком виде посредством поворота системы координат.

где блочные элементы матрицы $\mathbf{D}$ [3] $\mathbf{D}_{ij}$ записываются в следующем виде:

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{D}_{33} = \begin{pmatrix} d_{33} & d_{36} \\ d_{63} & d_{66} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\underset{1}{a} + \underset{1}{b} + \underset{1}{c})k^2 - \rho\omega^2 & \frac{1}{2}(\underset{3}{a} + \underset{3}{b} + \underset{3}{c})k^2 \\ \frac{1}{2}(\underset{3}{a} + \underset{3}{b} + \underset{3}{c})k^2 & (\underset{2}{a} + \underset{2}{b} + \underset{2}{c})k^2 + 2(\underset{1}{b} - \underset{1}{c}) - J\omega^2 \end{pmatrix}, \\
&\boldsymbol{D}_{11} = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 \\ 0 & d_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underset{1}{b}k^2 - \rho\omega^2 & 0 \\ 0 & \underset{1}{b}k^2 - \rho\omega^2 \end{pmatrix}, \\
&\boldsymbol{D}_{22} = \begin{pmatrix} d_{44} & d_{45} \\ d_{54} & d_{55} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(\underset{1}{b} - \underset{1}{c}) + \underset{2}{b}k^2 - J\omega^2 & (\underset{3}{b} - \underset{3}{c})ik \\ -(\underset{3}{b} - \underset{3}{c})ik & 2(\underset{1}{b} - \underset{1}{c}) + \underset{2}{b}k^2 - J\omega^2 \end{pmatrix}, \qquad (8) \\
&\boldsymbol{D}_{12} = \begin{pmatrix} d_{14} & d_{15} \\ d_{24} & d_{25} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\underset{3}{b}k^2 & (\underset{1}{b} - \underset{1}{c})ik \\ -(\underset{1}{b} - \underset{1}{c})ik & \frac{1}{2}\underset{3}{b}k^2 \end{pmatrix}, \\
&\boldsymbol{D}_{21} = \begin{pmatrix} d_{41} & d_{42} \\ d_{51} & d_{52} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\underset{3}{b}k^2 & (\underset{1}{b} - \underset{1}{c})ik \\ -(\underset{1}{b} - \underset{1}{c})ik & \frac{1}{2}\underset{3}{b}k^2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Для того чтобы существовало нетривиальное решение системы (5) необходимо чтобы детерминант матрицы $\mathbf{D}$ был равен нулю. Для блочно –диагональной матрицы $\mathbf{D}$ вида (7) определитель может быть рассчитан по следующей формуле [17][стр. 59, ур. Ia][4]:

$$\det(\mathbf{D}) = \det(\mathbf{D}_{33}) \det(\mathbf{D}_{11}\mathbf{D}_{22} - \mathbf{D}_{21}\mathbf{D}_{12}). \qquad (9)$$

Из уравнения выше сразу можно видеть, что для выполнения равенства (5) достаточно того, чтобы один из множителей был равен нулю. Выпишем их с учетом (8) вида блочных матриц[5] $\mathbf{D}_{ij}$:

$$\det(\mathbf{D}_{33}) = d_{33}d_{66} - d_{63}d_{36} = 0, \qquad (11)$$

$$
\begin{aligned}
&\det(\mathbf{D}_{11}\mathbf{D}_{22} - \mathbf{D}_{12}\mathbf{D}_{21}) = \begin{vmatrix} d_{11}d_{44} - d_{14}^2 + d_{15}^2 & d_{11}d_{45} - 2d_{14}d_{15} \\ -(d_{11}d_{45} - 2d_{14}d_{15}) & d_{11}d_{44} - d_{14}^2 + d_{15}^2 \end{vmatrix} = \qquad (12) \\
&= \left[d_{11}d_{44} - d_{14}^2 + d_{15}^2 - i(d_{11}d_{45} - 2d_{14}d_{15})\right] \left[d_{11}d_{44} - d_{14}^2 + d_{15}^2 + i(d_{11}d_{45} - 2d_{14}d_{15})\right] = 0.
\end{aligned}
$$

---

[3]Отметим, что $\mathbf{D}_{12} = \mathbf{D}_{21}$.

[4]Здесь учитывается, что $\mathbf{D}_{11} = d_{11}\mathbf{I}$, где $\mathbf{I}$ единичная матрица.

