*Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния.*

*DOI:* `10.37972/chgpu.2024.60.2.007` *EDN: ETVJRV*

*Научная статья* *УДК: 539.374*

*Е. В. Мурашкин*[1], *Н. Э. Стадник*[1]

# МУЛЬТИВЕСОВАЯ ТЕОРИЯ СЛАБЫХ РАЗРЫВОВ, РАСПРОСТРАНЯЮЩИХСЯ В ПОЛУИЗОТРОПНОЙ ТЕРМОУПРУГОЙ МИКРОПОЛЯРНОЙ СРЕДЕ

[1]*Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия*

***Аннотация.*** В настоящей работе рассматривается мультивесовая теория слабых разрывов температурного инкремента, трансляционных и спинорных перемещений в полуизотропной термоупругой микрополярной среде. Предлагаемая к рассмотрению математическая теория существенным образом опирается на достижения современного псевдотензорного исчисления. Приводятся определения мультивесовых псевдотензорных элементов площади и объема. Выводится общая мультивесовая форма псевдотензорного соотношения на волновой поверхности, распространяющейся в полуизотропной термоупругой микрополярной среде. Исследуются слабые разрывы решений связанной системы псевдовекторных дифференциальных уравнений в частных производных полуизотропной микрополярной термоупругости. С этой целью геометрические и кинематические условия Адамара–Томаса обобщены на псевдотензорный случай с учетом псевдотензорной геометрии распространяющейся поверхности слабых разрывов. Найдены скорости распространения волновых поверхностей трансляционных и спинорных перемещений. Проведена классификация слабых разрывов температуры, трансляционных и спинорных перемещений и исследованы их пространственные поляризации. Установлены условия атермичности, распространяющихся волновых поверхностей слабых разрывов.

***Ключевые слова***: наномасштаб, микромасштаб, микрополярность, термодинамическая температура, спин-вектор, трансляция, слабый разрыв, поверхность распространения, волна.

**Мурашкин Евгений Валерьевич**, канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник лаб. моделирования в механике деформируемого твердого тела; `e-mail:` murashkin@ipmnet.ru; https://orcid.org/0000-0002-3267-4742; AuthorID: 129570

**Стадник Никита Эдуардович**, младший научный сотрудник лаб. моделирования в механике деформируемого твердого тела; `e-mail:` nik-122@mail.ru; https://orcid.org/0000-0002-0187-8048; AuthorID: 961836

***для цитирования:*** *Мурашкин Е. В., Стадник Н. Э.* Мультивесовая теория слабых разрывов, распространяющихся в полуизотропной термоупругой микрополярной среде // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2024. № 2(60). С. 87–106. DOI: `10.37972/chgpu.2024.60.2.007` EDN: ETVJRV



*Поступила: 03.05.2024; принята в печать: 16.05.2024; опубликована: 18.12.24.*

*Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost.*

*DOI:* 10.37972/chgpu.2024.60.2.007 *EDN:* ETVJRV
*Research Article*

*E. V. Murashkin*[1], *N. E. Stadnik*[1]

# MULTIWEIGHT THEORY OF WEAK DISCONTINUITIES PROPAGATING IN SEMI-ISOTROPIC THERMOELASTIC MICROPOLAR MEDIUM

[1]*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow, Russia*

***Abstract.*** In this paper, we consider a multiweight theory of weak discontinuities of the temperature increment, translational and spinor displacements in a semi-isotropic thermoelastic micropolar medium. The mathematical theory proposed for consideration is substantially based on the achievements of modern pseudotensor calculus. Definitions of multiweight pseudotensor elements of area and volume are revisited. A general multiweight form of a pseudotensor equation on a wave surface propagating in a semi-isotropic thermoelastic micropolar medium is derived. Weak discontinuities of solutions of the coupled system of pseudovector partial differential equations of semi-isotropic micropolar thermoelasticity are studied. For this aim the geometric and kinematic Hadamard–Thomas conditions are generalized to the pseudotensor case taking account of the pseudotensor geometry of the propagating surface of weak discontinuities. The propagation velocities of wave surfaces of translational and spinor displacements are found. A classification of weak discontinuities of temperature, translational and spinor displacements is carried out and their spatial polarizations are studied. The conditions of athermality of propagating wave surfaces of weak discontinuities are established.

***Keywords***: algebraic weight, pseudotensor, nanoscale, microscale, micropolarity, pseudotensor volume element, multiweight formulation, constitutive pseudotensor function, growing surface,rational pseudoinvariant.

