Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния.

DOI: `10.37972/chgpu.2024.60.2.003` *EDN: YWVSZG*

Научная статья *УДК: 517.928.4*

В. Н. Орлов[1], *А. Я. Корнилов*[2], *А. В. Воробьева*[2]

ОПТИМИЗАЦИЯ АПРИОРНОЙ ОЦЕНКИ АНАЛИТИЧЕСКОГО ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА В ОБЛАСТИ АНАЛИТИЧНОСТИ

[1]*Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, Москва, Россия*

[2]*Московский государственный университет технологий и управления им. К. Г. Разумовского (ПКУ), Москва, Россия*

Аннотация. В работе представлено решение задачи влияния возмущения начальных данных на аналитическое приближенное решение одного класса нелинейных дифференциальных уравнений в области аналитичности. Результаты работы позволяют осуществлять аналитическое продолжение решения рассматриваемого класса нелинейного дифференциального уравнения в области аналитичности. В работе получена априорная оценка аналитического приближенного решения и дана технология ее оптимизации с помощью апостериорной оценки погрешности. Полученные результаты сопровождены численными экспериментами.

Ключевые слова: нелинейное дифференциальное уравнение, задача Коши, аналитическое приближенное решение, априорная оценка, оптимизация.

Орлов Виктор Николаевич, доктор физико-математических наук, доцент; `e-mail:` orlovvn@mgsu.ru; `https://orcid.org/0000-0001-7606-5490`; AuthorID: 711175

Корнилов Александр Яковлевич, кандидат физико-математических наук, доцент; `e-mail:` a.kornilov@mgutm.ru; `https://orcid.org/0009-0003-5435-2941`; AuthorID: 161334

Воробьева Алла Викторовна, кандидат технических наук, доцент, заведующий кафедрой высшей математики; `e-mail:` a.vorobiova@mgutm.ru; `https://orcid.org/0000-0003-3897-9560`; AuthorID: 221781

для цитирования: *Орлов В. Н., Корнилов А. Я., Воробьева А. В.* Оптимизация априорной оценки аналитического приближенного решения одного класса нелинейного дифференциального уравнения третьего порядка в области аналитичности // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2024. № 2(60). С. 35–50. DOI: `10.37972/chgpu.2024.60.2.003` EDN: YWVSZG

Поступила: 01.06.24; принята в печать: 29.11.24; опубликована: 18.12.24.

Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost.

DOI: 10.37972/chgpu.2024.60.2.003 *EDN: YWVSZG*
Research Article

V. N. Orlov[1], *A. Ya. Kornilov*[2], *A. V. Vorobyeva*[2]

OPTIMIZATION OF AN A PRIORI ESTIMATE OF AN ANALYTICAL APPROXIMATE SOLUTION OF ONE CLASS OF NONLINEAR THIRD ORDER DIFFERENTIAL EQUATION IN THE FIELD OF ANALYTICS

[1]*National Research Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia.*

[2]*Moscow State University of Technology and Management. K.G. Razumovsky (PKU), Moscow, Russia.*

Abstract. The paper presents a solution to the problem of the influence of a disturbance of the initial data on the analytical an approximate solution of one class of nonlinear differential equations in the domain of analyticity. The results of the work allow us to carry out the analytical continuation of the solution of the considered class of nonlinear differential equation in the domain of analyticity. In this work, an a priori estimate of the analytical approximate solution is obtained and a technology for its optimization using an a posteriori error estimate is given. The results obtained are accompanied by numerical experiments.

Keywords: nonlinear differential equation, Cauchy problem, analytical approximate solution, a priori assessment, optimization.

Victor N. Orlov,Doctor of Physical and Mathematics, Docent; `e-mail:` orlovvn@mgsu.ru; `https://orcid.org/0000-0001-7606-5490`; AuthorID: 711175

Alexander Ya. Kornilov, Candidate of Physics and Mathematics, Docent;
`e-mail:` a.kornilov@mgutm.ru; `https://orcid.org/0009-0003-5435-2941`; AuthorID: 161334

Alla V. Vorobyeva, Candidate of Technical Sciences, Docent; `e-mail:` a.vorobiova@mgutm.ru; `https://orcid.org/0000-0003-3897-9560`; AuthorID: 221781

to cite this article: *Orlov V. N., Kornilov A. Ya., Vorobyeva A. V.* Optimization of an a priori estimate of an analytical approximate solution of one class of nonlinear third order differential equation in the field of analytics // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2024. No 2(60). p. 35–50. DOI: `10.37972/chgpu.2024.60.2.003` EDN: YWVSZG

Received: 01.06.24; accepted: 29.11.24; published: 18.12.24.

Введение. Нелинейные дифференциальные уравнения имеют приложения: при исследовании волновых процессов в эластичных балках [1, 2], в строительных конструкциях [3, 4], в исследованиях эволюционных процессов [5–7] . Особенностью нелинейных дифференциальных уравнений является наличие подвижных особых точек алгеброического типа. На данный момент существует два варианта разрешимости таких уравнений: разрешимость в квадратурах в частных случаях, как предлагается в работах [8–26], второй вариант связан с авторским методом аналитического приближенного решения. Этот метод состоит из решения ряда математических задач, некоторые из которых представлены в работах [27–30]. В данной работе представлено решение одной из задач авторского метода: исследование влияния возмущения начальных данных на аналитическое приближенное решение. Актуальность решения данной задачи связано с аналитическим продолжением решения в области аналитичности для рассматриваемого нелинейного дифференциального уравнения.