[5]Здесь учтены следующие соотношения между элементами блочных матриц:

$$d_{11} = d_{22}, d_{44} = d_{55}, d_{45} = -d_{54}, d_{14} = d_{41} = d_{25} = d_{52}, d_{15} = d_{42} = -d_{51} = -d_{24} \qquad (10)$$

Далее для удобства перейдем к следующим обозначениям:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\underset{1}{a}+\underset{1}{b}+\underset{1}{c}}{\rho}=v_{u\|}^2, \quad \frac{\underset{1}{b}}{\rho}=v_{u\perp}^2,\\
&\frac{\underset{2}{a}+\underset{2}{b}+\underset{2}{c}}{J}=v_{\phi\|}^2, \quad \frac{\underset{2}{b}}{J}=v_{\phi\perp}^2,\\
&\frac{\underset{3}{a}+\underset{3}{b}+\underset{3}{c}}{2\rho J}=v_{s\|}^2, \quad \frac{\underset{3}{b}}{2\rho J}=v_{s\perp}^2,\\
&\frac{2(\underset{1}{b}-\underset{1}{c})}{\rho J}=\Omega_1^2, \quad \frac{(\underset{3}{b}-\underset{3}{c})}{J}=\Omega_3^2,
\end{aligned}
\tag{13}
$$

где $v_{u\|}^2$, $v_{\phi\|}^2$, $v_{s\|}^2$ – скорости распространения связанной продольной волны перемещений и микровращений, соответственно; $v_{u\perp}^2$, $v_{\phi\perp}^2$, $v_{s\perp}^2$ – скорости распространения связанной поперечной волны перемещений и микровращений, соответственно, Ω_1^2, Ω_3^2 – константы, имеющие размерность циклической частоты. Выпишем получившиеся вид блочных матриц $\boldsymbol{D}_{ij}$ с учетом введеных ранее обозначений[6]:

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{D}_{33}=\begin{pmatrix} k^2v_{u\|}^2-\omega^2 & k^2Jv_{s\|}^2\\ k^2\rho v_{s\|}^2 & k^2v_{\phi\|}^2+\rho\,(\Omega_1^2-\omega^2)\end{pmatrix},\\
&\boldsymbol{D}_{11}=\begin{pmatrix} k^2v_{u\perp}^2-\omega^2 & 0\\ 0 & k^2v_{u\perp}^2-\omega^2\end{pmatrix},\\
&\boldsymbol{D}_{22}=\begin{pmatrix} k^2v_{\phi\perp}^2+\rho\,(\Omega_1^2-\omega^2) & ik\Omega_3\\ -ik\Omega_3 & k^2v_{\phi\perp}^2+\rho\,(\Omega_1^2-\omega^2)\end{pmatrix},\\
&\boldsymbol{D}_{12}=J\begin{pmatrix} k^2v_{s\perp}^2 & \dfrac{ik}{2}\Omega_1^2\\ -\dfrac{ik}{2}\Omega_1^2 & k^2v_{s\perp}^2\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{D}_{21}=\rho\begin{pmatrix} k^2v_{s\perp}^2 & \dfrac{ik}{2}\Omega_1^2\\ -\dfrac{ik}{2}\Omega_1^2 & k^2v_{s\perp}^2\end{pmatrix}.
\end{aligned}
\tag{14}
$$

Приведем на основании таблицы (1) из работы [16], формулы пересчета скоростей продольных и поперечных связанных волн перемещений, микровращений для различных наборов материальных констант, которые соберем для удобства в таблице (1).

С учетом вида блочных матриц (14) выпишем соотношения (11), (12) в развернутом виде и получим:

$$
\left(v_{u\|}^2v_{\phi\|}^2-\rho Jv_{s\|}^4\right)k^4-\left(\rho v_{u\|}^2(\omega^2-\Omega_1^2)+\omega^2v_{\phi\|}^2\right)k^2+\rho\omega^2(\omega^2-\Omega_1^2)=0 \tag{15}
$$

[6]Здесь в матрице $\mathbf{D}$ первую, вторую и пятую строку разделили на ρ, а третью, четвертую и шестую строки на J.