**Evgenii V. Murashkin**, Cand. Sci. Phys. & Math., MD, Senior Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences; `e-mail:` evmurashkin@gmail.ru; https://orcid.org/0000-0002-3267-4742; AuthorID: 129570

**Nikita E. Stadnik**, MD, Minor Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences; `e-mail:` nik-122@mail.ru; https://orcid.org/0000-0002-0187-8048; AuthorID: 961836

***to cite this article:*** *Murashkin E. V., Stadnik N. E.* Multiweight theory of weak discontinuities propagating in semi-isotropic thermoelastic micropolar medium // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2024. No 2(60). p. 87–106. DOI: 10.37972/chgpu.2024.60.2.007 EDN: ETVJRV



*Received: 03.05.2024; accepted: 16.05.2024; published: 18.12.24.*

**Введение.** Термодинамика физико-механических процессов зачастую связана с распространением волновых поверхностей в трехмерном пространстве, при прохождении через которые физические поля претерпевают слабые разрывы, т.е. сами поля и их первые производные непрерывны, а их производные, начиная со второй, вообще говоря, разрывны. Изучение указанных процессов, протекающих в современных конструкционных материалах, т.к. они могут обладать микроструктурными особенностями и моделирование их поведения требует привлечения неклассических моделей механики сплошных сред [1–5]. Простейшей из таких моделей является, например, полуизотропная микрополярная термоупругость. Подобные среды характеризуются чувствительностью своих определяющих псевдоскаляров к преобразованиям, меняющим ориентацию трехмерного пространства на противоположную. Практическая значимость указанных исследований связана с моделированием поведения биоматериалов, используемых в медицине, клеточных структур, керамики, гранулированных материалов.

Следует отметить, что математические модели, учитывающие характерные нано/микродлины микрополярных материалов, могут быть сконструированы различными способами [6–15]. Фундаментальные определяющие параметры, связанные с характерным размером нано/микроструктур (гранул, ячеек, сот, пен, жидкокристаллических диполей, полимерных молекул и т. д.), обычно обозначаются как $L$ в работах [9–15] или $l$ в работах Нейбера [6–8]. Как было показано ранее [16, 17] отношение определяющих констант $l$ и $L$ является физически безразмерным постоянным множителем. Было показано, что $L$ может иметь алгебраические веса $-1, 0, +1$. Важно отметить, что характерная длина микрополярной теории $L$ имеет решающее значение, как масштабный фактор в теориях полуизотропных сред, которому естественным образом может быть назначен нечетный алгебраический вес, т.е. его можно рассматривать как определяющий псевдоскаляр, чувствительный к зеркальным отражениям координатного базиса.

Волновые задачи механики микрополярных сред возникают при моделировании процессов медицинской диагностики, таких как: УЗИ, сонография и спектральная допплерография. Теоретической основой для указанных методов могут служить задачи о распространении слабых разрывов в твердом теле [18,19]. Литературный поиск показал актуальность волновых задач термомеханики микрополярных сплошных сред [1, 20–30]. В настоящей работе рассматривается задача распространения слабых разрывов в полуизотропном термоупругом микрополярном континууме.

Изложение настоящей статьи базируется на результатах, терминологии и понятиях предыдущих публикаций [9–15, 24–32].

**1. Псевдотензорные элементы объема и площади в трехмерном пространстве.** Терминология и понятия современной геометрии и тензорного анализа наиболее полно изложены в монографиях [33–35]. В дальнейшем изложении, где это не очевидно, сверху корневого символа псевдотензора в квадратных скобках будем отмечать его вес, а снизу в круглых скобках его ранг. Нулевой вес абсолютных тензоров и веса некоторых фундаментальных псевдотензоров в обозначениях отражаться не будут. Зададим функцию w.g.t равную весу псевдотензора, на который действует эта функция, т.е. для псевдотензора $\overset{[\mathrm{g}]}{\underset{(n)}{T}}{}^{h_1h_2\dots h_s\cdot\dots\cdot}_{\cdot\dots\cdot k_1k_2\dots k_r}$ алгебраического веса g ранга $n = s + r$ имеем

$$\mathrm{w.g.t}\,(\overset{[\mathrm{g}]}{\underset{(n)}{T}}{}^{h_1h_2\dots h_s\cdot\dots\cdot}_{\cdot\dots\cdot k_1k_2\dots k_r}) = \mathrm{g}.$$

Псевдотензор $\overset{[\mathrm{g}]}{\underset{(n)}{T}}{}^{h_1h_2\dots h_s\cdot\dots\cdot}_{\cdot\dots\cdot k_1k_2\dots k_r}$ алгебраического веса g ранга $n = s + r$ с помощью степеней псевдоскалярной единицы можно преобразовать к абсолютному тензору того же ранга согласно

$$\underset{(n)}{T}{}^{h_1h_2\dots h_s\cdot\dots\cdot}_{\cdot\dots\cdot k_1k_2\dots k_r} = \overset{[-\mathrm{g}]}{1}\,\overset{[\mathrm{g}]}{\underset{(n)}{T}}{}^{h_1h_2\dots h_s\cdot\dots\cdot}_{\cdot\dots\cdot k_1k_2\dots k_r}. \tag{1}$$