Методы исследования

В работе [31] доказана теорема существования решения задачи Коши:

$$y^{'''} = y^3 + r(x), \tag{1}$$

$$y(x_0) = y_0, \quad y^{'}(x_0) = y_1, \quad y^{''}(x_0) = y_2 \tag{2}$$

в области $|x - x_0| < \rho_2$,

где $\rho_2 = \min\{\rho_1, \sqrt[3]{\frac{1}{(M+1)^2}}\}, \quad M = \max\{|y_0|, |y_1|, |y_2|, \sup\limits_n \frac{|r^n(x_0)|}{n!}\}$,

ρ_1 – радиус области аналитичности функции $r(x)$.

Если на первом этапе для получения аналитического приближенного решения задачи Коши (1)-(2)

$$Y_n(x) = \sum_{n=0}^{N} C_n (x - x_0)^n, \tag{3}$$

можно воспользоватся результатом работы [31], то на втором этапе, при осуществлении аналитического продолжения решения (3) требуется решить задачу влияния возмущения начальных данных на аналитическое приближенное решение.

Рассмотрим задачу Коши:

$$y^{'''} = y^3 + r(x), \tag{4}$$

$$y(x_0) = \tilde{y}_0, \quad y^{'}(x_0) = \tilde{y}_1, \quad y^{''}(x_0) = \tilde{y}_2 \tag{5}$$

Решением задачи (4)-(5), вместо структуры аналитического приближенного решения (3), будем иметь

$$\tilde{y}(x) = \sum_{k=1}^{n} \tilde{C}_n (x - x_0)^n, \tag{6}$$

где $\tilde{C}_n$ - возмущенное значение коэффициентов.

Теорема 1. Пусть $r(x)$ - аналитическая функция в области

$$|x - x_0| < \rho_1; \quad \Delta M < 1.$$

Тогда для аналитического приближенного решения (6), задачи Коши (4)-(5) справедлива оценка погрешности

$$\Delta \tilde{y}_1(x) \leqslant \Delta_0 + \Delta_1.$$

В области

$$|x - x_0| < \rho_2,$$

где

$$\Delta_0 \leqslant \Delta M(1 + |x - x_0| + |x - x_0|^2) +$$

$$+ \frac{\Delta M (M + \Delta M + 1)^3 |x - x_0|^3}{1 - (M + \Delta M + 1)^2 |x - x_0|^3} \left(\frac{1}{120} + \frac{|x - x_0|}{24} + \frac{|x - x_0|^2}{60} \right),$$

$$\Delta_1 \leqslant \frac{(M+1)^{\frac{2N+5}{3}} |x - x_0|^{N+1}}{(N+1)(1 - (M+1)^2)|x - x_0|^3} \times$$

$$\times \left(\frac{1}{N(N-1)} + \frac{|x - x_0|}{N(N+2)} + \frac{|x - x_0|^2}{(N+2)(N+3)} \right),$$

в случае $N + 1 = 3n$,

$$\Delta_1 \leqslant \frac{(M+1)^{\frac{2N+3}{3}} |x - x_0|^{N+1}}{(N+1)(1 - (M+1)^2)|x - x_0|^3} \times$$

$$\times \left(\frac{1}{N(N-1)} + \frac{|x - x_0|}{N(N+2)} + \frac{|x - x_0|^2 (M+1)^2}{(N+2)(N+3)} \right),$$

в случае $N + 1 = 3n + 1$,

$$\Delta_1 \leqslant \frac{(M+1)^{\frac{2N+1}{3}} |x - x_0|^{N+1}}{(N+1)(1 - (M+1)^2)|x - x_0|^3} \times$$

$$\times \left(\frac{1}{N(N-1)} + \frac{|x - x_0|(M+1)^2}{N(N+2)} + \frac{|x - x_0|^2 (M+1)^2}{(N+2)(N+3)} \right),$$

в случае $N + 1 = 3n + 2$,

$$M = \max \left\{ |\tilde{y}_0|, |\tilde{y}_1|, |\tilde{y}_2|, \sup_n \frac{|r^n(x_0)|}{n!} \right\}, n = 0, 1, 2, ...$$

$$\Delta M = \max\{\tilde{y}_0, \tilde{y}_1, \tilde{y}_2\}, \quad \rho_2 = \min\left\{\rho_1, \sqrt[3]{\frac{1}{(M+\Delta M+1)^2}}, \sqrt[3]{\frac{1}{(M+1)^2}}\right\}.$$

Докозательство.

$$\Delta\tilde{y}_N(x) = |y(x) - \tilde{y}_N(x)| \leqslant |y(x) - \tilde{y}(x)| + |\tilde{y}(x) - \tilde{y}_N(x)|.$$

Или, с учетом выражений (3) и (6)

$$\Delta\tilde{y}_N(x) \leqslant \left|\sum_{n=0}^{\infty} C_n(x-x_0)^n - \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{C}_n(x-x_0)^n\right| +$$

$$+\left|\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{C}_n(x-x_0)^n - \sum_{n=0}^{N} \tilde{C}_n(x-x_0)^n\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\sum_{n=0}^{\infty}(C_n - \tilde{C}_n)(x-x_0)^n\right| + \left|\sum_{n+1}^{\infty} \tilde{C}_n(x-x_0)^n\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \Delta\tilde{C}_n|x-x_0|^n + \sum_{n+1}^{\infty} |\tilde{C}_n||x-x_0|^n = \Delta_0 + \Delta_1,$$

