

Д. А. Чернышов¹, А. С. Бондарев¹, А. В. Ковалев¹

О СХОДИМОСТИ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ РЯДОВ, ПРИМЕНЯЕМЫХ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ТЕРМОДЕФОРМИРОВАНИЯ

¹Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия

Аннотация. В работе доказана равномерная сходимость функциональных рядов, использованных в более ранних работах при определении напряженно-деформированного состояния сплошного шара, выполненного из упрочняющегося упруговязкопластического материала и подвергнутого равномерному тепловому воздействию, вместе с их частными производными. Кроме того, выполнена оценка остатков указанных рядов, что позволяет определить конечное количество их членов, достаточное для проведения численного анализа результатов.

Ключевые слова: температурные напряжения, упругость, пластичность, вязкость, функциональный ряд, равномерная сходимость.

Чернышов Данил Алексеевич, преподаватель кафедры механики и компьютерного моделирования; e-mail: chernyshov.danil@gmail.com;

<https://orcid.org/0000-0003-4460-6656>; AuthorID: 1149996

Бондарев Андрей Сергеевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры функционального анализа и операторных уравнений; e-mail: bondarev@math.vsu.ru;

AuthorID: 900361

Ковалев Алексей Викторович, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой механики и компьютерного моделирования; e-mail: kav-mail@mail.com;

<https://orcid.org/0000-0002-3730-9621>; AuthorID: 11051

для цитирования: Чернышов Д. А., Бондарев А. С., Ковалев А. В. О сходимости функциональных рядов, применяемых при решении задач термодиформирования // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2024. № 2(60). С. 51–59. DOI: 10.37972/chgpu.2024.60.2.004 EDN: AFGMNA

Статья опубликована на условиях лицензии *Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)*.

D. A. Chernyshov¹, A. S. Bondarev¹, A. V. Kovalev¹

ON THE CONVERGENCE OF FUNCTIONAL SERIES USED IN SOLVING THERMAL DEFORMATION PROBLEMS

¹ Voronezh State University, Voronezh, Russia

Abstract. In this paper, the uniform convergence of functional series with their partial derivatives is approved. These series are used in previous researches to determine of the stress-strain state of a solid sphere which is made of the elastoviscoplastic material with hardening and subjected to uniform heat exposure. The remainder term of the series is also estimated. This fact makes it possible to to determine the enough finitesimal number of terms to carry out a numerical analysis of the results.

Keywords: thermal stress, elasticity, plasticity, viscosity, functional series, uniform convergence

Danil A. Chernyshov, Academic of the Department of Mechanics and Computer Modeling; e-mail: chernyshov.danil@gmail.com;

<https://orcid.org/0000-0003-4460-6656>; AuthorID: 1149996

Andrei S. Bondarev, PhD. Sci. Phys. & Math., Associate Professor of the Department of Functional Analysis and Operation Equations; e-mail: bondarev@math.vsu.ru;

AuthorID: 900361

Alexey V. Kovalev, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Head of the Department of Mechanics and Computer Modeling; e-mail: kav-mail@mail.com;

<https://orcid.org/0000-0002-3730-9621>; AuthorID: 11051

to cite this article: Chernyshov D. A., Bondarev A. S., Kovalev A. V. On the Convergence of Functional Series Used in Solving Thermal Deformation Problems // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2024. No 2(60). p. 51–59. DOI: 10.37972/chgpu.2024.60.2.004 EDN: AFGMNA

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение. В работе [1] были получены аналитические решения начально-краевой задачи о деформировании сплошного шара, подверженного воздействию нестационарного температурного поля и проявляющего упругие, пластические, упрочняющиеся и вязкие свойства. Позже данные результаты были подтверждены в [2] посредством проведения численного моделирования методом конечных элементов.

Однако решения в указанных выше работах были получены в предположении, что выполняются условия применимости формулы Грина [3, с. 123, замечание 2]. В свою очередь, это связано с непрерывностью решения со своими частными производными первого порядка по пространственной координате в замкнутой области $r \in [0, R], t \geq 0$ и непрерывностью частных производных второго порядка в интервале $r \in (0, R)$. Здесь r — радиальная координата, $R > 0$ — радиус шара, t — время.