В последнем равенстве выполняется правило баланса весов (the weights balance rule) [36–38]. Действительно, имеем

$$\mathrm{w.g.t}\left(\underset{(n)}{T}{}^{h_1h_2\dots h_s\cdot\dots\cdot}_{\cdot\dots\cdot k_1k_2\dots k_r}\right) = \mathrm{w.g.t}\left(\overset{[-\mathrm{g}]}{1}\,\overset{[\mathrm{g}]}{\underset{(n)}{T}}{}^{h_1h_2\dots h_s\cdot\dots\cdot}_{\cdot\dots\cdot k_1k_2\dots k_r}\right) = -\mathrm{g} + \mathrm{g} = 0.$$

Псевдоскалярные единицы и фундаментальный ориентирующий псевдоскаляр определяются согласно следующим соотношениям [39]:

$$e = \underset{1}{\boldsymbol{\imath}} \cdot (\underset{2}{\boldsymbol{\imath}} \times \underset{3}{\boldsymbol{\imath}}), \qquad \overset{[+1]}{1} = e, \qquad \overset{[-1]}{1} = e^{-1}\,, \tag{2}$$

где $\underset{1}{\boldsymbol{\imath}}, \underset{2}{\boldsymbol{\imath}}, \underset{3}{\boldsymbol{\imath}}$ векторы ковариантного ортогонального базиса в трехмерном Евклидовом пространстве.

Целые степени псевдоскалярных единиц обладают свойством ковариантного постоянства, т. е.

$$\nabla_k \overset{[\pm\mathrm{g}]}{1} = \overset{[\pm\mathrm{g}]}{0}\,, \tag{3}$$

где $\nabla_k$ — оператор ковариантного дифференцирования в метрике $g_{js}$.

Символы перестановок Леви–Чивита являются фундаментальными псевдотензорами, непосредственно связанными с ориентацией трехмерного пространства, позволяющими дискриминировать правые и левые тройки базисных векторов согласно правилу

$$\epsilon_{ijk} = \epsilon^{ijk} = \begin{cases} +1, & \text{для троек } i,j,k = 123, 231, 312; \\ -1, & \text{для троек } i,j,k = 132, 213, 321; \\ \phantom{+}0, & \text{во всех остальных случаях.} \end{cases} \tag{4}$$

Отметим, что символы перестановок обладают аномальными тензорными свойствами, нарушающими общепринятые правила псевдотензорной алгебры. Во-первых они являются одновременно ковариантным псевдотензором третьего ранга нечетного алгебраического веса $-1$ и контравариантным псевдотензором третьего ранга нечетного алгебраического веса $+1$. Последнее, в силу (4), может быть выражено соотношением

$$\overset{[-1]}{\epsilon}_{lsk} = \overset{[+1]}{\epsilon}{}^{lsk}.$$

Во-вторых, для символов перестановок необходимы специальные правила, по которым следует поднимать/опускать индексы:

$$\overset{[-1]}{\epsilon}_{ijk} = \overset{[-2]}{1} g_{il} g_{js} g_{kr} \overset{[+1]}{\epsilon}{}^{lsr}, \qquad \overset{[+1]}{\epsilon}{}^{ijk} = \overset{[+2]}{1} g^{il} g^{js} g^{kr} \overset{[-1]}{\epsilon}_{lsr}. \tag{5}$$

Символы перестановок позволяют ввести тензорные элементы объема наиболее простым и понятным способом, что соответствует подходу, предложенному в классических работах Пуанкаре [40, 41], без привлечения теории внешних дифференциальных форм [42–45]. Заметим, что литературный поиск показывает скудное количество работ, обсуждающих указанное обстоятельство. Тензорный элемент объема в трехмерном пространстве можно принять в форме

$$d\tau^{mns} = \overset{[-1]}{d\tau}{}^{123} \overset{[+1]}{\epsilon}{}^{mns}, \tag{6}$$

где $\overset{[-1]}{d\tau}{}^{123}$ — естественный элемент объема,[1] представляющий собой псевдоскаляр веса $-1$, который определяется следующим образом

$$\overset{[-1]}{d\tau}{}^{123} = dx^1 dx^2 dx^3. \tag{7}$$

Опустив в формуле (6) индексы, т. е. применив правило жонглирования индексами для символов перестановок (5), определим ковариантный тензорный элемент объема в виде

$$d\tau_{mns} = \overset{[+2]}{1} \overset{[-1]}{d\tau}{}^{123} \overset{[-1]}{\epsilon}_{mns} = \overset{[+1]}{d\tau}_{123} \overset{[-1]}{\epsilon}_{mns}, \tag{8}$$

где $\overset{[+1]}{d\tau}_{123}$ — дублетный элемент объема [35], представляющий собой псевдоскаляр веса $+1$.

С помощью псевдоскаляров $\overset{[-1]}{d\tau}{}^{123}$, $\overset{[+1]}{d\tau}_{123}$ и псевдоскалярных единиц $\overset{[\mp 1]}{1}$ можно образовать абсолютный скаляр $d\tau$, являющийся инвариантным элементом объема

$$d\tau = \overset{[+1]}{1} \overset{[-1]}{d\tau}{}^{123} = \overset{[-1]}{1} \overset{[+1]}{d\tau}_{123}.$$

[1] Отметим, что важную роль естественные элементы объема играют при формулировке вариационных функционалов физических теорий поля [46, 47].