где

$$\Delta\tilde{C}_n = \left|C_n - \tilde{C}_n\right|.$$

Оценка для Δ_1 следует на основании работы [31]:

$$\Delta_1 \leqslant \frac{(M+1)^{\frac{2N+5}{3}}|x-x_0|^{N+1}}{(N+1)(1-(M+1)^2)|x-x_0|^3}\times$$

$$\times\left(\frac{1}{N(N-1)} + \frac{|x-x_0|}{N(N+2)} + \frac{|x-x_0|^2}{(N+2)(N+3)}\right)$$

в случае $N+1 = 3n$,

$$\Delta_1 \leqslant \frac{(M+1)^{\frac{2N+3}{3}}|x-x_0|^{N+1}}{(N+1)(1-(M+1)^2)|x-x_0|^3}\times$$

$$\times\left(\frac{1}{N(N-1)} + \frac{|x-x_0|}{N(N+2)} + \frac{|x-x_0|^2(M+1)^2}{(N+2)(N+3)}\right)$$

в случае $N+1 = 3n+1$,

$$\Delta_1 \leqslant \frac{(M+1)^{\frac{2N+1}{3}}|x-x_0|^{N+1}}{(N+1)(1-(M+1)^2)|x-x_0|^3}\times$$

$$\times\left(\frac{1}{N(N-1)} + \frac{|x-x_0|(M+1)^2}{N(N+2)} + \frac{|x-x_0|^2(M+1)^2}{(N+2)(N+3)}\right)$$

в случае $N+1=3n+2$.

В области

$$|x-x_0| < \frac{1}{\sqrt[3]{(M+1)^2}}.$$

При этом

$$M = \max\left\{|\tilde{y}_0|, |\tilde{y}_1|, |\tilde{y}_2|, \sup_n \frac{|r^n(x_0)|}{n!}\right\}, n=0,1,2,...$$

Напомним оценки для коэффициентов C_n, полученные в работе [31]

$$|C_{3n}| \leqslant \frac{1}{3n(3n-1)(3n-2)}(M+1)^{2n+1},$$

$$|C_{3n+1}| \leqslant \frac{1}{(3n+1)(3n)(3n-1)}(M+1)^{2n+1},$$

$$|C_{3n+2}| \leqslant \frac{1}{(3n+2)(3n+1)3n}(M+1)^{2n+1}.$$

Докажем оценки для $\Delta\tilde{C}_n$ с учетом значений его индекса:

$$\Delta\tilde{C}_{3n} \leqslant \frac{\Delta M(M+\Delta M+1)^{2n+1}}{3n(3n-1)(3n-2)} = \vartheta_{3n}, \tag{7}$$

$$\Delta\tilde{C}_{3n+1} \leqslant \frac{\Delta M(M+\Delta M+1)^{2n+1}}{(3n+1)(3n)(3n-1)} = \vartheta_{3n+1}, \tag{8}$$

$$\Delta\tilde{C}_{3n+2} \leqslant \frac{\Delta M(M+\Delta M+1)^{2n+1}}{(3n+2)(3n+1)(3n)} = \vartheta_{3n+2}. \tag{9}$$

Докажем вариант оценки (7) с учетом рекурентного соотношения для коэффициентов C_n, полученный в работе [31]:

$$n(n-1)(n-2)C_n = C_{n-3}{}^{**} + A_{n-3}$$

для $n \geq 3$, где

$$C_n{}^{**} = \sum_{i=0}^{n} C_i \cdot C_{n-i}{}^{*}, \quad C_n{}^{*} = \sum_{i=0}^{n} C_i \cdot C_{n-i}.$$

$$\Delta\tilde{C}_{3n+3} = |C_{3n+3} - \tilde{C}_{3n+3}| =$$

$$= \frac{1}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}|C_n{}^{**} + A_{3n} - \tilde{C_{3n}}{}^{**} - A_{3n}| =$$

$$= \frac{1}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}|C_n{}^{**} - \tilde{C_{3n}}{}^{**}| =$$

$$= \frac{1}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}\times$$

$$\times\left|\sum_{i=1}^{n} C_{3i}\left(\sum_{j=1}^{n+1-i-j} C_{3j}C_{3n-3i-3j}\right) - \sum_{i=1}^{n}\tilde{C}_{3i}\left(\sum_{j=1}^{n+1-i-j}\tilde{C}_{3j}\tilde{C}_{3n-3i-3j}\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant |\frac{1}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}\sum_{i=1}^{n}(\tilde{C}_{3i}+\Delta\tilde{C}_{3i})\times$$

$$\times\left(\sum_{j=1}^{n+1-i-j}(\tilde{C}_{3j}+\Delta\tilde{C}_{3j})(\tilde{C}_{3n-3i-3j}+\Delta\tilde{C}_{3n-3i-3j})\right) -$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\tilde{C}_{3i}\left(\sum_{j=1}^{n+1-i-j}\tilde{C}_{3j}\tilde{C}_{3n-3i-3j}\right)|.$$