Таким образом, необходимо проведение дополнительного исследования сходимости полученных функциональных рядов с целью подтверждения их соответствия начально-краевой задаче.

Доказательство. Уравнение теплопроводности вместе с краевыми условиями для рассматриваемой задачи в случае сферической симметрии имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial T(r, t)}{\partial t} &= \vartheta \left(\frac{2}{r} \frac{\partial T(r, t)}{\partial r} + \frac{\partial^2 T(r, t)}{\partial r^2} \right), \\ T(r, 0) &= T_0, \\ \frac{T(R, t) - T_0}{T_m - T_0} &= 1 - e^{-xt}, \\ T(0, t) &\neq \infty. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь $T(r, t)$ — распределение температуры шара по радиусу; T_0 — начальная температура тела; T_m — температура окружающей среды; $\vartheta > 0$ — коэффициент теплопроводности; $x > 0$ — скорость нагрева поверхности.

Согласно [1], решение начально-краевой задачи (1) в безразмерных переменных имеет вид

$$\begin{aligned} \Theta(\xi, t) &= \frac{T(\xi, t) - T_0}{T_m - T_0} = \\ &= 1 - e^{-xt} + \sum_{n=1}^{\infty} 2(-1)^n \frac{\sin(\pi n \xi)}{\pi n \xi} \frac{x}{x - \vartheta \frac{\pi^2 n^2}{R^2}} \left[e^{-\frac{\pi^2 n^2}{R^2} \vartheta t} - e^{-xt} \right], \end{aligned} \tag{2}$$

где $\xi = r/R$ — безразмерный радиус.

Докажем равномерную сходимость функционального ряда (2), воспользовавшись мажорантным признаком Вейерштрасса [4, с. 86, теорема 4]. Для этого проведем оценку сверху его членов $u_n(\xi, t)$ ($n \geq 1$) по абсолютной величине

$$\begin{aligned}
|u_n(\xi, t)| &= \left| 2(-1)^n \cdot \frac{\sin(\pi n \xi)}{\pi n \xi} \cdot \frac{x \cdot \left[e^{-\vartheta \frac{\pi^2 n^2}{R^2} t} - e^{-xt} \right]}{x - \vartheta \frac{\pi^2 n^2}{R^2}} \right| = \\
&= 2x e^{-xt} \cdot \left| \frac{\sin(\pi n \xi)}{\pi n \xi} \right| \cdot \frac{\left| e^{-\left(\vartheta \frac{\pi^2 n^2}{R^2} - x\right)t} - 1 \right|}{\left| \vartheta \frac{\pi^2 n^2}{R^2} - x \right|}.
\end{aligned} \tag{3}$$

Можно показать, что

$$\begin{aligned}
e^{-xt} &\leq 1, \\
\left| \frac{\sin(\pi n \xi)}{\pi n \xi} \right| &\leq 1.
\end{aligned} \tag{4}$$

Тогда из (3) с учетом (4) следует, что

$$2x e^{-xt} \cdot \left| \frac{\sin(\pi n \xi)}{\pi n \xi} \right| \cdot \frac{\left| e^{-\left(\vartheta \frac{\pi^2 n^2}{R^2} - x\right)t} - 1 \right|}{\left| \vartheta \frac{\pi^2 n^2}{R^2} - x \right|} \leq 2x \cdot \frac{\left| e^{-\left(\vartheta \frac{\pi^2 n^2}{R^2} - x\right)t} - 1 \right|}{\left| \vartheta \frac{\pi^2 n^2}{R^2} - x \right|}. \tag{5}$$

Рассмотрим последний множитель в правой части (5). Введем замену $\rho = t \cdot \left(\vartheta \frac{\pi^2 n^2}{R^2} - x \right)$ и проверим, является ли точка $\rho = 0$ точкой разрыва.

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{|e^{-\rho} - 1|}{|\rho|} \cdot t = t. \tag{6}$$

Поскольку предел в (6) существует и конечен, то точка $\rho = 0$ является точкой устранимого разрыва.