В дальнейшем изложении примем упрощенные обозначения для псевдоинвариантных элементов объема

$$\overset{[-1]}{d\tau} = \overset{[-1]}{d\tau}{}^{123}, \qquad \overset{[+1]}{d\tau} = \overset{[+1]}{d\tau}{}_{123}.$$

Аналогичным способом, с тем различием, что рассуждения (6) должны быть проведены для двумерной поверхности, задаются псевдоинвариантные элементы площади

$$\overset{[-1]}{A} = \overset{[-1]}{A}{}^{12}, \qquad \overset{[+1]}{A} = \overset{[+1]}{A}{}_{12}.$$

Введем в рассмотрение мультивесовые характеристики [14, 15, 31], принимающие дискретные значения в зависимости от используемого элемента объема, т.е.:

$$\boxtimes = \begin{cases} +1, & \text{для } \overset{[+1]}{d\tau}; \\ 0, & \text{для } d\tau; \\ -1, & \text{для } \overset{[-1]}{d\tau}; \end{cases} \qquad \boxtimes = \begin{cases} +1, & \text{для } \overset{[+1]}{dA}; \\ 0, & \text{для } dA; \\ -1, & \text{для } \overset{[-1]}{dA}. \end{cases} \tag{9}$$

$$\square = \begin{cases} -1, & \text{для } \overset{[+1]}{d\tau}; \\ 0, & \text{для } d\tau; \\ +1, & \text{для } \overset{[-1]}{d\tau}. \end{cases} \qquad \square = \begin{cases} -1, & \text{для } \overset{[+1]}{dA}; \\ 0, & \text{для } dA; \\ +1, & \text{для } \overset{[-1]}{dA}. \end{cases} \tag{10}$$

$$\boxminus = \begin{cases} -2, & \text{для } \overset{[+1]}{d\tau}; \\ -1, & \text{для } d\tau; \\ 0, & \text{для } \overset{[-1]}{d\tau}, \end{cases} \qquad \boxminus = \begin{cases} -2, & \text{для } \overset{[+1]}{dA}; \\ -1, & \text{для } dA; \\ 0, & \text{для } \overset{[-1]}{dA}. \end{cases} \tag{11}$$

Соотношения (9)–(11) позволяют немедленно заключить

$$\boxtimes = -\square = -\boxminus - 1.$$

**2. Дифференцирование по псевдоскалярному мультивесовому времени и кинематические условия совместности первого порядка.** Рассмотрим поверхность $\Sigma$, распространяющуюся в трехмерном евклидовом пространстве, заданную псевдоскалярной функцией

$$\overset{\boxtimes}{t} = \overset{\boxtimes}{f}(x^i), \tag{12}$$

где $\overset{\boxtimes}{t}$ — мультивесовое псевдоскалярное время, причем

$$\overset{\boxtimes}{t} = \overset{\boxtimes}{1}t. \tag{13}$$

Рассмотрим следующие друг за другом положения поверхности $\overset{\boxtimes}{\Sigma}$: $\overset{\boxtimes}{\Sigma}(\overset{\boxtimes}{t})$ и $\overset{\boxtimes}{\Sigma}(\overset{\boxtimes}{t} + \delta\overset{\boxtimes}{t})$. Построим вектор единичной нормали $n^k$ в некоторой точке $P$ поверхности $\overset{\boxtimes}{\Sigma}$, а через $P'$ обозначим точку, в которой нормаль $n^k$ пересекает поверхность $\overset{\boxtimes}{\Sigma}(\overset{\boxtimes}{t}+\delta\overset{\boxtimes}{t})$. Пусть точка $P$ имеет координаты $x^k$, а $P'$ — координаты $x^k+\delta x^k$.

Вектор единичной нормали $\mathbf{n}$ к поверхности $\Sigma$, направленный в сторону ее распространения, можно определить, с учетом (1), с точностью до множителя согласно формуле

$$Nn_i = \partial_i(\overset{\square}{1}\overset{\boxtimes}{f}). \tag{14}$$

Отметим, что для абсолютного скаляра $a$ справедливо равенство

$$\nabla_i a = \partial_i a. \tag{15}$$

Тогда выражение (14) с учетом (3) и (15) преобразуется к виду

$$Nn_i = \partial_i(\overset{\square}{1}\overset{\boxtimes}{f}) = \nabla_i(\overset{\square}{1}\overset{\boxtimes}{f}) = \overset{\square}{1}\nabla_i\overset{\boxtimes}{f}. \tag{16}$$