После раскрытия скобок в последнем выражении и приведения подобных, будем иметь:

$$\Delta\tilde{C}_{3n+3} \leqslant \frac{1}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}|\sum_{i=1}^{n}\tilde{C}_{3i}\left(\sum_{j=1}^{n+1-i-j}\tilde{C}_{3j}\Delta\tilde{C}_{3n-3i-3j}\right)+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\tilde{C}_{3i}\left(\sum_{j=1}^{n+1-i-j}\Delta\tilde{C}_{3j}\tilde{C}_{3n-3i-3j}\right)+\sum_{i=1}^{n}\tilde{C}_{3i}\left(\sum_{j=1}^{n+1-i-j}\Delta\tilde{C}_{3j}\tilde{C}_{3n-3i-3j}\right)+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\tilde{C}_{3i}\left(\sum_{j=1}^{n+1-i-j}\tilde{C}_{3j}\tilde{C}_{3n-3i-3j}\right)+\sum_{i=1}^{n}\tilde{C}_{3i}\left(\sum_{j=1}^{n+1-i-j}\tilde{C}_{3j}\Delta\tilde{C}_{3n-3i-3j}\right)+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\tilde{C}_{3i}\left(\sum_{j=1}^{n+1-i-j}\Delta\tilde{C}_{3j}\tilde{C}_{3n-3i-3j}\right)+\sum_{i=1}^{n}\tilde{C}_{3i}\left(\sum_{j=1}^{n+1-i-j}\Delta\tilde{C}_{3j}\Delta\tilde{C}_{3n-3i-3j}\right)|.$$

Подставим в последнее выражение оценки (7), (8), (9), а также оценки для $\tilde{C}_{3n}, \tilde{C}_{3n+1}, \tilde{C}_{3n+2}$ из работы [31]:

$$|\tilde{C}_{3n}| \leqslant \frac{1}{3n(3n-1)(3n-2)}(M+1)^{2n+1},$$

$$|\tilde{C}_{3n+1}| \leqslant \frac{1}{(3n+1)(3n)(3n-1)}(M+1)^{2n+1},$$

$$|\tilde{C}_{3n+2}| \leqslant \frac{1}{(3n+2)(3n+1)(3n)}(M+1)^{2n+1},$$

получаем:

$$\Delta\tilde{C}_{3n+3} \leqslant \frac{1}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)} | \sum_{i=1}^{n} \frac{(M+1)^{2i+1}}{(3i)(3i-1)(3i-2)} \times$$

$$\times \left(\sum_{j=1}^{n+1-i-j} \frac{(M+1)^{2j+1}}{(3j)(3j-1)(3j-2)} \frac{\Delta M(M+\Delta M+1)^{2n+3-2i-2j-2}}{(3n)(3n+2)(3n+1)} \right) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \frac{(M+1)^{2i+1}}{(3i)(3i-1)(3i-2)} \times$$

$$\times (\sum_{j=1}^{n+1-i-j} \frac{\Delta M(M+\Delta M+1)^{2j+1}}{(3j)(3j-1)(3j-2)} \frac{(M+\Delta M+1)^{2n+3-2i-2j-2}}{(3n-3i-3j)} \times$$

$$\times \frac{1}{(3n-3i-3j-1)(3n-3i-3j-2)}) + \sum_{i=1}^{n} \frac{(M+1)^{2i+1}}{(3i)(3i-1)(3i-2)} \times$$

$$\times (\sum_{j=1}^{n+1-i-j} \frac{\Delta M(M+\Delta M+1)^{2j+1}}{(3j)(3j-1)(3j-2)} \times$$

$$\times \frac{\Delta M(M+\Delta M+1)^{2n+3-2i-1-2j-1}}{(3n-3i-3j)(3n-3i-3j-1)(3n-3i-3j-2)}) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta M(M+\Delta M+1)^{2i+1}}{(3i)(3i-1)(3i-2)} (\sum_{j=1}^{n+1-i-j} \frac{(M+1)^{2j+1}}{(3j)(3j-1)(3j-2)} \times$$

$$\times \frac{(M+1)^{2n+3-2i-1-2j-1}}{(3n-3i-3j)(3n-3i-3j-2)(3n-3i-3j-1)}) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta M(M+\Delta M+1)^{2i+1}}{(3i)(3i-1)(3i-2)} (\sum_{j=1}^{n+1-i-j} \frac{\Delta M(M+\Delta M+1)^{2j+1}}{(3j)(3j-1)(3j-2)} \times$$

$$\times \frac{\Delta M(M+\Delta M+1)^{2n+3-2i-1-2j-2}}{(3n-3i-3j)(3n-3i-3j-1)(3n-3i-3j-2)}) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta M(M+\Delta M+1)^{2i+1}}{(3i)(3i-1)(3i-2)} \times$$

$$\times (\sum_{j=1}^{n+1-i-j} \frac{\Delta M(M+\Delta M+1)^{2j+1}}{(3j)(3j-1)(3j-2)} \times$$

$$\times \frac{(M+1)^{2n+3-2i-1-2j-1}}{(3n-3i-3j)(3n-3i-3j-1)(3n-3i-3j-2)}) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta M(M+\Delta M+1)^{2i+1}}{(3i)(3i-1)(3i-2)} (\sum_{j=1}^{n+1-i-j} \frac{\Delta M(M+\Delta M+1)^{2j+1}}{(3j)(3j-1)(3j-2)} \times$$

$$\times\frac{\Delta M(M+\Delta M+1)^{2n+3-2i-1-2j-1}}{(3n-3i-3j)(3n-3i-3j-1)(3n-3i-3j-2)})|.$$

После ряда преобразований в последенем получим оценку

$$\Delta\tilde{C}_{3n+3}\leqslant\frac{\Delta M(M+\Delta M+1)^{2n+3}}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}.$$

Переходим к оценке Δ_0.

Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}\vartheta_n|x-x_0|^n, \tag{10}$$

мажорантный для ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty}\Delta\tilde{C}_n|x-x_0|^n, \tag{11}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\vartheta_n|x-x_0|^n=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Delta M(M+\Delta M+1)^{2k+1}}{(3k)(3k-1)(3k-2)}|x-x_0|^{3k}+$$
$$+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Delta M(M+\Delta M+1)^{2k+1}}{(3k)(3k+1)(3k-1)}|x-x_0|^{3k+1}+$$
$$+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Delta M(M+\Delta M+1)^{2k+1}}{(3k+2)(3k+1)(3k)}|x-x_0|^{3k+2}.$$

Для каждого ряда в правой части последнего равенства имеем, на основании достаточного признака сходимости рядов, область

$$|x-x_0|<\sqrt[3]{\frac{1}{(M+\Delta M+1)^2}};$$

На основании связи рядов (10) и (11) имеем:

$$\Delta_0=\sum_{n=0}^{\infty}\Delta\tilde{C}_n|x-x_0|^n\leqslant$$
$$\leqslant\Delta\tilde{C}_0+\Delta\tilde{C}_1|x-x_0|+\Delta\tilde{C}_2|x-x_0|^2+\sum_{k=1}^{\infty}\Delta\tilde{C}_{3k}|x-x_0|^{3k}+$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}\Delta\tilde{C}_{3k+1}|x-x_0|^{3k+1}+\sum_{k=1}^{\infty}\Delta\tilde{C}_{3k+2}|x-x_0|^{3k+2}\leqslant$$
$$\leqslant\Delta\tilde{C}_0+\Delta\tilde{C}_1|x-x_0|+\Delta\tilde{C}_2|x-x_0|^2+\sum_{k=1}^{\infty}\vartheta_{3k}|x-x_0|^{3k}+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\vartheta_{3k+1}|x-x_0|^{3k+1}+\sum_{k=1}^{\infty}\vartheta_{3k+2}|x-x_0|^{3k+2}. \qquad (12)$$

С учетом оценок (7), (8), (9) и

$$\Delta\tilde{C}_0=\Delta\tilde{y}_0, \quad \Delta\tilde{C}_1=\Delta\tilde{y}_1, \quad \Delta\tilde{C}_2=\Delta\tilde{y}_2,$$

$$\Delta\tilde{M}=\max\{\Delta\tilde{y}_0,\Delta\tilde{y}_1,\Delta\tilde{y}_2\},$$

из (12) получаем

$$\Delta_0\leqslant\Delta M(1+|x-x_0|+|x-x_0|^2)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Delta M(M+\Delta M+1)^{2k+1}|x-x_0|^{3k+1}}{(3k)(3k+1)(3k-1)}+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Delta M(M+\Delta M+1)^{2k+1}|x-x_0|^{3k+2}}{(3k+2)(3k+1)(3k)}+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Delta M(M+\Delta M+1)^{2k+1}|x-x_0|^{3k+3}}{(3k+3)(3k+2)(3k+1)}\leqslant$$

$$\leqslant\Delta M(1+|x-x_0|+|x-x_0|^2)+\frac{\Delta M(M+\Delta M+1)^3|x-x_0|^3}{1-(M+\Delta M+1)^2\cdot|x-x_0|^3}\times$$

$$\times\left(\frac{1}{120}+\frac{|x-x_0|}{24}+\frac{|x-x_0|^2}{60}\right).$$

Таким образом завершаем докозательство оценки для $\Delta\tilde{y}_n(x)$ в области

$$|x-x_0|<\rho_2,$$

где

$$\rho_2=\min\left\{\rho_1,\sqrt[3]{\frac{1}{(M+1)^2}},\sqrt[3]{\frac{1}{(M+\Delta M+1)^2}}\right\}.$$

Численный эксперимент.

Для задачи Коши (1)-(2), работе [31], $r(x)=0$,

$$C_3=\frac{1}{6}({C_0}^3+A_0); \quad C_4=\frac{1}{24}(3{C_0}^2\cdot C_1+A_1),$$

$$C_5=\frac{1}{60}(3C_0\cdot {C_1}^2+3{C_0}^2\cdot C_2+A_2),$$

$$C_6=\frac{1}{120}(3{C_0}^2\cdot C_3+6C_0\cdot C_1\cdot C_2+{C_1}^3+A_2),$$

$$C_7=\frac{1}{7\cdot6\cdot5}({C_4}^{**}+A_4)=\frac{1}{120}(C_0\cdot(2C_0\cdot C_4+2C_1\cdot C_3+{C_2}^2)+C_1\cdot(2C_0\cdot C_3+$$

$$+2C_1 \cdot C_2) + C_2 \cdot (2C_0 \cdot C_2 + {C_1}^2) + C_3(2C_0 \cdot C_1) + C_4 \cdot {C_0}^2 + A_4).$$

$$y(1) = \sqrt{2}; \quad y^{'}(1) = 0,05; \quad y^{''}(1) = 0,1.$$

Вычислим значение в точке $x_1 = 1,1$. Значение x_1 - попадает в область $|x - x_0| < \rho_2$. В соответстивии с результатом работы [31],

$$\rho_2 = \frac{1}{\sqrt[3]{(M+1)^2}} = 0,555567.$$

№	x_i	y_6	Δy_6	Δ_2
1	1,1	1,4206855093	0,0000000545	0,0000000002

Таблица 1. Харектиристика численного расчета первого этапа.

Обозначения:

y_6 - приближенное аналитическое решение (3);

Δy_6 - априорная оценка приближенного решения (3);

Δ_2 - апостериорная оценка для приближенного решения (3).