Таблица 1. Скорости распространения продольной и поперечной волны перемещений и микровращений

	Скаляры первой основной энергетической формы	Скаляры конвенциональной энергетической формы	Скаляры основной энергетической формы	Материальные скаляры
$v^2_{u\parallel}$	$\dfrac{2(\underset{1}{A}+\underset{3}{A})}{\rho}$	$\dfrac{\lambda+2\mu}{\rho}$	$\dfrac{\underset{1}{a}+\underset{1}{b}+\underset{1}{c}}{\rho}$	$\dfrac{2G(1-\nu)}{\rho(1-2\nu)}$
$v^2_{\phi\parallel}$	$\dfrac{2(\underset{2}{A}+\underset{4}{A})}{J}$	$\dfrac{\beta+2\gamma}{J}$	$\dfrac{\underset{2}{a}+\underset{2}{b}+\underset{2}{c}}{J}$	$\dfrac{2GL^2(1+c_3)}{J}$
$v^2_{s\parallel}$	$\dfrac{\underset{7}{A}+\underset{8}{A}}{\rho J}$	$\dfrac{\varkappa+2\chi}{\rho J}$	$\dfrac{\underset{3}{a}+\underset{3}{b}+\underset{3}{c}}{2\rho J}$	$\dfrac{GL(c_4+c_5)}{\rho J}$
$v^2_{u\perp}$	$\dfrac{\underset{5}{A}+2\underset{3}{A}}{2\rho}$	$\dfrac{\mu+\alpha}{\rho}$	$\dfrac{\underset{1}{b}}{\rho}$	$\dfrac{G(1+c_1)}{\rho}$
$v^2_{\phi\perp}$	$\dfrac{\underset{6}{A}+2\underset{4}{A}}{2J}$	$\dfrac{\gamma+\epsilon}{J}$	$\dfrac{\underset{2}{b}}{J}$	$\dfrac{GL^2(1+c_2)}{J}$
$v^2_{s\perp}$	$\dfrac{2\underset{8}{A}-\underset{9}{A}}{4\rho J}$	$\dfrac{\chi+\nu}{\rho J}$	$\dfrac{\underset{3}{b}}{2\rho J}$	$\dfrac{GL(2c_5-c_6)}{4\rho J}$

$$\left(\rho J v^4_{s\perp} - v^2_{u\perp}v^2_{\phi\perp}\right)k^4 - \left(\rho J v^2_{s\perp}\Omega_1^2 - v^2_{u\perp}\Omega_3^2\right)k^3 + \\ + \left(v^2_{\phi\perp}\omega^2 + \rho v^2_{u\perp}\left(\omega^2-\Omega_1^2\right) + \frac{1}{4}\rho J\Omega_1^4\right)k^2 - \Omega_3^2\omega^2 k - \rho\omega^2\left(\omega^2-\Omega_1^2\right) = 0, \quad (16)$$

$$\left(\rho J v^4_{s\perp} - v^2_{u\perp}v^2_{\phi\perp}\right)k^4 + \left(\rho J v^2_{s\perp}\Omega_1^2 - v^2_{u\perp}\Omega_3^2\right)k^3 + \\ + \left(v^2_{\phi\perp}\omega^2 + \rho v^2_{u\perp}\left(\omega^2-\Omega_1^2\right) + \frac{1}{4}\rho J\Omega_1^4\right)k^2 + \Omega_3^2\omega^2 k - \rho\omega^2\left(\omega^2-\Omega_1^2\right) = 0, \quad (17)$$

где уравнение (15) соответствует соотношению (11), а (16) и (17) соответствуют первому и второму множителю во второй строке выражения (12), соответственно. Таким образом условие равенства нулю определителя, а следовательно и возможность существования нетривиального решения системы (5) выпишется в виде одного биквадратного алгебраического уравнения и двух уравнений четвертой степени.[7] Данные уравнения позволяют определить такие значения k волнового вектора $\mathbf{k}$ при котором будет возможно существование поперечной или продольной связанной волны перемещений и микровращений. Отметим сразу решение, которое удовлетворяет всем трем уравнениям свыше $k=0$, $\omega^2=\Omega_1^2$.

Биквадратное уравнение (15) может быть сведено к квадратному уравнению и его решением будет:

$$k_{1,2}^2=\Big[\pm\sqrt{4J\rho^2\omega^2v_{s\|}^4(\omega^2-\Omega_1^2)+(\rho v_{u\|}^2(\Omega_1^2-\omega^2)+\omega^2v_{\phi\|}^2)^2}\\ +\rho v_{u\|}^2(\omega^2-\Omega_1^2)+v_{\phi\|}^2\omega^2\Big]\backslash 2(v_{u\|}^2v_{\phi\|}^2-J\rho V_{s\|}^4). \quad (18)$$

Уравнения четвертой степени (16), (17) могут быть решены с помощью метода Декарта –Эйлера, изложение которого можно найти, к примеру, в [18].

