Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния.

DOI: `10.37972/chgpu.2024.59.1.011` *EDN: WEHANA*

Научная статья *УДК: 539.374*

С. И. Сенашов, О. В. Гомонова

РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В ПЕРЕМЕЩЕНИЯХ С ПОМОЩЬЮ ЗАКОНОВ СОХРАНЕНИЯ

Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнева, Красноярск, Россия

Аннотация. Для уравнений линейной теории упругости в трехмерном случае построены новые законы сохранения. С их помощью впервые решена краевая задача в перемещениях в общем случае для произвольного тела конечных размеров. Решение получено в виде квадратур по внешней границе тела. Показано, что для решения этой задачи достаточно трех фиксированных гармонических функций.

Ключевые слова: краевая задача, теория упругости, законы сохранения.

Сенашов Сергей Иванович,доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры информационных экономических систем; `e-mail:` sen@sibsau.ru; `https://orcid.org/0000-0001-5542-4781`; AuthorID: 214483

Гомонова Ольга Валерьевна, кандидат физико-математических наук, доцент; заведующий кафедрой высшей математики; `e-mail:` gomonova@sibsau.ru; AuthorID: 501126

для цитирования: *Сенашов С. И., Гомонова О. В.* Решение краевой задачи теории упругости в перемещениях с помощью законов сохранения // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2024. № 1(59). С. 130–134. DOI: `10.37972/chgpu.2024.59.1.011` EDN: WEHANA

Поступила: 01.06.2023; принята в печать: 15.04.2024; опубликована: 05.07.2024.

Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost.

DOI: `10.37972/chgpu.2024.59.1.011` *EDN: WEHAHA*

Research Article

S. I. Senashov, O. V. Gomonova

SOLVING OF BOUNDARY VALUE PROBLEM OF THE THEORY OF ELASTICITY IN DISPLACEMENTS USING CONSERVATION LAWS

Reshetnev Siberian State University of Science and Technology, Krasnoyarsk, Russia

Abstract. New conservation laws are constructed for the equations of the linear theory of elasticity in the three-dimensional case. Using these laws, for the first time, a boundary value problem in displacements was solved in the general case for an arbitrary body of finite dimensions. The solution is obtained in quadratures along the outer boundary of the body. It is shown that three fixed harmonic functions are sufficient to solve considered problem.

Keywords: boundary value problem, theory of elasticity, conservation laws.

Sergei I. Senashov, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor; `e-mail:` sen@sibsau.ru; `https://orcid.org/0000-0001-5542-4781`; AuthorID: 214483

Olga V. Gomonova, PhD. Sci. Phys. & Math.; Assoc. Prof. `e-mail:` savostyanova@sibsau.ru; AuthorID: 501126

to cite this article: *Senashov S. I., Gomonova O. V.* Solving of boundary value problem of the theory of elasticity in displacements using conservation laws // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2024. No 1(59). p. 130–134. DOI: `10.37972/chgpu.2024.59.1.011` EDN: WEHAHA

Received: 01.06.2023; accepted: 15.04.2024; published: 05.07.2024.

Для уравнений линейной теории упругости существует много способов построения точных решений с помощью гармонических функций (см., например [1]). Для этих уравнений упругости строились и законы сохранения [2], которые, однако, не нашли практического применения. В работе показано, что краевая задача в перемещениях может быть полностью решена с помощью законов сохранения, впервые приведенных в статье, и трех гармонических функций.

Рассмотрим уравнения линейной теории упругости в пространственном случае:

$$\begin{aligned} F_1 &= (\lambda + 2\mu)u^1_{xx} + (\lambda + \mu)(u^2_{xy} + u^3_{xz}) + \mu(u^1_{yy} + u^1_{zz}) = 0, \\ F_2 &= (\lambda + 2\mu)u^2_{yy} + (\lambda + \mu)(u^1_{xy} + u^3_{yz}) + \mu(u^2_{xx} + u^2_{zz}) = 0, \\ F_3 &= (\lambda + 2\mu)u^3_{zz} + (\lambda + \mu)(u^1_{xz} + u^2_{yz}) + \mu(u^3_{xx} + u^3_{yy}) = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