Вводя в рассмотрение псевдовектор нормали согласно формуле

$$\overset{\boxtimes}{n}_i = e^W n_i, \tag{17}$$

получим

$$N\overset{\boxtimes}{n}_i = \nabla_i\overset{\boxtimes}{f}. \tag{18}$$

Учитывая соотношение (w.g.t.$(g^{ij}) = 0$)

$$g^{ij}\overset{\boxtimes}{n}_i\overset{\boxtimes}{n}_j = \overset{2\boxtimes}{1} \tag{19}$$

несложно заключить, что

$$N^2\overset{2\boxtimes}{1} = g^{ik}\nabla_i\overset{\boxtimes}{f}\nabla_k\overset{\boxtimes}{f}, \tag{20}$$

откуда для множителя $N$ следует выражение

$$\pm N = \overset{\square}{1}\sqrt{g^{ik}\nabla_i\overset{\boxtimes}{f}\nabla_k\overset{\boxtimes}{f}}, \tag{21}$$

Окончательно, псевдовектор нормали к поверхности уровня $\Sigma$ псевдоскалярного поля $\overset{\boxtimes}{f}$ вычисляется по формуле

$$\overset{\boxtimes}{n}_i = \overset{\boxtimes}{1}\frac{\nabla_i\overset{\boxtimes}{f}}{\sqrt{g^{ik}\nabla_i\overset{\boxtimes}{f}\nabla_k\overset{\boxtimes}{f}}} \tag{22}$$

Линейная скорость поверхности наращивания в направлении псевдовектора нормали $\overset{\boxtimes}{\mathbf{n}}$ вычисляется согласно

$$\overset{\square}{G} = \left(\sqrt{g^{ik}\nabla_i\overset{\boxtimes}{f}\nabla_k\overset{\boxtimes}{f}}\right)^{-1}. \tag{23}$$

Абсолютный вектор нормали к поверхности уровня $\Sigma$ псевдоскалярного поля $\overset{\boxtimes}{f}$ можно вычислить по формуле

$$n_i = \overset{\square}{G}\nabla_i \overset{\boxtimes}{f}. \tag{24}$$

Устремляя к нулю расстояние между поверхностями $\overset{\boxtimes}{\Sigma}(\overset{\boxtimes}{t})$ и $\overset{\boxtimes}{\Sigma}(\overset{\boxtimes}{t} + \delta\overset{\boxtimes}{t})$, т.е. устремляя $\delta\overset{\boxtimes}{t}$ к нулю, можно получить следующие выражения для $\delta$-производных

$$\frac{\delta \overset{[\pm\mathrm{g}]}{\underset{+}{\varphi}}{}_k}{\delta\overset{\boxtimes}{t}} = \overset{\square}{\delta.} \overset{[\pm\mathrm{g}]}{\underset{+}{\varphi}}{}_k, \qquad \frac{\delta \overset{[\pm\mathrm{g}]}{\underset{-}{\varphi}}{}_k}{\delta\overset{\boxtimes}{t}} = \overset{\square}{\delta.} \overset{[\pm\mathrm{g}]}{\underset{-}{\varphi}}{}_k, \qquad \frac{\delta \overset{[\pm\mathrm{g}]}{A}{}^k}{\delta\overset{\boxtimes}{t}} = \overset{\square}{\delta.} \overset{[\pm\mathrm{g}]}{A}{}^k, \tag{25}$$

откуда не сложно получить кинематические условия совместности первого порядка

$$\begin{aligned} &[\overset{\square}{\delta.} \overset{[\pm\mathrm{g}]}{\varphi}{}_k] = \overset{\square}{\delta.} \overset{[\pm\mathrm{g}]}{\underset{+}{\varphi}}{}_k - \overset{\square}{\delta.} \overset{[\pm\mathrm{g}]}{\underset{-}{\varphi}}{}_k = \overset{\square}{\delta.} \overset{[\pm\mathrm{g}]}{A}{}^k, \\ &\overset{\square}{\delta.} x^i = \overset{\square}{1}\overset{\square}{G}\overset{\boxtimes}{n}{}^i, \\ &[\overset{\square}{\partial.} \overset{[\pm\mathrm{g}]}{\varphi}{}_k] = -\overset{\boxtimes}{1} \overset{[\pm\mathrm{g}+\square]}{B}{}_k \overset{\square}{G} + \overset{\square}{\delta.} \overset{[\pm\mathrm{g}]}{A}{}^k, \end{aligned} \tag{26}$$

Используя полученные соотношения первого порядка не сложно получить условия совместности второго и более высоких порядков.