Далее определим поведение рассматриваемой функции на луче $\rho > -x \cdot t$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\rho} \left(\frac{|e^{-\rho} - 1|}{|\rho|} \cdot t \right) &= \frac{\operatorname{sgn}(e^{-\rho} - 1) (-e^{-\rho}) |\rho| - |e^{-\rho} - 1| \operatorname{sgn}(\rho)}{|\rho|^2} \cdot t = \\
&= t \cdot \frac{1 - (\rho + 1)e^{-\rho}}{\rho^2} \cdot \operatorname{sgn}(\rho) \cdot \operatorname{sgn}(e^{-\rho} - 1) = \\
&= \frac{t \cdot e^{-\rho}}{\rho^2} \cdot [e^{\rho} - (\rho + 1)] \cdot \begin{cases} 1 \cdot (-1), & \rho > 0 \\ (-1) \cdot 1, & \rho < 0 \end{cases} = \frac{t \cdot e^{-\rho}}{\rho^2} \cdot [(\rho + 1) - e^{\rho}].
\end{aligned} \tag{7}$$

Очевидно, что первый множитель в правой части (7) неотрицателен. Кроме того, можно показать, что $[(\rho + 1) - e^{\rho}]$ обращается в нуль при $\rho = 0$, возрастает при $\rho < 0$ и убывает при $\rho > 0$, т.е. для любого ρ справедливо неравенство $[(\rho + 1) - e^{\rho}] \leq 0$. Таким образом,

$$\frac{d}{d\rho} \left(\frac{|e^{-\rho} - 1|}{|\rho|} \cdot t \right) \leq 0. \tag{8}$$

Тогда максимум функции $\frac{|e^{-\rho}-1|}{|\rho|} \cdot t$ достигается на левом конце интервала, на котором определено ρ , т.е. при $n = 1$.

Таким образом, из (6)–(8) следует, что все множители в правой части (5) принадлежат множеству $\mathbb{R}^+ \setminus \{+\infty\}$. Далее без ограничения общности будем рассматривать члены ряда, начиная с такого n_0 , что $\vartheta \frac{\pi^2 n^2}{R^2} - x > 0$. При этом сумма первых $n_0 - 1$ членов будет конечным числом. Тогда можно оценить правую часть в (5)

$$2x \cdot \frac{\left| e^{-(\vartheta \frac{\pi^2 n^2}{R^2} - x)t} - 1 \right|}{\left| \vartheta \frac{\pi^2 n^2}{R^2} - x \right|} \leq \frac{2x}{\vartheta \frac{\pi^2 n^2}{R^2} - x} = \frac{2 \cdot \frac{x}{\vartheta} \cdot \frac{R^2}{\pi^2}}{n^2 - \frac{x}{\vartheta} \cdot \frac{R^2}{\pi^2}}. \quad (9)$$

Из выше изложенного следует, что члены исходного функционального ряда, начиная с некоторого n_0 могут быть мажорированы числовым рядом

$$|u_n(\xi, t)| \leq \frac{2 \cdot \frac{x}{\vartheta} \cdot \frac{R^2}{\pi^2}}{n^2 - \frac{x}{\vartheta} \cdot \frac{R^2}{\pi^2}} = a_n. \quad (10)$$

Воспользуемся интегральным признаком Коши-Маклорена [4, с. 26, теорема 10] для доказательства сходимости ряда, составленного из правых частей (10). Введем замену вида $\tau = \frac{R}{\pi} \sqrt{\frac{x}{\vartheta}}$ и вычислим несобственный интеграл

$$I = \int_{n_0}^{+\infty} \frac{2\tau^2}{n^2 - \tau^2} dn = \tau \cdot \ln \left(\frac{n_0 + \tau}{n_0 - \tau} \right). \quad (11)$$

Поскольку n_0 выбирался таким образом, что $n_0 - \tau > 0$, а $\tau \in \mathbb{R}^+ \setminus \{+\infty\}$, то и $I \in \mathbb{R}^+ \setminus \{+\infty\}$, т.е. несобственный интеграл I сходится. Следовательно, мажорантный числовой ряд также сходится согласно интегральному признаку Коши-Маклорена, а исходный функциональный ряд сходится равномерно согласно мажорантному признаку Вейерштрасса. Кроме того, можно утверждать, что данный функциональный ряд достаточное количество раз дифференцируем и интегрируем согласно [4, с. 99, теорема 9] и [4, с. 102, теорема 10] соответственно.