Определение условий связанности продольной волны перемещений и микровращений. Рассмотрим случай, когда волновой вектор представим в виде $\mathbf{k}=(0,0,k)$, где k волновое число, которое является решением уравнения (15) и не является решением уравнений (16), (17). В таком случае определитель матрицы $\mathbf{D}$ будет равен нулю и следовательно возможно существование нетривиального решения системы (5). Перепишем данную систему с учетом вида (7) матрицы $\mathbf{D}$ и вида (6) вектора амплитуд $\mathbf{X}$:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{D}_{11} & \boldsymbol{D}_{12} & 0\\ \boldsymbol{D}_{21} & \boldsymbol{D}_{22} & 0\\ 0 & 0 & \boldsymbol{D}_{33}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\mathbf{U}_\perp\\ \boldsymbol{\Phi}_\perp\\ \mathbf{X}_\|\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{D}_{11}\cdot\mathbf{U}_\perp+\boldsymbol{D}_{12}\cdot\boldsymbol{\Phi}_\perp\\ \boldsymbol{D}_{21}\cdot\mathbf{U}_\perp+\boldsymbol{D}_{22}\cdot\boldsymbol{\Phi}_\perp\\ \boldsymbol{D}_{33}\cdot\mathbf{X}_\|\end{pmatrix}=\mathbf{0}. \quad (19)$$

Чтобы определить решение данной системы для начала рассмотрим вид компонент связанной поперечной волны $\mathbf{X}_\perp$. Поскольку выбрано такое волновое число k, что уравнения (16), (17) не выполняются, то следовательно не выполняется условие (12). Это означает, что компоненты связанной поперечной волны

[7] От скоростей волны можно перейти к длине волны если разделить на частоту ω, в таком случае получим:

$$\left(\lambda_{\phi\|}^2\lambda_{u\|}^2-\rho J\lambda_{s\|}^4\right)k^4-\left(\lambda_{\phi\|}^2+\rho\lambda_{u\|}^2\left(1-H_1^2\right)\right)k^2+\rho\left(1-H_1^2\right)=0,$$

$$\left(\rho J\lambda_{s\perp}^4-\lambda_{\phi\perp}^2\lambda_{u\perp}^2\right)k^4-\left(\rho J\lambda_{s\perp}^2H_1^2-\lambda_{u\perp}^2H_3^2\right)k^3+\\ +\left(\lambda_{\phi\perp}^2+\rho\lambda_{u\perp}^2\left(1-H_1^2\right)+\frac{1}{4}\rho JH_1^4\right)k^2-H_3^2k-\rho\left(1-H_1^2\right)=0,$$

$$\left(\rho J\lambda_{s\perp}^4-\lambda_{\phi\perp}^2\lambda_{u\perp}^2\right)k^4+\left(\rho J\lambda_{s\perp}^2H_1^2-\lambda_{u\perp}^2H_3^2\right)k^3+\\ +\left(\lambda_{\phi\perp}^2+\rho\lambda_{u\perp}^2\left(1-H_1^2\right)+\frac{1}{4}\rho JH_1^4\right)k^2+H_3^2k-\rho\left(1-H_1^2\right)=0,$$

где $H_1^2=\dfrac{\Omega_1^2}{\omega^2}$, $H_3^2=\dfrac{\Omega_3^2}{\omega^2}$.

могут обладать только тривиальным видом:

$$\mathbf{U}_\perp = (U_1, U_2) = (0, 0), \qquad \boldsymbol{\Phi}_\perp = (\Phi_1, \Phi_2) = (0, 0). \tag{20}$$

Рассмотрим компоненты продольной связанной волны. Поскольку выбрано такое волновое число k, что выполняется уравнение (15), то это позволяет выразить компоненту продольный волны перемещений через компоненту продольный волны микровращений, либо наоборот компоненту продольной волны микровращений через компоненту продольный волны перемещений, что можно символически записать как:

$$U_3 = \frac{1}{C_\parallel}\Phi_3, \qquad \Phi_3 = C_\parallel U_3. \tag{21}$$

Определить неизвестную константу $C_\parallel$ можно из необходимости выполнения следующих соотношений:

$$\boldsymbol{D}_{33} \cdot \mathbf{X}_\parallel = \begin{pmatrix} d_{33} & d_{36} \\ d_{63} & d_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_3 \\ C_\parallel U_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{33} & C_\parallel d_{36} \\ d_{63} & C_\parallel d_{66} \end{pmatrix} U_3 = 0. \tag{22}$$