Для апостериорной погрешности оценки Δ_2 в структуре аналитического приближенного решения (3) требуется $N = 9$. Слогаемые с 6 по 9 в общей сумме не превышают требуемую точность. Следовательно аналитическое приближенное решение $\tilde{y_6}(1,1)$ имеет точность $\Delta_6 = 0,0000000002$.

На втором этапе существляем аналитическое продолжение.

Задача Коши (1)-(2): $r(x) = 0$,

$$\tilde{y}(1,1) = \tilde{y_0} = 1,4206855093; \Delta\tilde{y_0} = 0,0000000002;$$

$$\tilde{y^{'}}(1,1) = \tilde{y_1} = 0,0841653262; \Delta\tilde{y_1} = 0,0000000037;$$

$$\tilde{y^{''}}(1,1) = \tilde{y_2} = 0,4836180225; \Delta\tilde{y_2} = 0,0000002212;$$

$$x_2 = 1,2.$$

В соответствии с результатом настоящей работы

$$\rho_2 = \frac{1}{\sqrt[3]{(M+\Delta M+1)^2}} = 0,554678.$$

Точка $x_2 = 1,2$ удовлетворяет условию результата данной работы. Результаты расчетов представлены в таблице 2.

Обозначения:

$\tilde{y_6}(x)$ - приближенное аналитическое решение (6);

$\Delta\tilde{y_6}$ - априорная оценка приближенного решения (6);

№	x	$\tilde{y_6}(x)$	$\Delta\tilde{y_6}$	Δ_3
1	1,2	1,4344187718	0,0000002994	0,00000025

Таблица 2. Харектиристика численного расчета второго этапа.

Δ_3 - апостериорная оценка для приближенного решения (6).

Для заданного Δ_3 в структуре аналитического приближенного решения (6) требуется $N = 9$. Слогаемые с 7 по 9 в общей сумме не превышают требуемой точности Δ_3. Следовательно приближенное решение $\tilde{y_6}$ в точке $(1,2)$ имеет точность Δ_3.

Выводы

В работе установлена зависимость аналитического приближенного решения задачи Коши (1)-(2) от возмущенных начальных данных. Эта зависимость возникает при осуществлении аналитического продолжения решения задачи Коши (1)-(2) в области аналитичности. Теоретические результаты сопровождены численным экспериментом. Априорная оценка погрешности решения (6) зависит от двух составляющих. Первая Δ_0 зависит от погрешности начальных данных (5), вторая Δ_1 от структуры решения (6). Вторая составляющая Δ_1, эффективна при условии $\Delta_1 > \Delta_0$. В противном случае требуется уменьшить величину Δ_0.

ДОПОЛНИТЕЛЬНО

Вклад авторов. В. Н. Орлов написание текста рукописи, согласование финальной версии рукописи, А. Я. Корнилов проведение экспериментов, набор и редактирование текста рукописи, А. В. Воробьева обзор литературы по теме статьи, согласование финальной версии рукописи.

Конфликт интересов. Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

Источник финансирования. Авторы заявляют об отсутствии внешнего финансирования при проведении исследования.

ADDITIONAL INFORMATION

Authors' contribution. V. N. Orlov writing the text of the manuscript, approving the final version of the manuscript, A. Ya. Kornilov conducting experiments, typing and editing the text of the manuscript, A. V. Vorobyeva literature review on the topic of the article, approving the final version of the manuscript.

Competing interests. The authors declare that they have no competing interests.

Funding. This study was not supported by any external sources of funding.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Feng Yuqiang. Existence and uniqueness results for a third-order implicit differential equation // Computers and Mathematics with Applications. 2008. Vol. 56. P. 2507–2514.

[2] Чугайнова А. П. Нестационарные решения обобщенного уравнения Кортевега–де Фриза–Бюргерса // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. 2013. Т. 281. С. 204–212. DOI: https://doi.org/10.1134/S0371968513020179.

[3] Orlov V. N., Kovalchuk O. A. An analytical solution with a given accuracy for a nonlinear mathematical model of a console-type construction (Scopus) // 18 Modelling and Methods of Structural Analysis, IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series. Vol. 1425. IOP Publishing, 2020. P. 012127.

[4] Orlov V. N., Kovalchuk O. A. Mathematical modeling of complex structures and nonlinear differential equations with movable points // IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering. Vol. 456. IOP Publishing, 2018. P. 012122.

[5] Kudryashov N. A., Biswas A., Borodina A. G. et al. Painlevé analysis and optical solitons for a concatenated model // Optik. 2023. Vol. 272. P. 170255. DOI: https://doi.org/10.1016/j.ijleo.2022.170255.

[6] Kudryashov N. A. Optical solitons of the Schrödinger–Hirota equation of the fourth order // Optik. 2023. Vol. 274. P. 170587. DOI: https://doi.org/10.1016/j.ijleo.2023.170587.

[7] Kudryashov N. A. Dispersive optical solitons of the generalized Schrödinger–Hirota model // Optik. 2023. Vol. 272. P. 170365. DOI: https://doi.org/10.1016/j.ijleo.2022.170365.

[8] Chichurin A., Filipuk G. The properties of certain linear and nonlinear differential equations of the fourth order arising in beam models // IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series. Vol. 1425. IOP Publishing, 2020. P. 012107. DOI: 10.1088/1742-6596/1425/1/012107.

[9] Вересович П. П., Яблонский А. И. О подвижных особых точках систем дифференциальных уравнений третьего порядка // Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13, № 11. С. 1932–1939.