Проведем оценку остаточного члена функционального ряда. Пусть r_n — остаток мажорантного числового ряда, s_n — остаток исходного функционального ряда. Тогда

$$|u_n(\xi, t)| \leq a_n \implies r_n = \sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n \geq \sum_{n=n_0}^{+\infty} |u_n(\xi, t)| \geq \left| \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n(\xi, t) \right| = |s_n|. \quad (12)$$

Следствием признака интегральной сходимости Коши-Маклорена [4, с. 26, теорема 10] является оценка остатка ряда

$$r_n \leq I \leq \varepsilon, \quad (13)$$

где $\varepsilon > 0$ — требуемая точность.

Подберем такое n_0 , чтобы выполнялось условие (13):

$$\tau \cdot \ln \left(\frac{n_0 + \tau}{n_0 - \tau} \right) \leq \varepsilon \implies n_0 \geq \left\lceil \frac{R}{\pi} \sqrt{\frac{x}{\vartheta}} \cdot \frac{e^{\frac{\varepsilon}{\pi} \sqrt{\frac{x}{\vartheta}}} + 1}{e^{\frac{\varepsilon}{\pi} \sqrt{\frac{x}{\vartheta}}} - 1} \right\rceil. \quad (14)$$

Нетрудно видеть, что оценка (14) не противоречит исходному предположению касательно выбора порядкового номера члена ряда n_0 .

Таким образом, доказана равномерная сходимость полученного функционального ряда температуры и, как следствие, применимость формулы Грина для задачи теплопроводности.

Следуя [1], можно показать, что выражения для напряжений, перемещений и деформаций в различных областях шара в общем виде являются линейными комбинациями величин

$$\Theta \left(\frac{r}{R}, t \right), \quad \frac{1}{r_2^3} \int_{r_1}^{r_2} r^2 \cdot \Theta \left(\frac{r}{R}, t \right) dr, \quad \int_{r_1}^{r_2} \frac{\Theta \left(\frac{r}{R}, t \right)}{r} dr, \quad (15)$$

где r_1 и r_2 — некоторые координаты на отрезке $r \in [0, R]$.

Оценим функциональные ряды, входящие во второе и третье выражения, последовательно применяя теорему о почленном интегрировании рядов [4, с. 99, теорема 9] и теорему о среднем [5, с. 604, теорема 1].

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{r_2^3} \int_{r_1}^{r_2} r^2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} u_n \left(\frac{r}{R}, t \right) dr \right| = \frac{1}{r_2^3} \left| \sum_{n=1}^{\infty} \int_{r_1}^{r_2} r^2 \cdot u_n \left(\frac{r}{R}, t \right) dr \right| \leq \\ & \leq \frac{1}{r_2^3} \sum_{n=1}^{\infty} \left| \int_{r_1}^{r_2} r^2 \cdot u_n \left(\frac{r}{R}, t \right) dr \right| = \frac{1}{r_2^3} \sum_{n=1}^{\infty} \left| r_c^2 \cdot u_n \left(\frac{r_c}{R}, t \right) \cdot (r_2 - r_1) \right| = \\ & = \frac{r_c^2 \cdot (r_2 - r_1)}{r_2^3} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left| u_n \left(\frac{r_c}{R}, t \right) \right| \leq \frac{r_2^2 \cdot r_2}{r_2^3} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} & \left| \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} u_n \left(\frac{r}{R}, t \right) dr \right| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} \int_{r_1}^{r_2} \frac{u_n \left(\frac{r}{R}, t \right)}{r} dr \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left| \int_{r_1}^{r_2} \frac{u_n \left(\frac{r}{R}, t \right)}{r} dr \right| = \\ & = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{u_n \left(\frac{r_c}{R}, t \right)}{r_c} \cdot (r_2 - r_1) \right| = \frac{r_2 - r_1}{r_c} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left| u_n \left(\frac{r_c}{R}, t \right) \right| \leq \frac{r_2}{r_1} \sum_{n=1}^{\infty} a_n. \end{aligned} \quad (17)$$

Здесь $r_c \in [r_1; r_2]$ — некоторая точка, согласно теореме о среднем.