Откуда видно, что постоянная $C_\parallel$ может принимать два значения, каждое из которых выбирается таким образом, чтобы в соотношениях выше тождественно выполнялось либо первое, либо второе, на что указывает соответствующий нижний числовой индекс:

$$C_{\parallel,1} = -\frac{d_{33}}{d_{36}} = -\frac{k^2 v_{u\parallel}^2 - \omega^2}{k^2 J v_{s\parallel}^2}, \qquad C_{\parallel,2} = -\frac{d_{63}}{d_{66}} = -\frac{k^2 \rho v_{s\parallel}^2}{k^2 v_{\phi\parallel}^2 + \rho\left(\Omega_1^2 - \omega^2\right)}, \tag{23}$$

где k обладает видом (18). При подстановке констант $C_{\parallel,1}$, $C_{\parallel,2}$ в систему уравнений (22) одно из соотношений будет выполняться тождественно благодаря выбранному виду констант, а оставшиеся соотношения будут выполняться в силу выполнения условия (11), поскольку полученные выражения совпадают с определителем матрицы $\mathbf{D}_{33}$. Отметим, что линейная комбинация $\frac{1}{2}(C_{\parallel,1} + C_{\parallel,2})$ так же будет удовлетворять системе уравнений (22).

2. Определение коэффициента связанности поперечной волны перемещений и микровращений. Рассмотрим теперь иной случай, когда волновое число k является решением уравнения (16) или (17), но не является решением уравнения (15). В данном случае уравнение (5) будет обладать нетривиальным решением.

Для начала рассмотрим каким видом будут обладать компоненты продольной связанной волны $\mathbf{X}_\parallel$. Поскольку волновое число k не является решением уравнения (15), то и условие (11) не выполняется, следовательно компоненты продольной волны перемещений и микровращений должны обладать тривиальным видом, чтобы уравнение (5) выполнялось, а именно:

$$\mathbf{X}_\parallel = (U_3, \Phi_3) = (0, 0). \tag{24}$$

Для определения коэффициента связанности поперечной волны перемещений и микровращений представим, что компоненты поперечной волны микровращений связаны с компонентами поперечной волны перемещений следующим соотношением:

$$\mathbf{\Phi}_\perp = \mathbf{C}_\perp \cdot \mathbf{U}_\perp, \tag{25}$$

здесь $\mathbf{C}_\perp$ есть матрица коэффициентов связанности компонент поперечной волны перемещений и микровращений.

Подставим соотношение выше в первые два равенства системы уравнений (19) и получим систему двух векторных уравнений:

$$\begin{aligned} &[\boldsymbol{D}_{11} + \boldsymbol{D}_{12} \cdot \mathbf{C}_\perp] \cdot \mathbf{U}_\perp = 0 \\ &[\boldsymbol{D}_{21} + \boldsymbol{D}_{22} \cdot \mathbf{C}_\perp] \cdot \mathbf{U}_\perp = 0 \end{aligned} \tag{26}$$

В силу произвольности вектора амплитуд поперечной волны перемещений $\mathbf{U}_\perp$ система уравнений выше должна выполняться за счет правильного выбора матрицы коэффициентов $\mathbf{C}_\perp$, которая может принимать два значения. Каждое из этих двух значений выбрано таким образом чтобы тождественно выполнялось первое или второе векторное уравнение (что, по аналогии с предыдущим случаем, указано в нижнем индексе соответствующего коэффициента) в (26):

$$\mathbf{C}_{\perp,1} = -(\mathbf{D}_{12})^{-1} \cdot \mathbf{D}_{11}, \qquad \mathbf{C}_{\perp,2} = -(\mathbf{D}_{22})^{-1} \cdot \mathbf{D}_{21}. \tag{27}$$

Далее подставим полученные выражения (27) для коэффициентов связанности в (26) и придем к двум условиям для каждого значения коэффициента $\mathbf{C}_\perp$ которые должны выполняться:

$$\mathbf{D}_{21} - \mathbf{D}_{22} \cdot (\mathbf{D}_{12})^{-1} \cdot \mathbf{D}_{11} = 0, \qquad \mathbf{D}_{11} - \mathbf{D}_{12} \cdot (\mathbf{D}_{22})^{-1} \cdot \mathbf{D}_{21} = 0; \tag{28}$$

Преобразуем их, учитывая, что матрица $\mathbf{D}_{11}$ обладает структурой вида $d_{11}\mathbf{I}$:

$$\mathbf{D}_{21} - \mathbf{D}_{22} \cdot (\mathbf{D}_{12})^{-1} \cdot \mathbf{D}_{11} = \mathbf{D}_{21} \cdot \mathbf{D}_{12} - \mathbf{D}_{11} \cdot \mathbf{D}_{22} = -(\mathbf{D}_{11} \cdot \mathbf{D}_{22} - \mathbf{D}_{21} \cdot \mathbf{D}_{12}) = 0$$