**3. Мультивесовые слабые разрывы трансляционных и спинорных перемещений** Исследуем закономерности распространения слабых разрывы трансляционных $u^k$ и спинорных $\overset{[+1]}{\phi}{}^k$ перемещений в микрополярном теле. Отметим, что система уравнений динамики содержит частные производные не выше второго порядка. Пусть в трехмерном пространстве с нормальной скоростью $\overset{\square}{\mathfrak{G}}$ распространяется фронт (волновая поверхность) $\overset{\boxtimes}{\Sigma}$ слабых разрывов перемещений $u^k$ и микровращений $\overset{[+1]}{\phi}{}^k$. Тогда геометрические и кинематические условия совместности второго порядка Адамара—Томаса (9) будут иметь вид

$$\begin{aligned} &[\boldsymbol{\nabla}\otimes\boldsymbol{\nabla}\otimes\mathbf{u}] = \overset{2\square}{1}\overset{\boxtimes}{\mathbf{n}}\otimes\overset{\boxtimes}{\mathbf{n}}\otimes\mathbf{A}, \quad [\boldsymbol{\nabla}\otimes\boldsymbol{\nabla}\otimes \overset{[+1]}{\boldsymbol{\phi}}] = \overset{2\square}{1}\overset{\boxtimes}{\mathbf{n}}\otimes\overset{\boxtimes}{\mathbf{n}}\otimes \overset{[+1]}{\mathbf{S}}, \\ &[\boldsymbol{\nabla}\otimes\partial.\mathbf{u}] = -\overset{\square}{\mathfrak{G}}\overset{\boxtimes}{\mathbf{n}}\otimes\mathbf{A}, \qquad [\boldsymbol{\nabla}\otimes\partial. \overset{[+1]}{\boldsymbol{\phi}}] = -\overset{\square}{\mathfrak{G}}\overset{\boxtimes}{\mathbf{n}}\otimes \overset{[+1]}{\mathbf{S}}, \\ &[\partial.^2\mathbf{u}] = \overset{2\boxtimes}{1}\overset{\square}{\mathfrak{G}}{}^2\mathbf{A}, \qquad [\partial.^2 \overset{[+1]}{\boldsymbol{\phi}}] = \overset{2\boxtimes}{1}\overset{\square}{\mathfrak{G}}{}^2 \overset{[+1]}{\mathbf{S}}, \\ &[\boldsymbol{\nabla}\otimes\boldsymbol{\nabla}\theta] = \overset{2\square}{1}B\overset{\boxtimes}{\mathbf{n}}\otimes\overset{\boxtimes}{\mathbf{n}}, \end{aligned} \tag{27}$$

где квадратные скобки обозначают скачок, заключенного в них физического поля, при переходе через поверхность слабого разрыва. $B$, $\mathbf{A}$, $\overset{[+1]}{\mathbf{S}}$ — физические поля, определенные на волновой поверхности, причем равенства $B = 0$, $\mathbf{A} = \mathbf{0}$, $\overset{[+1]}{\mathbf{S}} = \overset{[+1]}{\mathbf{0}}$ не могут выполняться одновременно ни в какой точке поверхности, если рассматриваемая поверхность действительно является поверхностью слабого разрыва.

Отметим, что выражение $\overset{2}{1}\overset{\square\boxtimes}{\mathbf{n}} \otimes \overset{\boxtimes}{\mathbf{n}}$ можно преобразовать к виду $\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}$. Последнее позволяет провести дальнейшие рассмотрения в терминах абсолютного вектора нормали к волновой поверхности.

**4. Слабые разрывы температурного инкремента, трансляционных перемещений, спинорных перемещений и температурного инкремента в полуизотропной термоупругой микрополярной среде.** Замкнутая мультивесовая система дифференциальных уравнений для полуизотропного микрополярного термоупругого тела записывается в следующей векторной форме [14, 15]:

$$\begin{cases} (1+c_1)\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\mathbf{u} + (1-c_1+2\nu(1-2\nu)^{-1})\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{u} + 2c_1\boldsymbol{\nabla}\times\overset{[+1]}{\boldsymbol{\phi}} + \\ \qquad + \overset{[-1]}{L}c_4'\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}\cdot\overset{[+1]}{\boldsymbol{\phi}} + \overset{[-1]}{L}c_5'\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\overset{[+1]}{\boldsymbol{\phi}} - 2\underset{*}{\alpha}\dfrac{1+\nu}{1-2\nu}\boldsymbol{\nabla}\theta = \overset{\square}{\rho}\overset{\square}{G}{}^{-1}(\partial.)^2\mathbf{u}, \\ (1+c_2)\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\overset{[+1]}{\boldsymbol{\phi}} + (1-c_2+2c_3)\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}\cdot\overset{[+1]}{\boldsymbol{\phi}} + \overset{[-1]}{L}{}^{-1}c_4'\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{u} + \\ \qquad + \overset{[-1]}{L}{}^{-1}c_5'\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\mathbf{u} + \overset{[-1]}{L}{}^{-1}c_6'\boldsymbol{\nabla}\times\overset{[+1]}{\boldsymbol{\phi}} - 2\overset{[-1]}{L}{}^{-2}c_1(2\overset{[+1]}{\boldsymbol{\phi}} - \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{u}) - \\ \qquad\qquad - 2\underset{*}{\overset{[+1]}{\beta}}\boldsymbol{\nabla}\theta = \overset{\square}{\rho}\overset{[-2]\square}{\Im}\overset{\square}{G}{}^{-1}\overset{[-1]}{L}{}^{-2}(\partial.)^2\overset{[+1]}{\boldsymbol{\phi}}, \\ \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\theta - \overset{\boxtimes}{C}\overset{\square}{\lambda}{}^{-1}\partial.\theta - 2\overset{\square}{G}\overset{\square}{\lambda}{}^{-1}\underset{*}{\alpha}\dfrac{1+\nu}{1-2\nu}\boldsymbol{\nabla}\cdot\partial.\mathbf{u} - 2\overset{\square}{G}\overset{\square}{\lambda}{}^{-1}\overset{[-1]}{L}{}^{2}\underset{*}{\overset{[+1]}{\beta}}\boldsymbol{\nabla}\cdot\partial.\overset{[+1]}{\boldsymbol{\phi}} = 0, \end{cases} \qquad (28)$$