[10] Писаренок В. П., Яблонский А. И. Дифференциальное уравнение, имеющее решения с алгебраическими подвижными особыми точками // Дифференц. уравнения. 1976. Vol. 12, no. 5. P. 928–930.

[11] Соболевский С. Л. Подвижные особые точки полиномиальных обыкновенных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 2004. Т. 40, № 6. С. 756–762. DOI: https://doi.org/10.1023/B:DIEQ.0000046859.46244.5e.

[12] Соболевский С. Л. Подвижные особые точки алгебраических обыкновенных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 2005. Т. 41, № 8. С. 1092–1099. DOI: https://doi.org/10.1007/s10625-005-0260-9.

[13] Filipuk G., Kecker T. On Singularities of Certain Non-linear Second-Order Ordinary Differential Equations // Results Math. 2022. Vol. 77. P. 41. DOI: https://doi.org/10.1007/s00025-021-01577-1.

[14] Filipuk G., Halburd R. G. Movable algebraic singularities of second-order ordinary differential equations // J. Math. Phys. 2009. Vol. 50. P. 023509. DOI: https://doi.org/10.1063/1.3068414.

[15] Яблонский А. И., Корзюк А. Ф. Метод построения систем нелинейных дифференциальных уравнений произвольного порядка с подвижными полярными особыми точками // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23, № 12. С. 2074–2079.

[16] Яблонский А. И., Корзюк А. Ф. Классы систем третьего порядка с квадратичными правыми частями без подвижных критических точек // Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25, № 4. С. 635–640.

[17] Яблонский А. И., Корзюк А. Ф., Мызгаева С. А. О подвижных существенно особых точках решений системы Эйлера // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27, № 5. С. 906–909.

[18] Мартынов И. П., Берёзкина Н. С., Пронько В. А. Аналитическая теория нелинейных уравнений и систем. Гродно: ГрГУ, 2009. P. 395.
[19] Martynov I. P, Chichurin A. V. On the solution of the Chazy system of equations // Nonlinear Oscillations. 2009. Vol. 12. P. 94–100.
[20] Мартынов И. П., Мождже Г. Т. О первых интегралах одного уравнения четвертого порядка // Дифференц. уравнения. 2004. Т. 40, № 12. С. 1701–1704.
[21] Березкина Н. С., Мартынов И. П., Пронько В. А. Об одной системе третьего порядка с кубической нелинейностью // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33, № 3. С. 416–417.
[22] Мартынов И. П. Об одном уравнении третьего порядка типа Пенлеве // Дифференц. уравнения. 1988. Т. 24, № 9. С. 1640–1641.
[23] Sasagawa T. On the finite escape phenomena for matrix Riccati equations // IEEE Trans. Autom. Control. 1982. Vol. 27, no. 4. P. 977–979.
[24] Jackson K. R., Kvaerno A., Nersett S. P. The use of Butcher series in the analysis of Newton-like iterations in Runge-Kutta formulas // Appl. Numer. Math. 1994. Vol. 15, no. 3. P. 341–356.
[25] Данилова Е. И. Исследование характера подвижных особых точек нелинейных дифференциальных систем двух уравнений : Автореф. дисс. на соиск. уч. степ. канд. физ.-мат. наук / Е. И. Данилова. Минск, 1974. С. 12.
[26] Dukhnovsky S. A. New exact solutions for the time fractional Broadwell system // Adv. Stud. Euro-Tbil. Math. J. 2022. Vol. 15. P. 53–66.
[27] Орлов В. Н. Метод приближенного решения первого, второго дифференциальных уравнений Пенлеве и Абеля. МПГУ, 2013. С. 174.
[28] Orlov V. Moving Singular Points and the Van der Pol Equation, as Well as the Uniqueness of Its Solution // Mathematics. 2023. Vol. 11, no. 4.
[29] Orlov V., Chichurin A. About Analytical Approximate Solutions of the Van der Pol Equation in the Complex Domain // Fractal Fract. 2023. Vol. 7, no. 3.
[30] Orlov V., Chichurin A. The Influence of the Perturbation of the Initial Data on the Analytic Approximate Solution of the Van der Pol Equation in the Complex Domain // Symmetry. 2023. Vol. 15, no. 6.
[31] Орлов В. Н., Кудряшова Н. В. Теорема существования решения одного нелинейного дифференциального уравнения. МПГУ, 2013.

REFERENCES

[1] Feng Yuqiang. Existence and uniqueness results for a third-order implicit differential equation // Computers and Mathematics with Applications. 2008. Vol. 56. P. 2507–2514.
[2] Chugainova A.P. Nonstationary solutions of the generalized Korteweg–de Vries–Burgers equation // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. 2013. Vol. 281. P. 204–212. DOI: https://doi.org/10.1134/S0371968513020179. (in Russian).
[3] Orlov V.N., Kovalchuk O.A. An analytical solution with a given accuracy for a nonlinear mathematical model of a console-type construction // Modelling and Methods of Structural Analysis IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series. Vol. 1425. IOP Publishing, 2020. P. 012127.
[4] Orlov V.N., Kovalchuk O.A. Mathematical modeling of complex structures and nonlinear differential equations with movable points // IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering. Vol. 456. IOP Publishing, 2018. P. 012122.
[5] Kudryashov Nikolay A., Biswas Anjan, Borodina Agniya G. et al. Painlevé analysis and optical solitons for a concatenated model // Optik. 2023. Vol. 272. P. 170255. DOI: https://doi.org/10.1016/j.ijleo.2022.170255.
[6] Kudryashov Nikolay A. Optical solitons of the Schrödinger–Hirota equation of the fourth order // Optik. 2023. Vol. 274. P. 170587. DOI: https://doi.org/10.1016/j.ijleo.2023.170587.