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{11} - \mathbf{D}_{12} \cdot (\mathbf{D})^{-1}_{22} \cdot \mathbf{D}_{21} = \mathbf{D}_{11} \cdot (\mathbf{D}_{21})^{-1} - \mathbf{D}_{12} \cdot (\mathbf{D}_{22})^{-1} = \\ = (\mathbf{D}_{21})^{-1} \cdot \mathbf{D}_{11} \cdot \mathbf{D}_{22} - \mathbf{D}_{12} = \mathbf{D}_{11} \cdot \mathbf{D}_{22} - \mathbf{D}_{21} \cdot \mathbf{D}_{12} = 0 \end{aligned}$$

Как видно из выкладок выше, условия (28) по сути своей аналогичны и сводятся к условию равенства нулю матрицы $\mathbf{D}_{11} \cdot \mathbf{D}_{22} - \mathbf{D}_{21} \cdot \mathbf{D}_{12}$ и, учитывая вид данной матрицы (12) (условие равенства определителя данной матрицы было условием существования поперечных связанных волн), получим систему из двух уравнений:

$$\begin{aligned} &d_{11}d_{44} - d_{14}^2 + d_{15}^2 = \rho\omega^4 + \left(v_{u\perp}^2 v_{\phi\perp}^2 - \rho J v_{s\perp}^4\right) k^4 - \\ &\qquad - \left(\rho v_{u\perp}^2 + v_{\phi\perp}^2\right) \omega^2 k^2 - \rho\Omega_1^2\omega^2 + \left(\rho\Omega_1^2 v_{u\perp}^2 - \frac{1}{4}\rho J \Omega_1^4\right) k^2 = 0, \\ &d_{11}d_{45} - 2d_{14}d_{15} = -ik\left[\left(\rho J \Omega_1^2 v_{s\perp}^2 - \Omega_3^2 v_{u\perp}^2\right) k^2 + \Omega_3^2\omega^2\right] = 0 \end{aligned}$$

Отсюда сразу можно увидеть одно, указанное ранее, решение $k = 0$, $\omega = \Omega_1^2$. Другое нетривиальное решение получим, выразив из второго соотношения квадрат волнового числа k^2 через квадрат частоты ω^2 (или наоборот) и подставив в первое соотношение. После чего остается только решить полученное биквадратное уравнение относительно k^2 или ω^2, соответственно. Выпишем полученное решение:

$$k^2 = \frac{\Omega_1^4\Omega_3^2\left(\Omega_3^2 - 4\rho v_{s\perp}^2\right)}{4v_{s\perp}^4\left(\rho J^2\Omega_1^4 - \Omega_3^4\right) + 4\Omega_1^2\Omega_3^2 v_{s\perp}^2\left(v_{\phi\perp}^2 - \rho v_{u\perp}^2\right)}, \tag{29}$$

$$\omega^2 = \frac{\Omega_1^4\left(4\rho v_{s\perp}^2 - \Omega_3^2\right)\left(J^2\Omega_1^2 v_{s\perp}^2 - \Omega_3^2 v_{u\perp}^2\right)}{4v_{s\perp}^4\left(\rho J^2\Omega_1^4 - \Omega_3^4\right) + 4\Omega_1^2\Omega_3^2 v_{s\perp}^2\left(v_{\phi\perp}^2 - \rho v_{u\perp}^2\right)}. \tag{30}$$

Таким образом, для найденных квадратов волнового числа и частоты, существует связанная волна перемещений и микровращений.

Заключение. В настоящей работе были получены следующие результаты:

- Приведена таблица пересчета скоростей продольных и поперечных упругих волн и волн кручения для различных наборов материальных констант.
- Получены дисперсионные уравнения для плоской монохроматической волны в линейном полуизотропном микрополярном теле.
- Найдено волновое число при котором возможно существование продольной связанной волны перемещений и микровращений в линейном микрополярном теле и вычислен коэффициент связанности компоненты перемещений и микровращения.
- Определены квадраты частоты, волнового числа (и коэффициент связанности поперечной волны перемещений и микровращений), при которых возможно существование поперечной связанной волны, для которой вектор амплитуд перемещений будет выражаться через вектор амплитуд микровращений.

В дальнейшем данный подход может быть применим к исследованию распространения плоских монохроматических связанных волн перемещений, микровращений, температурных колебаний в линейном микрополярном термоупругом полуизотропном теле.

ДОПОЛНИТЕЛЬНО

Вклад авторов. 100%.
Конфликт интересов. Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.
Источник финансирования. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 23-21-00262 “Связанная термомеханика микрополярных полуизотропных сред”).

