

Ю. В. Немировский^{1,2}, С. В. Тихонов³

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРЕДЕЛЬНЫХ НАГРУЗОК N -СЛОЙНОГО ФИЗИЧЕСКИ-НЕЛИНЕЙНОГО БЕТОННОГО СТЕРЖНЯ

¹Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН, г. Новосибирск, Россия

²Новосибирский государственный технический университет, г. Новосибирск, Россия

³Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия

Аннотация. В данной работе рассматривается задача изгиба многослойного бетонного стержня поперечными нагрузками при наличии зон упругого и нелинейно-неупругого деформирования. Предполагается, что материал может состоять из произвольного количества слоев, отличающихся физическими свойствами. Нагрузки таковы, что верхняя часть стержня находится в области сжатия, а нижняя в области растяжения. В результате действия нагрузок, часть слоев будет находиться в области упругого деформирования, часть в области нелинейного квазиупругого деформирования, а остальная содержать границу раздела упругой и нелинейной квазиупругой области. Решается задача определения минимальных и максимальных нагрузок для каждой из возможных конфигураций областей в стержне. Приводится алгоритм решения в математическом пакете Maple и сравнение полученных результатов с аналитическими расчетами полученными ранее.

Ключевые слова: бетонные стержни, аналитические решения, физическая нелинейность, упругость, поперечные нагрузки, нейтральная линия.

Немировский Юрий Владимирович, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник; e-mail: nemiryury@mail.ru; <https://orcid.org/0000-0002-4281-4358>; AuthorID: 2403

Тихонов Сергей Владимирович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры компьютерных технологий; e-mail: strangcheb@mail.ru; <https://orcid.org/0000-0002-7628-3364>; AuthorID: 183385

для цитирования: Немировский Ю. В., Тихонов С. В. Определение предельных нагрузок n -слойного физически-нелинейного бетонного стержня // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2024. № 1(59). С. 135–143. DOI: 10.37972/chgpu.2024.59.1.009 EDN:RRDADP

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0).

© Немировский Ю. В., Тихонов С. В. 2024

Поступила: 19.04.2024; принята в печать: 01.06.2024; опубликована: 05.07.2024.

Yu. V. Nemirovskii^{1,2}, S. V. Tikhonov³

DETERMINATION OF THE ULTIMATE LOADS OF AN *N*-LAYER PHYSICALLY NONLINEAR CONCRETE ROD

¹*S. Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics of the Siberian Branch of the RAS, Novosibirsk, Russia*

²*Novosibirsk state technical University, Novosibirsk, Russia*

³*I. Ulyanov Chuvash State University, Cheboksary, Russia*

Abstract. This paper considers the problem of bending a multilayer concrete rod under transverse loads in the presence of zones of elastic and nonlinear-inelastic deformation. It is assumed that the material can consist of an arbitrary number of layers that differ in physical properties. The loads are such that the upper part of the rod is in the compression region, and the lower part is in the tension region. As a result of the action of loads, some of the layers will be in the region of elastic deformation, some in the region of nonlinear quasi-elastic deformation, and the rest will contain the interface between the elastic and nonlinear quasi-elastic regions. The problem of determining the minimum and maximum loads for each of the possible configurations of areas in the rod is solved. The solution algorithm in the Maple mathematical package is presented and the results obtained are compared with analytical calculations obtained earlier.

Keywords: concrete rods, analytical solutions, physical nonlinearity, elasticity, transverse loads, neutral line.

Yuri V. Nemirovskii, Dr. Sci. Phys.&Math., Professor, Leading Research Worker; e-mail: nemiryury@mail.ru; <https://orcid.org/0000-0002-4281-4358>; AuthorID: 2403

Sergey V. Tikhonov, PhD, Assoc. Prof.; e-mail: strangcheb@mail.ru; <https://orcid.org/0000-0002-7628-3364>; AuthorID: 183385

to cite this article: Nemirovskii Yu. V., Tikhonov S. V. Determination of the ultimate loads of an *n*-layer physically nonlinear concrete rod // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2024. No 1(59). p. 135–143. DOI: 10.37972/chgpu.2024.59.1.009 EDN:RRDADP