где λ, μ – упругие постоянные Ламе, u^i, $(i = 1, 2, 3)$ – компоненты вектора деформации; индекс внизу означает производную по соответствующим переменным. Поставим для этих уравнений следующую краевую задачу:

$$u^1\big|_S = u^1_0(x, y, z), \quad u^2\big|_S = u^2_0(x, y, z), \quad u^3\big|_S = u^3_0(x, y, z). \tag{2}$$

Здесь S – замкнутая поверхность, ограничивающая объем V, $u^i_0\,(i = 1, 2, 3)$ – некоторые заданные функции.

Определение. Законом сохранения для системы уравнений (1) назовем выражение вида

$$A_x + B_y + C_z = \omega_1 F_1 + \omega_2 F_2 + \omega_3 F_3,$$

где A, B, C называются компонентами сохраняющегося тока, $\omega_i\,(i = 1, 2, 3)$ – некоторые линейные дифференциальные операторы, одновременно не равные тождественно нулю. В этой работе A, B, C, ω_i – функции, зависящие только от зависимых и независимых переменных.

Имеет место следующая теорема.

Теорема. Система уравнений (1) допускает закон сохранения со следующими сохраняющимися токами:

$$A = w^1u^1_x + w^2u^2_x + w^3u^3_x, \quad B = w^1u^1_y + w^2u^2_y + w^3u^3_y, \quad C = w^1u^1_z + w^2u^2_z + w^3u^3_z. \tag{3}$$

Здесь $(u^1, u^2, u^3), (w^1, w^2, w^3)$, – произвольные решения системы уравнений (1).

Замечание. Система (1) допускает и другие законы сохранения с другими сохраняющимися токами, отличными от (3). Они здесь не приведены, поскольку не дают решения задачи (1), (2).

Решим задачу (1)–(2), поставленную выше.

Из (3) по формуле Гаусса – Остроградского следует, что

$$\iiint\limits_V (A_x + B_y + C_z)dxdydz = \oiint\limits_S Adydz + Bdzdx + Cdxdy = 0. \tag{4}$$

Пусть (x_0, y_0, z_0) – некоторая внутренняя точка области V и

$$\begin{gathered} u^1 = \frac{1}{r} - \alpha\frac{\partial}{\partial x}\frac{x-x_0}{r}, \quad u^2 = -\alpha\frac{\partial}{\partial y}\frac{x-x_0}{r}, \quad u^3 = -\alpha\frac{\partial}{\partial z}\frac{x-x_0}{r}, \\ 4\alpha = \frac{1}{1-\nu}, r^2 = (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2, \end{gathered} \tag{5}$$

где ν – коэффициент Пуассона. Тогда (5) есть решение системы уравнений (1) [1].

Рассмотрим шар радиуса $\varepsilon : \varepsilon^2 = (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2$, описанный вокруг точки (x_0, y_0, z_0). Тогда из (4) имеем:

$$\oiint\limits_S Adydz + Bdzdx + Cdxdy = -\oiint\limits_\varepsilon Adydz + Bdzdx + Cdxdy. \tag{6}$$

Сделаем в правой части равенства (6) замену по следующим формулам:

$$\begin{gathered} x = x_0 + \varepsilon\cos\psi\cos\varphi, \quad , y = y_0 + \varepsilon\sin\psi\cos\varphi, \quad z = z_0 + \varepsilon\sin\varphi, \\ 0 \le \psi \le 2\pi, \quad \frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}. \end{gathered}$$

Тогда при $\varepsilon \to 0$ из (4)–(6) получаем:

$$\begin{gathered} aw^1(x_0, y_0, z_0) = \\ = \oiint\limits_S u_0^1\left(\frac{1}{r} - \alpha\frac{\partial}{\partial x}\frac{x-x_0}{r}\right)dydz - u_0^2\alpha\frac{\partial}{\partial y}\frac{x-x_0}{r}dzdx - u_0^3\alpha\frac{\partial}{\partial z}\frac{x-x_0}{r}dxdy, \end{gathered} \tag{7}$$

здесь a – постоянная, равная $-\frac{8}{5}\alpha\left(\lambda + \frac{8}{3}\mu\right) + \frac{4}{3}\pi(\lambda+\mu)$.