[7] Kudryashov Nikolay A. Dispersive optical solitons of the generalized Schrödinger–Hirota model // Optik. 2023. Vol. 272. P. 170365. DOI: https://doi.org/10.1016/j.ijleo.2022.170365.
[8] Chichurin A., Filipuk G. The properties of certain linear and nonlinear differential equations of the fourth order arising in beam models // IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series. Vol. 1425. 2020. P. 012107. DOI: 10.1088/1742-6596/1425/1/012107.
[9] Veresovich P.P., Yablonsky A.I. On moving singular points of systems of differential equations of the third order // Differential Equations. 1977. Vol. 13, no. 11. P. 1932–1939. (in Russian).
[10] Pisarenok V.P., Yablonsky A.I. A differential equation having solutions with algebraic movable singular points // Differential Equations. 1976. Vol. 12, no. 5. P. 928–930. (in Russian).
[11] Sobolevsky S.L. Movable singular points of polynomial ordinary differential equations // Differents. equations. 2004. Vol. 40, no. 6. P. 756–762. DOI: https://doi.org/10.1023/B:DIEQ.0000046859.46244.5e. (in Russian).
[12] Sobolevsky S.L. Movable singular points of algebraic ordinary differential equations // Differents. equations. 2005. Vol. 41, no. 8. P. 1092–1099. DOI: https://doi.org/10.1007/s10625-005-0260-9. (in Russian).
[13] Filipuk G., Kecker T. On Singularities of Certain Non-linear Second-Order Ordinary Differential Equations // Results Math. 2022. Vol. 77. P. 41. DOI: https://doi.org/10.1007/s00025-021-01577-1.
[14] Filipuk G., Halburd R.G. Movable algebraic singularities of second-order ordinary differential equations // J. Math. Phys. 2009. Vol. 50. P. 023509. DOI: https://doi.org/10.1063/1.3068414.
[15] Yablonsky A.I., Korzyuk A.F. Method of constructing systems of nonlinear differential equations of arbitrary order with movable polar singular points // Differents. equations. 1987. Vol. 23, no. 12. P. 2074–2079. (in Russian).
[16] Yablonsky A.I., Korzyuk A.F. Classes of third-order systems with quadratic right-hand sides without moving critical points // Differents. equations. 1989. Vol. 25, no. 4. P. 635–640. (in Russian).
[17] Yablonsky A.I., Korzyuk A.F., Myzgaeva S.A. On movable essentially singular points of solutions of the Euler system // Differents. equations. 1991. Vol. 27, no. 5. P. 906–909. (in Russian).
[18] Martynov I.P., Berezkina N.S., Pronko V.A. Analytical theory of nonlinear equations and systems. Grodno: GrGU, 2009. P. 395. (in Russian).
[19] Martynov I.P., Chichurin A.V. On the solution of the Chazy system of equations // Nonlinear Oscillations. 2009. Vol. 12. P. 94–100.
[20] Martynov I.P., Mozhger G.T. On the first integrals of one fourth-order equation // Differents. equations. 2004. Vol. 40, no. 11. P. 1559–1564. (in Russian).
[21] Tsyganov S.K. Exact solutions of the two-dimensional Riccati equation // Doklady Mathematics. 2000. Vol. 61. P. 295–299.
[22] Dubrovsky V.G., Krivonosov S.K. Symmetry analysis and exact solutions of third-order evolution equations // Mathematics. 2023. Vol. 11. P. 632. DOI: https://doi.org/10.3390/math11030632.
[23] Sasagawa T. On the finite escape phenomena for matrix Riccati equations // IEEE Trans. Autom. Control. 1982. Vol. 27, no. 4. P. 977–979.
[24] Jackson K.R., Kvaerno A., Nersett S.P. The use of Butcher series in the analysis of Newton-like iterations in Runge-Kutta formulas // Appl. Numer. Math. 1994. Vol. 15, no. 3. P. 341–356.
[25] Danilova E.I. Investigation of the nature of mobile singular points of nonlinear differential systems of two equations. 1974. P. 12. Abstract of the dissertation for the degree of Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Minsk.
[26] Dukhnovsky S.A. New exact solutions for the time fractional Broadwell system // Adv. Stud. Euro-Tbil. Math. J. 2022. Vol. 15. P. 53–66.

[27] Orlov V.N. The method of approximate solution of the first and second differential equations of Painlevet and Abel. Moscow: MPGU, 2013. P. 174. (in Russian).
[28] Orlov V. Moving Singular Points and the Van der Pol Equation, as Well as the Uniqueness of Its Solution // Mathematics. 2023. Vol. 11, no. 4.
[29] Orlov V., Chichurin A. About Analytical Approximate Solutions of the Van der Pol Equation in the Complex Domain // Fractal Fract. 2023. Vol. 7, no. 3.
[30] Orlov V., Chichurin A. The Influence of the Perturbation of the Initial Data on the Analytic Approximate Solution of the Van der Pol Equation in the Complex Domain // Symmetry. 2023. Vol. 15, no. 6.
[31] Orlov V.N., Kudryashova N.V. The theorem of the existence of a solution to a third-order nonlinear differential equation with a polynomial right-hand side of the third degree in the field of analyticity // Bulletin of the I. Ya. Yakovlev ChSPU Series: Mechanics of the limit state. 2016. Vol. 27, no. 1. P. 141–149. (in Russian).