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение. Современные технологии производства железобетонных изделий позволяют создавать многослойные конструкции, где в каждом из слоев может быть реализована своя марка бетона [1]. При проектировании зданий и сооружений часто возникает необходимость расчета стержней на несущую способность. Указанные задачи для многослойных железобетонных стержневых конструкций с учетом влияния формы поперечного сечения, состава фазовых материалов на несущую способность рассматривались в работе [2]. При воздействии поперечных нагрузок в слоях стержня могут возникать как области упругого, так и нелинейного квазиупругого деформирования. Аналитические и численные расчеты для указанных стержней в случае трех слоев были рассмотрены в работах [3,4]. С возрастанием количества слоев соответственно возрастает и количество различных случаев, в которых каждый слой может находиться. Если считать, что слои могут находиться в областях упругого деформирования, нелинейного квазиупругого деформирования и содержать границу раздела упругого и нелинейного квазиупругого деформирования, то в общем случае возможно 3^n различных случаев. Задача поиска верхней и нижней границ нагрузок для каждого конкретного случая рассматривается в данной работе.

1. Основные соотношения. Рассмотрим n -слойный стержень симметричного сечения [5].

Комбинацию из возможных случаев будем обозначать через $(i_1, i_2, \dots, i_j, \dots, i_n)$, где значение i_j для j -го слоя равно 0 для слоя, находящегося целиком в области упругого деформирования, 1 – для нелинейного квазиупругого и 2 – с границей раздела упругой и нелинейной областей.

В данной работе будем считать справедливыми классические кинематические гипотезы Кирхгофа-Лява, при этом имеет место одноосное напряженное состояние, тогда для продольного усилия и изгибающего момента будет справедливо

$$M_y(x) = -2 \sum_{i \in A_e} \int_{-h_i}^{-h_{i-1}} dz \int_0^{b_i} \sigma_i^e z dy - 2 \sum_{i \in A_n} \int_{-h_i}^{-h_{i-1}} dz \int_0^{b_i} \sigma_i^n z dy - \quad (1)$$

$$-2 \sum_{i \in A_z} \left(\int_{-h_i}^{z_i} dz \int_0^{b_i} \sigma_i^n z dy + \int_{z_i}^{-h_{i-1}} dz \int_0^{b_i} \sigma_i^e z dy \right) - 2 \sum_{i=1}^n \int_{h_{i-1}}^{h_i} dz \int_0^{b_i} \sigma_i^e z dy,$$

$$N(x) = -2 \sum_{i \in A_e} \int_{-h_i}^{-h_{i-1}} dz \int_0^{b_i} \sigma_i^e dy - 2 \sum_{i \in A_n} \int_{-h_i}^{-h_{i-1}} dz \int_0^{b_i} \sigma_i^n dy - \quad (2)$$

$$-2 \sum_{i \in A_z} \left(\int_{-h_i}^{z_i} dz \int_0^{b_i} \sigma_i^n dy + \int_{z_i}^{-h_{i-1}} dz \int_0^{b_i} \sigma_i^e dy \right) - 2 \sum_{i=1}^n \int_{h_{i-1}}^{h_i} dz \int_0^{b_i} \sigma_i^e dy,$$

где z_i – граница раздела областей упругого и нелинейного квазиупругого деформирования.

Значения напряжений определяются из соотношений [6–8]

$$\sigma_i^e = E_i \varepsilon, \quad \sigma_i^n = A_{1i} \varepsilon + A_{2i} \varepsilon^2. \quad (3)$$

Будем рассматривать задачу изгиба шарнирно-опертого стержня равномерной поперечной нагрузкой q (рис. 1). Тогда моменты и усилия для данной статически определимой задачи будут равны

$$M_y(x) = q \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} \right), \quad N(x) = 0. \quad (4)$$

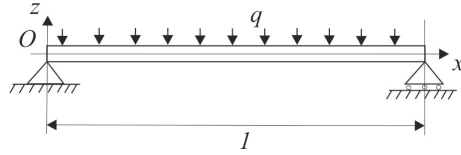


Рис. 1. Шарнирно-опертый стержень под действием равномерно-распределенной нагрузки