ADDITIONAL INFORMATION

Authors’ contribution. 100%.
Competing interests. The authors declare that they have no competing interests.

Funding. The work was carried out with financial support from the Russian Science Foundation (project No. 23-21-00262 "Coupled thermomechanics of micropolar semi-isotropic media").

Автор выражает благодарность Е.В. Мурашкину за плодотворное обсуждение данной статьи.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Cosserat E., Cosserat F. Theory of deformable solid. (Translated by D.H. Delphenich). A. Hermann et sons, 1909.

[2] Ericksen J. L., Truesdell C. Exact theory of stress and strain in rods and shells // Archive for Rational Mechanics and Analysis. 1957. Vol. 1, no. 1. P. 295–323. URL: `http://link.springer.com/10.1007/BF00298012`.

[3] Eringen A.Cemal, Suhubi E.S. Nonlinear theory of simple micro-elastic solids—I // International Journal of Engineering Science. 1964. Vol. 2, no. 2. P. 189–203. URL: `https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/0020722564900047`.

[4] Suhubl E.S., Eringen A.Cemal. Nonlinear theory of micro-elastic solids—II // International Journal of Engineering Science. 1964. Vol. 2, no. 4. P. 389–404. URL: `https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/0020722564900175`.

[5] Kafadar C.B., Eringen A.Cemal. Micropolar media—I the classical theory // International Journal of Engineering Science. 1971. Vol. 9, no. 3. P. 271–305. URL: `https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/0020722571900401`.

[6] Germain P. The Method of Virtual Power in Continuum Mechanics. Part 2: Microstructure // SIAM Journal on Applied Mathematics. 1973. Vol. 25, no. 3. P. 556–575.

[7] Mindlin R. D. Micro-structure in linear elasticity // Archive for Rational Mechanics and Analysis. 1964. Vol. 16, no. 1. P. 51–78. URL: `http://link.springer.com/10.1007/BF00248490`.

[8] Радаев Ю. Н., Мурашкин Е. В. Псевдотензорная формулировка механики гемитропных микрополярных сред // Проблемы прочности и пластичности. 2020. Т. 82, № 4. С. 399–412. DOI: 10.32326/1814-9146-2020-82-4-399-412.

[9] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Об определяющих псевдоскалярах гемитропных микрополярных сред в инверсных координатных системах // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Физико-математические науки». 2021. Т. 25, № 3. С. 457–474. URL: `http://mi.mathnet.ru/vsgtu1870`.

[10] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. К теории гемитропных тензоров четвертого ранга в трехмерных пространствах Евклида // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Физико-математические науки». 2022. Т. 26, № 3. С. 592–602. URL: `http://mi.mathnet.ru/vsgtu1941`.

[11] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. К поливариантности основных уравнений связанной термоупругости микрополярного тела // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния. 2023. № 3(57). С. 112–128. DOI: 10.37972/chgpu.2023.57.3.010.

[12] Сокольников И. С. Тензорный анализ. Теория и применения в геометрии и в механике сплошных сред. Москва : Наука, 1971. P. 376.

[13] Veblen Oswald, Thomas Tracy Yerkes. Extensions of relative tensors // Transactions of the American Mathematical Society. 1924. Vol. 26, no. 3. P. 373–377. URL: `https://www.ams.org/tran/1924-026-03/S0002-9947-1924-1501284-6/`.

[14] Радаев Ю. Н. Правило множителей в ковариантных формулировках микрополярных теорий механики континуума // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Физико-математические науки». 2018. Т. 22, № 3. С. 504–517. URL: `http://mi.mathnet.ru/vsgtu1635`.

[15] Murashkin E. V., Radayev Yu. N. An Algebraic Algorithm of Pseudotensors Weights Eliminating and Recovering // Mechanics of Solids. 2022. Vol. 57, no. 6. P. 1416–1423. URL: https://link.springer.com/10.3103/S0025654422060085.

[16] Мурашкин Е. В. О связи микрополярных определяющих параметров термодинамических потенциалов // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния. 2023. № 1 (55). С. 110–121. URL: https://limit21.ru/upload/articles/825.pdf.

[17] Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. Главная редакция физико-математической литературы. Москва : Наука, 1966. С. 577.

[18] Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров: определения, теоремы, формулы / Ed. by И. Г. Арамановича. Москва : Физматгиз, 1973. P. 832.

REFERENCES

[1] Cosserat E., Cosserat F. Theory of deformable solid. (Translated by D.H. Delphenich). A. Hermann et sons, 1909.