Таким образом, функциональные ряды, входящие в выражения (15), мажорируются сходящимися числовыми рядами и, как следствие, сходятся, а их остаточные члены не превышают по модулю величин r_n , r_n и $\frac{r_2}{r_1} \cdot r_n$ соответственно.

Как было отмечено ранее, выражения для напряжений, перемещений и деформаций являются линейными комбинациями величин (15). Поэтому их остаточные члены по абсолютной величине будут не превосходить линейной комбинации остаточных членов указанных рядов с коэффициентами, взятыми по модулю. В краткой форме данный факт запишется в виде

$$A \cdot r_n + B \cdot r_n + C \cdot r_n \leq \varepsilon. \quad (18)$$

Здесь A , B , C — неотрицательные числа, являющиеся суммами абсолютных значений коэффициентов линейного разложения относительно величин вида (15) соответственно.

С учетом оценки остаточного члена ряда r_n (13) подберем такое n_0 , чтобы выполнялось условие (18):

$$D \cdot \tau \cdot \ln \left(\frac{n_0 + \tau}{n_0 - \tau} \right) \leq \varepsilon \implies n_0 \geq \left[\frac{R}{\pi} \sqrt{\frac{x}{\vartheta}} \cdot \frac{e^{\frac{\varepsilon}{D \frac{R}{\pi} \sqrt{\frac{x}{\vartheta}}} + 1}}{e^{\frac{\varepsilon}{D \frac{R}{\pi} \sqrt{\frac{x}{\vartheta}}} - 1}} \right], \quad (19)$$

где $D = A + B + C$ — суммарный передаточный коэффициент.

На рис. 1 представлена зависимость оценки вида (19) остатка функциональных рядов, описывающих напряжения, перемещения и деформации в теле, от выбранного количества их членов для различных значений комплекса τ и передаточного коэффициента D в двойных логарифмических координатах. Нетрудно видеть, что при увеличении каждой из этих характеристик, зависящих от физико-механических свойств материала шара, его геометрических размеров и параметров нагрева (охлаждения), для достижения одной и той же точности требуется вычисление большего количества членов.

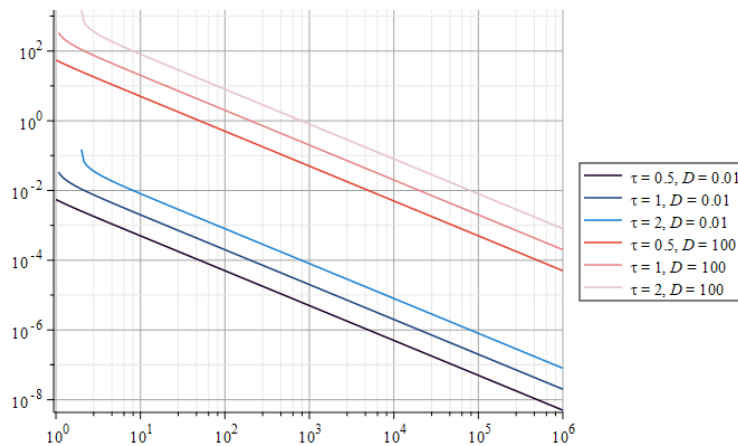


Рис. 1. Зависимость оценки остаточного члена ряда от количества его членов

Следует также заметить, что полученные оценки достаточного количества членов ряда (14) и (19) могут быть уточнены и существенно зависят от текущего момента времени. Например, при малых t функциональные ряды (15) сходятся медленно. В этом случае решение (2) может быть преобразовано с использованием свойств тэта-функции Якоби [6], формулы суммирования Пуассона [7] или операторным методом [3, глава IV]. Однако, начиная с некоторого момента времени t^* , ряды (15) становятся настолько быстросходящимися, что их первый член преобладает над суммой всех остальных членов. В таком случае можно утверждать, что $n_0 = 1$.