В дальнейшем перейдем к безразмерным величинам

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma} &= \frac{\sigma}{\sigma_{1*}^-}, \quad \tilde{l} = 1, \quad \tilde{b}_i = \frac{b_i}{l}, \quad \tilde{h}_i = \frac{h_i}{l}, \\ \tilde{q} &= q \frac{1}{l \sigma_{1*}^-}, \quad \tilde{Q} = Q \frac{1}{l^2 \sigma_{1*}^-}, \quad \tilde{N} = N \frac{1}{l^2 \sigma_{1*}^-}, \quad \tilde{M} = M \frac{1}{l \sigma_{1*}^-}, \quad \tilde{w} = \frac{w}{l}, \end{aligned} \quad (5)$$

где обезразмеривающие величины такие: σ_{1*}^- – предел прочности при сжатии бетона марки B10, l – длина стержня, q – величина распределенной нагрузки, Q – величина перерезывающей силы, M – величина изгибающего момента, N – продольного усилия, w – величина прогиба стержня.

Для деформации справедливы соотношения

$$\varepsilon(x, z) = z_0(x) \frac{d^2 w_0(x)}{dx^2} - z \frac{d^2 w_0(x)}{dx^2}, \quad \varkappa(x) = \frac{d^2 w_0(x)}{dx^2}, \quad (6)$$

где $w_0(x)$ – величина прогиба осевой линии стержня, $z_0(x)$ – величина, определяющая положение нейтральной линии, $\varkappa(x)$ – кривизна осевой линии стержня.

Для определения неизвестных границ раздела областей $z_{j_1}, z_{j_2}, \dots, z_{j_k}$ справедливы соотношения

$$\frac{\varepsilon_{0j_1}^+}{1 - z_{j_1}(x)} = \frac{\varepsilon_{0j_2}^+}{1 - z_{j_2}(x)} = \dots = \frac{\varepsilon_{0j_k}^+}{1 - z_{j_k}(x)}. \quad (7)$$

Решая совместно уравнения (1)–(6) для заданной конфигурации $(i_1, i_2, \dots, i_j, \dots, i_n)$ относительно неизвестных $z_0, z_{j_1}, z_{j_2}, \dots, z_{j_k}$, можно получить распределение деформаций и моментов вдоль всей длины стержня. Причем полученные значения деформации для каждого слоя должны удовлетворять соответствующим ограничениям [5].

2. Определение предельных нагрузок. Минимально возможную нагрузку для заданной конфигурации $(i_1, i_2, \dots, i_j, \dots, i_n)$ будем обозначать через $q_{(i_1, i_2, \dots, i_j, \dots, i_n)}^-$, а максимально возможную через $q_{(i_1, i_2, \dots, i_j, \dots, i_n)}^+$. Указанные предельные нагрузки определим из соотношений

$$q_{(i_1, i_2, \dots, i_j, \dots, i_n)}^- = \min\{q_{(i_1, i_2, \dots, i_j, \dots, i_n), 1}^-, \dots, q_{(i_1, i_2, \dots, i_j, \dots, i_n), k}^-, \dots, q_{(i_1, i_2, \dots, i_j, \dots, i_n), n}^-\}, \quad (8)$$

$$q_{(i_1, i_2, \dots, i_j, \dots, i_n)}^+ = \min\{q_{(i_1, i_2, \dots, i_j, \dots, i_n), 1}^+, \dots, q_{(i_1, i_2, \dots, i_j, \dots, i_n), k}^+, \dots, q_{(i_1, i_2, \dots, i_j, \dots, i_n), n}^+\}, \quad (9)$$

где нагрузка $q_{(i_1, i_2, \dots, i_j, \dots, i_n), k}^\pm$ рассчитывается для конфигурации $(i_1, i_2, \dots, i_j, \dots, i_n)$ в предположении, что минимальное значение (знак минус в верхнем индексе) или максимальное значение (знак плюс в верхнем индексе) достигается в слое с индексом k .