где $\overset{\square}{G}$ — модуль сдвига; $\nu$ — коэффициент Пуассона; $\overset{[-1]}{L}$ — характерная микродлина; $c_1$, $c_2$, $c_3$, $c_4$, $c_5$, $c_6$ — не имеющие физической размерности псевдоскаляры; $\underset{*}{\alpha}$ — коэффициент линейного теплового расширения; $\underset{*}{\overset{[+1]}{\beta}}$ — коэффициент теплового изгиба–кручения; $\overset{\square}{\lambda}$ — коэффициент теплопроводности, $c = \overset{\boxtimes}{C}\overset{\square}{\rho}$ — теплоемкость на единицу массы. В этом случае характерная микродлина $L$ и модуль сдвига $G$ являются псевдоскалярами нечетного алгебраического веса.

Исследуем закономерности распространения слабых разрывы трансляционных $\mathbf{u}$, спинорных $\boldsymbol{\phi}$ перемещений и температурного инкремента $\theta$ в полуизотропной среде. Отметим, что связанная система уравнений динамики и уравнения теплопроводности (1) содержит частные производные не выше второго порядка, что означает возможность применения теории слабых разрывов Адамара—Томаса.

Уравнения (1) вместе с (27) после ряда преобразований дают следующие соотношения, связывающие скачки частных производных второго порядка от трансляционных $\mathbf{u}$, спинорных $\overset{[+1]}{\boldsymbol{\phi}}$ перемещений и температурного инкремента $\theta$ при переходе через волновую поверхность:

$$\begin{cases} [(1+c_1) - \overset{\square}{\rho}\overset{\square}{G}{}^{-1}\mathfrak{G}^2]\mathbf{A} + (1 - c_1 + 2\nu(1-2\nu)^{-1})\mathbf{n}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{A}) + \\ \qquad + \overset{[-1]}{L} c_4' \overset{[+1]}{\mathbf{S}} + \overset{[-1]}{L} c_5' \mathbf{n}(\mathbf{n}\cdot \overset{[+1]}{\mathbf{S}}) = 0, \\ [(1+c_2) - \overset{\square}{\rho}\overset{[-2]}{\mathfrak{I}}\overset{\square}{G}{}^{-1}\overset{[-1]}{L}{}^{-2}\mathfrak{G}^2]\overset{[+1]}{\mathbf{S}} + (1 - c_2 + 2c_3)\mathbf{n}(\mathbf{n}\cdot\overset{[+1]}{\mathbf{S}}) + \\ \qquad + \overset{[-1]}{L}{}^{-1} c_4' \mathbf{n}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{A}) + \overset{[-1]}{L}{}^{-1} c_5' \mathbf{A} = 0, \\ B + \mathfrak{G}2\overset{\square}{G}\overset{\square}{\lambda}{}^{-1}\underset{*}{\alpha}\dfrac{1+\nu}{1-2\nu}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{A}) + \mathfrak{G}2\overset{\square}{G}\overset{\square}{\lambda}{}^{-1}\overset{[-1]}{L}{}^{2}\underset{*}{\overset{[+1]}{\beta}}(\mathbf{n}\cdot\overset{[+1]}{\mathbf{S}}) = 0. \end{cases} \tag{29}$$

Представим векторы поляризации слабых разрывов в виде суммы проекций на вектор $\boldsymbol{\tau}$, лежащий на волновой поверхности $\Sigma$, и нормаль $\mathbf{n}$ к ней:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= A_\perp \boldsymbol{\tau} + A_\parallel \mathbf{n}, & \overset{[+1]}{\mathbf{S}} &= \overset{[+1]}{S}{}_\perp \boldsymbol{\tau} + \overset{[+1]}{S}{}_\parallel \mathbf{n}, \\ A_\perp &= \mathbf{A}\cdot\boldsymbol{\tau}, & A_\parallel &= \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}, \\ \overset{[+1]}{S}{}_\perp &= \overset{[+1]}{\mathbf{S}}\cdot\boldsymbol{\tau}, & \overset{[+1]}{S}{}_\parallel &= \overset{[+1]}{\mathbf{S}}\cdot\mathbf{n}. \end{aligned} \tag{30}$$