Заключение. В ходе выполнения исследования была доказана равномерная сходимости функциональных рядов, применяемых при определении напряженно-деформированного в задаче термомодеформирования сплошного шара, выполненного из упрочняющегося упруговязкопластического материала, вместе с их частными производными, что подтверждает выполнения условий применимости формулы Грина и, как следствие, корректность полученного решения. Кроме того, проведена оценка остаточных членов указанных рядов с учетом их зависимости от комплекса $\frac{R}{\pi} \sqrt{\frac{x}{\vartheta}}$ и передаточного коэффициента, возникающего при переходе от ряда, описывающего температуру тела, к рядам для напряжений, перемещений и деформаций, и получено выражение для определения количества членов ряда, достаточного для вычислений с заданной точностью.

ДОПОЛНИТЕЛЬНО

Вклад авторов. Д. А. Чернышов написание текста рукописи, А. С. Бондарев обзор литературы по теме статьи, редактирование текста рукописи, А. В. Ковалев согласование финальной версии рукописи

Конфликт интересов. Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

Источник финансирования. Авторы заявляют об отсутствии внешнего финансирования при проведении исследования.

ADDITIONAL INFORMATION

Authors' contribution. D. A. Chernyshov writing the text of the manuscript, A. S. Bondarev reviewing the literature on the topic of the article, editing the text of the manuscript, A. V. Kovalev agreeing on the final version of the manuscript

Competing interests. The authors declare that they have no competing interests.

Funding. This study was not supported by any external sources of funding.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Чернышов Д. А., Ковалев А. В. Термомодеформирование тела со сложной реологией в условиях сферической симметрии // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2022. № 4. С. 70–84. EDN: IGJKZT. DOI: 10.31857/S0572329922030059.
- [2] Чернышов Д. А., Малыгина Ю. В., Ковалев А. В. К моделированию поведения упрочняющегося упруговязкопластического шара под воздействием температурного поля // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики. 2024. Р. 1213–1220.

- [3] Карташов Э. М. Аналитические методы в теории теплопроводности твёрдых тел. Москва: Высшая школа, 1979. P. 415.
- [4] Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа. 2-е издание. Том 2. Москва: Высшая школа, 1988. P. 588. ISBN: 5-06-001452-5.
- [5] Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа. 2-е издание. Том 1. Москва: Высшая школа, 1988. P. 712. ISBN: 5-06-001290-5.
- [6] Градштейн И. М., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Москва: Физматгиз, 1963. P. 1100.
- [7] Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. Москва: Наука, 1964. P. 488.

REFERENCES

- [1] Chernyshov D. A., Kovalev A. V. Thermal Deformation Of a Body With Complex Rheology Under Conditions Of Spherical Symmetry // Mechanics of Solids. 2022. no. 4. P. 740–753. EDN: PEJUSP. DOI: 10.3103/s0025654422040045.
- [2] Chernyshov D. A., Malygina Y. V., Kovalev A. V. Modeling Of Behavior Of the Elastoviscoplastic Sphere With Hardening Under the Influence Of Temperature Field // Applied Mathematics, Computational Science and Mechanics: Current Problems. 2024. P. 1213–1220. in russian.
- [3] Kartashov E. M. Analytical Methods for Thermal Conductivity Theory Of Solid Bodies. Moscow: High School, 1979. P. 415. in russian.
- [4] Kudryavcev L .D. The Course Of Mathematical Analysis. 2nd edition. Vol. 2. Moscow: High School, 1988. P. 588. ISBN: 5-06-001452-5. in russian.
- [5] Kudryavcev L .D. The Course Of Mathematical Analysis. 2nd edition. Vol. 1. Moscow: High School, 1988. P. 712. ISBN: 5-06-001290-5. in russian.
- [6] Gradshteyn I. S., Ryzhik I. M. Table of Integrals, Series, and Products. Moscow: Fizmatgiz, 1963. P. 1100. in russian.
- [7] Carslaw H. S., Jaeger J. C. Conduction Of Heat In Solids. Moscow: Nauka, 1964. P. 488. in russian.