Кривизну \varkappa будем рассматривать как функцию от ε и z , тогда из уравнения (6) получим

$$\varkappa(\varepsilon, z) = \frac{\varepsilon}{z_0 - z}. \quad (10)$$

Для определения нагрузок $q_{(i_1, i_2, \dots, i_j, \dots, i_n), k}^\pm$ в уравнении (4) примем $q = q_{(i_1, i_2, \dots, i_j, \dots, i_n), k}^\pm$ и положим значение кривизны равным (10) при значениях ε и z из таблицы 1 в уравнении (6). Решая совместно полученные уравнения (1)-(6) относительно $q_{(i_1, i_2, \dots, i_j, \dots, i_n), k}^\pm, z_0, z_{j_1}, z_{j_2}, \dots, z_{j_k}$ для заданного сечения x , можем определить искомые предельные нагрузки.

i_k	$q_{(i_1, i_2, \dots, i_j, \dots, i_n), k}^-$	$q_{(i_1, i_2, \dots, i_j, \dots, i_n), k}^+$
0	$\varkappa(0, -h_{k-1})$	$\varkappa(\varepsilon_{0k}^+, -h_k)$
1	$\varkappa(\varepsilon_{0k}^+, -h_{k-1})$	$\varkappa(\varepsilon_{*k}^+, -h_k)$
2	$\varkappa(\varepsilon_{0k}^+, -h_k)$	$\varkappa(\varepsilon_{0k}^+, -h_{k-1})$

Таблица 1. Кривизна стержня при минимальной и максимальной нагрузках для слоя с индексом k

Значение кривизны для соответствующих значений нагрузок из таблицы 1 и соотношения (10) подставим в соотношение для определения деформации (6). Тогда соотношения для определения деформации в зависимости от значения i_k и того, искалась ли минимальная или максимальная нагрузка, примут вид, показанный в таблице 2.

Найденные значения положения нейтральной линии z_0 в заданном сечении позволяют найти значения деформации в каждом слое по соотношениям (6). В зависимости от слоя k и того, максимальное или минимальное значение деформации искалось, определим значение деформации в заданном сечении стержня x . Полученные решения будут иметь место, если для каждого слоя $j = 1, 2, \dots, n$ найденные значения деформации на верхних и нижних границах в каждом сечении x не будут превышать предельные значения (таблица 4).

i_k	$q_{(i_1, i_2, \dots, i_j, \dots, i_n), k}^-$	$q_{(i_1, i_2, \dots, i_j, \dots, i_n), k}^+$
0	$\varepsilon(z) = 0$	$\varepsilon(z) = \frac{\varepsilon_{0k}^+}{z_0 + h_k} (z_0 - z)$
1	$\varepsilon(z) = \frac{\varepsilon_{0k}^+}{z_0 + h_{k-1}} (z_0 - z)$	$\varepsilon(z) = \frac{\varepsilon_{*k}^+}{z_0 + h_{k-1}} (z_0 - z)$
2	$\varepsilon(z) = \frac{\varepsilon_{0k}^+}{z_0 + h_k} (z_0 - z)$	$\varepsilon(z) = \frac{\varepsilon_{0k}^+}{z_0 + h_{k-1}} (z_0 - z)$

Таблица 2. Деформация стержня при минимальной и максимальной нагрузках для слоя с индексом k

i_j	Деформация на нижней границе слоя	Деформация на верхней границе слоя
0	$-\varepsilon_{0j}^- \leq \varepsilon(-h_{i_j-1})$	$\varepsilon(-h_{i_j}) \leq \varepsilon_{0j}^+$
1	$\varepsilon_{0j}^+ \leq \varepsilon(-h_{i_j-1})$	$\varepsilon(-h_{i_j}) \leq \varepsilon_{*j}^+$
2	$\varepsilon(-h_{i_j-1}) \leq \varepsilon_{0j}^+$	$\varepsilon_{0j}^+ \leq \varepsilon(-h_{i_j}) \leq \varepsilon_{*j}^+$

Таблица 3. Условия, которым должна удовлетворять деформация в слое с индексом j

3. Результаты расчета. Для иллюстрации методики расчета предельных нагрузок возьмем физически-нелинейный бетонный стержень, полностью аналогичный рассмотренному в [4], который в дальнейшем будем называть конфигурацией 1

$$b_1 = 0,03, \quad b_2 = 0,04, \quad \Delta_1 = 0,06, \quad \Delta_2 = 0,04, \quad (11)$$

где первый слой реализован из бетона марки В10, второй – марки В30. Соответственно, все обозначения и предположения будут соответствовать работе [4].