[2] Ericksen J. L., Truesdell C. Exact theory of stress and strain in rods and shells // Archive for Rational Mechanics and Analysis. 1957. Vol. 1, no. 1. P. 295–323. URL: http://link.springer.com/10.1007/BF00298012.

[3] Eringen A.Cemal, Suhubi E.S. Nonlinear theory of simple micro-elastic solids—I // International Journal of Engineering Science. 1964. Vol. 2, no. 2. P. 189–203. URL: https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/0020722564900047.

[4] Suhubl E.S., Eringen A.Cemal. Nonlinear theory of micro-elastic solids—II // International Journal of Engineering Science. 1964. Vol. 2, no. 4. P. 389–404. URL: https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/0020722564900175.

[5] Kafadar C.B., Eringen A.Cemal. Micropolar media—I the classical theory // International Journal of Engineering Science. 1971. Vol. 9, no. 3. P. 271–305. URL: https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/0020722571900401.

[6] Germain P. The Method of Virtual Power in Continuum Mechanics. Part 2: Microstructure // SIAM Journal on Applied Mathematics. 1973. Vol. 25, no. 3. P. 556–575.

[7] Mindlin R. D. Micro-structure in linear elasticity // Archive for Rational Mechanics and Analysis. 1964. Vol. 16, no. 1. P. 51–78. URL: http://link.springer.com/10.1007/BF00248490.

[8] Murashkin Eugenii Valeryevich, Radayev Yuri Nikolaevich. Pseudotensor formulationof the mechanics of hemitropic micropolar media // Problems of Strength and Plasticity. 2020. Vol. 82, no. 4. P. 399–412. URL: URL:https://doi.org/10.32326/1814-9146-2020-82-4-399-412. (In Russian).

[9] Murashkin Eugenii Valeryevich, Radayev Yuri Nikolaevich. On the constitutive pseudoscalars of hemitropic micropolar media in inverse coordinate frames // Ser. Fiz.-Mat. Nauki [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.]. 2021. Vol. 25, no. 3. P. 457–474. URL: http://mi.mathnet.ru/vsgtu1870. (in Russian).

[10] Murashkin Eugenii Valeryevich, Radayev Yuri Nikolaevich. On the theory of fourth-rank hemitropic tensors in three-dimensional Euclidean spaces // Ser. Fiz.-Mat. Nauki [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.]. 2022. Vol. 26, no. 3. P. 592–602. URL: http://mi.mathnet.ru/vsgtu1941. (in Russian).

[11] Murashkin Eugenii Valeryevich, Radayev Yuri Nikolaevich. On the polyvariance of the base equations of coupled micropolar thermoelasticity // Bulletin of the Chuvash State Pedagogical University. I. Ya. Yakovleva. Series: Mechanics of the limit state. 2023. no. 3 (57). P. 112—-128. URL: https://limit21.ru/upload/articles/858.pdf. (In Russian).

[12] Sokolnikoff I.S. Tensor Analysis: Theory and Applications to Geometry and Mechanics of Continua. Applied mathematics series. New York, John Wiley and Sons, 1964. P. xii+361. ISBN: 9780471810520.

[13] Veblen Oswald, Thomas Tracy Yerkes. Extensions of relative tensors // Transactions of the American Mathematical Society. 1924. Vol. 26, no. 3. P. 373–377. URL: https://www.ams.org/tran/1924-026-03/S0002-9947-1924-1501284-6/.

[14] Radayev Y. N. The Lagrange multipliers method in covariant formulations of micropolar continuum mechanics theories // Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.]. 2018. T. 22, № 3. C. 504–517. URL: http://mi.mathnet.ru/vsgtu1635. (in Russian).

[15] Murashkin E. V., Radayev Yu. N. An Algebraic Algorithm of Pseudotensors Weights Eliminating and Recovering // Mechanics of Solids. 2022. Vol. 57, no. 6. P. 1416–1423. URL: https://link.springer.com/10.3103/S0025654422060085.

[16] Murashkin E. V. On the relationship of micropolar constitutive parameters of thermodynamic state potentials // Bulletin of the Chuvash State Pedagogical University. I. Ya. Yakovleva. Series: Mechanics of the limit state. 2023. no. 1 (55). P. 110–121. URL: https://limit21.ru/upload/articles/825.pdf. (In Russian).

[17] Gantmacher F. R. The theory of matrices. New York : Chelsea publishing company, 1959. Vol. I.

[18] Korn G. A., Korn T. M. Mathematical Handbook for Scientists and Engineers. 2-nd edition. New York : McGraw-Hill Book Company, 1968. P. 1130.