Аналогично, если в (6) положить

$$u^1 = -\alpha\frac{\partial}{\partial x}\frac{y-y_0}{r}, \quad u^2 = \frac{1}{r} - \alpha\frac{\partial}{\partial y}\frac{y-y_0}{r}, \quad u^3 = -\alpha\frac{\partial}{\partial z}\frac{y-y_0}{r},$$

то получаем:

$$\begin{gathered} bw^2(x_0, y_0, z_0) = \\ = \oiint\limits_S - u_0^1\alpha\frac{\partial}{\partial x}\frac{y-y_0}{r}dydz + u_0^2\left(\frac{1}{r} - \alpha\frac{\partial}{\partial y}\frac{y-y_0}{r}\right)dzdx - u_0^3\alpha\frac{\partial}{\partial z}\frac{y-y_0}{r}dxdy, \end{gathered} \tag{8}$$

где b – постоянная, равная $-\frac{9}{32}\pi^2\alpha\mu + \frac{4}{5}\alpha\pi\left(3\lambda + \frac{11}{3}\mu\right) + \frac{8}{3}\mu\pi$.

Таким же образом, если в (6) положить

$$u^1 = -\alpha\frac{\partial}{\partial x}\frac{z-z_0}{r}, \quad u^2 = -\alpha\frac{\partial}{\partial y}\frac{z-z_0}{r}, \quad u^3 = \frac{1}{r} - \alpha\frac{\partial}{\partial z}\frac{z-z_0}{r},$$

получаем:

$$w^3(x_0, y_0, z_0) =$$
$$= \oiint\limits_S - u_0^1 \alpha \frac{\partial}{\partial x}\frac{z-z_0}{r} dydz - u_0^2 \alpha \frac{\partial}{\partial y}\frac{z-z_0}{r} dzdx + u_0^3 \left(\frac{1}{r} - \alpha \frac{\partial}{\partial z}\frac{z-z_0}{r}\right) dxdy, \tag{9}$$

где c – постоянная, равная $\frac{3}{8}\pi^2\alpha\mu - \frac{4}{5}\alpha\pi\left(2\lambda + \frac{19}{3}\mu\right) + \frac{4}{3}\pi(\lambda + 4\mu)$.

Из формул (7) – (9) можно найти решение уравнений (1) в любой внутренней точке области V. Тем самым краевая задача (2) для системы уравнений (1) полностью решена. Отметим, что подобная задача для случая двумерной упругости решена в [3].

ДОПОЛНИТЕЛЬНО

Вклад авторов. Вклад авторов равноценен.
Конфликт интересов. Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.
Источник финансирования. Авторы заявляют об отсутствии внешнего финансирования при проведении исследования.

ADDITIONAL INFORMATION

Authors' contribution. The contribution of the authors is equivalent.
Competing interests. The authors declare that they have no competing interests.
Funding. This study was not supported by any external sources of funding.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
[2] Олвер П. Приложение групп Ли к дифференциальным уравнениям. М.: Мир, 1989. 639 с.
[3] Аннин Б. Д., Сенашов С. И., Гомонова О. В. Решение краевых задач уравнений двумерной теории упругости с помощью законов сохранения // Вестник СибГУ. 2020. № 3 Т. 21. С. 290–294.

REFERENCES

[1] Novatsky V. Theory of Elasticity. Moscow: Mir, 1975. 872 p. (in Russian)
[2] Olver P. Application of Lie Groups to Differential Equations. Moscow: Mir, 1989. 639 p. (in Russian)
[3] Annin B. D., Senashov S. I., Gomonova O. V. Solving of Boundary Value Problems of 2-dimensional Elasticity Using Conservation Laws // Vestnik SibSAU. 2020, № 3 Vol. 21. Pp. 290–294.