№	Марка бетона	E^+	$\varepsilon_0^+, 10^{-2}$	$\varepsilon_*^+, 10^{-2}$	A_{1i}	$A_{2i}, 10^6$
1	В10	1232,92	0,005	0,015	1479,50	-4,93167
2	В30	2629,23	0,005	0,015	3155,08	-10,517
3	В50	3312,54	0,00375	0,015	3975,04	-13,250

Таблица 4. Физические параметры бетонов

Физические параметры бетонов В10, В30, В50, используемые в расчетах, прием согласно таблице 2 [9].

Рассмотрим конфигурацию $(0, 0)$, которая соответствует случаю, когда первый и второй слои полностью находятся в области упругого деформирования. В этом случае минимальное значение деформации и нагрузки будет равно 0

$$q_{(0,0)}^- = q_{(0,0),1}^- = q_{(0,0),2}^- = 0.$$

Максимальное значение нагрузки для конфигурации $(0, 0)$ будет, когда деформация достигнет значения предельной упругой ε_{0k}^+ на верхней границе слоя.

В этом случае нагрузка, соответствующая появлению нелинейной области во втором слое стержня, будет равна

$$q_{(0,0),2}^+ = 0,00048236,$$

а для нагрузки $q_{(0,0),1}^+$ отсутствуют соответствующие деформации, удовлетворяющие условиям в таблице 4.

Нагрузка $q_{(0,2),2}^-$ очевидно будет равна $q_{(0,0),2}^+$

$$q_{(0,2),2}^- = 0,00048236.$$

Максимальное значение нагрузки для конфигурации (0, 2) будет являться $q_{(0,2),1}^+$, а для $q_{(0,2),2}^+$ отсутствуют соответствующие деформации, удовлетворяющие условиям в таблице 4

$$q_{(0,2),1}^+ = 0,0007523.$$

Полученная нагрузка $q_{(0,2),1}^+$ будет равна минимальным нагрузкам для конфигураций (2, 1) и (2, 2)

$$q_{(2,1),1}^- = q_{(2,2),1}^- = q_{(2,2),2}^- = 0,0007523.$$

Откуда очевидно, что при $q \geq q_{(2,1),1}^-$ весь второй слой будет в области нелинейного деформирования и одновременно появится нелинейная область на верхней границе первого слоя.

Наибольшая нагрузка для конфигурации (2, 1) будет равна

$$q_{(2,1),2}^+ = 0,001112.$$

Указанные решения полностью совпадают с решениями, полученными в работе [9].

ДОПОЛНИТЕЛЬНО

Вклад авторов. Вклад авторов равноценен.

Конфликт интересов. Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

Источник финансирования. Авторы заявляют об отсутствии внешнего финансирования при проведении исследования.

ADDITIONAL INFORMATION

Authors' contribution. The authors declare that they have no competing interests.

Competing interests. The authors declare that they have no competing interests.

Funding. This study was not supported by any external sources of funding.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Мут А. Р. Современные технологии производства ЖБИ // Бетон и железобетон. Оборудование. Материалы. Технологии. 2009. С. 20–23.
- [2] Немировский Ю. В., Тихонов С. В. Несущая способность многослойных бетонных стержней. Чебоксары : Изд-во Чуваш-го ун-та, 2022. 180 с.

- [3] Немировский Ю. В., Тихонов С. В. Определение предельных нагрузок при поперечном изгибе многослойных предельно-упругих бетонных стержней // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2023. № 1(55). С. 86–101. EDN: PSLREI. DOI: 10.37972/chgpu.2023.55.1.0010.
- [4] Немировский Ю. В., Тихонов С. В. Об определении положения нейтральной линии в случае предельно-упругого изгиба многослойных физически-нелинейных бетонных стержней // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2023. № 2(56). С. 41–52. EDN: TQWQEM. DOI: 10.37972/chgpu.2023.56.2.005.
- [5] Немировский Ю. В., Тихонов С. В. Предельно-упругий изгиб n -слойного физически-нелинейного бетонного стержня // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2023. № 3(57). С. 91–99. EDN: DJNEIN. DOI: 10.37972/chgpu.2023.57.3.008.
- [6] Мищенко А. В. Прямая и обратная задачи деформирования слоистых стержней с учетом физической нелинейности // Численные методы решения задач теории упругости и пластичности: труды XIX Всероссийской конференции, Бийск, 28-31 августа 2005 г. Параллель, 2005. С. 184–188.
- [7] Мищенко А. В., Немировский Ю. В. Нелинейное деформирование бетонных элементов при продольно-поперечном изгибе // Известия вузов. Строительство. 2013. № 4. С. 133–146. EDN: QOLBMF.
- [8] Немировский Ю. В., Тихонов С. В. Продольно-поперечный изгиб многослойного стержня из физически нелинейного материала // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2020. № 6. С. 14–23. EDN: RRIWCSJ. DOI: 10.31857/S0572329920060112.
- [9] Немировский Ю. В., Тихонов С. В. Продольно-поперечный изгиб физически-нелинейных железобетонных балок // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2021. № 3(49). С. 85–93. EDN: KFUFТА. DOI: 10.37972/chgpu.2021.49.3.008.

REFERENCES

- [1] Muth A. R. Modern technologies for the production of concrete goods // Concrete and reinforced concrete. Equipment. Materials. Technologies. 2009. P. 20–23. (in Russian).
- [2] Nemirovsky Yu. V., Tikhonov S. V. Load-bearing capacity of multilayer concrete bars. Cheboksary : Publishing house of Chuvash University, 2022. 180 p. (in Russian).
- [3] Nemirovsky Yu. V., Tikhonov S. V. Determination of ultimate loads during transverse bending of multilayer extremely elastic concrete rods // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2023. no. 1(55). P. 86–101. EDN: PSLREI. DOI: 10.37972/chgpu.2023.55.1.0010. (in Russian).
- [4] Nemirovsky Yu. V., Tikhonov S. V. On determining the position of the neutral line in the case of extremely elastic bending of multilayer physically nonlinear concrete rods // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2023. no. 2(56). P. 41–52. EDN: TQWQEM. DOI: 10.37972/chgpu.2023.56.2.005. (in Russian).
- [5] Nemirovsky Yu. V., Tikhonov S. V. Ultimate elastic bending of an n -layer physically nonlinear concrete rod // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2023. № 3(57). С. 91–99. EDN: DJNEIN. DOI: 10.37972/chgpu.2023.57.3.008. (in Russian).
- [6] Mishchenko A. V. Direct and inverse problems of deformation of layered rods taking into account physical nonlinearity // Numerical methods for solving problems in the theory of

- elasticity and plasticity: proceedings of the XIX All-Russian Conference, Biysk, August 28-31, 2005. Parallel, 2005. P. 184–188. (in Russian).
- [7] Mishchenko A. V., Neimirovsky Yu. V. Nonlinear deformation of concrete elements during longitudinal-transverse bending // News of universities. Construction. 2013. no. 4. P. 133–146. EDN: QOLBMF. (in Russian).
- [8] Nemirowsky Yu. V., Tikhonov S. V. Longitudinal-transverse bending of a multilayer rod made of a physically nonlinear material // News of the Russian Academy of Sciences. Mechanics of solids. 2020. no. 6. P. 14–23. EDN: RRIWCJ. DOI: 10.31857/S0572329920060112. (in Russian).
- [9] Nemirowsky Yu. V., Tikhonov S. V. Longitudinal-transverse bending of physically nonlinear reinforced concrete beams // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2021. no. 3(49). P. 85–93. EDN: KFUFUA. DOI: 10.37972/chgpu.2021.49.3.008. (in Russian).