Подставим (30) в систему (29) и сгруппируем слагаемые при касательном векторе $\boldsymbol{\tau}$ и векторе нормали $\mathbf{n}$:

$$\begin{cases} ([(1{+}c_1) - \overset{\square}{\rho}\overset{\square}{G}{}^{-1}\mathfrak{G}^2]A_\perp + Lc_4' \overset{[+1]}{S}{}_\perp)\boldsymbol{\tau} + \\ \qquad + [(2 - \overset{\square}{\rho}\overset{\square}{G}{}^{-1}\mathfrak{G}^2 + 2\nu(1-2\nu)^{-1})A_\parallel + L(c_4' + c_5')\overset{[+1]}{S}{}_\parallel]\mathbf{n} = 0, \\ ([(1{+}c_2) - \overset{\square}{\rho}\overset{\square}{G}{}^{-1}\overset{[-2]}{\mathfrak{I}}\overset{[-1]}{L}{}^{-2}\mathfrak{G}^2]\overset{[+1]}{S}{}_\perp + \overset{[-1]}{L}{}^{-1}c_5' A_\perp)\boldsymbol{\tau} + \\ \qquad + ((2 - \overset{\square}{\rho}\overset{\square}{G}{}^{-1}\overset{[-2]}{\mathfrak{I}}\overset{[-1]}{L}{}^{-2}\mathfrak{G}^2 + 2c_3)\overset{[+1]}{S}{}_\parallel + L^{-1}(c_4' + c_5')A_\parallel)\mathbf{n} = 0, \\ B + \mathfrak{G}2\overset{\square}{G}\overset{\square}{\lambda}{}^{-1}\underset{*}{\alpha}\dfrac{1+\nu}{1-2\nu}A_\parallel + \mathfrak{G}2\overset{\square}{G}\overset{\square}{\lambda}{}^{-1}\overset{[-1]}{L}{}^{2}\underset{*}{\beta}\overset{[+1]}{S}{}_\parallel = 0. \end{cases} \tag{31}$$

В силу линейной независимости векторов $\boldsymbol{\tau}$ и $\mathbf{n}$ первые два уравнения системы (31) будут справедливы только в случае равенства нулю, соответствующих коэффициентов при указанных векторах. Последнее обстоятельство позволяет получить условия распространения поверхностей слабых разрывов в полуизотропной микрополряной термоупругой среде:

$$
\begin{aligned}
&[(1+c_1)-\overset{\square}{\rho}\overset{\square}{G}{}^{-1}\mathfrak{G}^2]A_\perp+\overset{[-1]}{L}c'_4\overset{[+1]}{S}{}_\perp=0,\\
&[(1+c_2)-\overset{\square}{\rho}\overset{\square}{G}{}^{-1}\overset{[-2]}{\mathfrak{I}}\overset{[-1]}{L}{}^{-2}\mathfrak{G}^2]\overset{[+1]}{S}{}_\perp+\overset{[-1]}{L}{}^{-1}c'_5A_\perp=0,\\
&\Big(2\frac{1-\nu}{1-2\nu}-\overset{\square}{\rho}\overset{\square}{G}{}^{-1}\mathfrak{G}^2\Big)A_\parallel+\overset{[-1]}{L}(c'_4+c'_5)\overset{[+1]}{S}{}_\parallel=0,\\
&(2-\overset{\square}{\rho}\overset{\square}{G}{}^{-1}\overset{[-2]}{\mathfrak{I}}\overset{[-1]}{L}{}^{-2}\mathfrak{G}^2+2c_3)\overset{[+1]}{S}{}_\parallel+\overset{[-1]}{L}{}^{-1}(c'_4+c'_5)A_\parallel=0,\\
&B+\mathfrak{G}2\overset{\square}{G}\overset{\square}{\lambda}{}^{-1}\underset{*}{\alpha}\frac{1+\nu}{1-2\nu}A_\parallel+\mathfrak{G}2\overset{\square}{G}\overset{\square}{\lambda}{}^{-1}\overset{[-1]}{L}{}^2\underset{*}{\overset{[+1]}{\beta}}\overset{[+1]}{S}{}_\parallel=0.
\end{aligned}
\tag{32}
$$

Систему линейных однородных уравнений (32), в некоторых случаях, удобно представить виде

$$
\begin{aligned}
&\{[(1+c_1)-\overset{\square}{\rho}\overset{\square}{G}{}^{-1}\mathfrak{G}^2][(1+c_2)-\overset{\square}{\rho}\overset{\square}{G}{}^{-1}\overset{[-2]}{\mathfrak{I}}\overset{[-1]}{L}{}^{-2}\mathfrak{G}^2]-c'_4c'_5\}A_\perp=0,\\
&\{[(1+c_1)-\overset{\square}{\rho}\overset{\square}{G}{}^{-1}\mathfrak{G}^2][(1+c_2)-\overset{\square}{\rho}\overset{\square}{G}{}^{-1}\overset{[-2]}{\mathfrak{I}}\overset{[-1]}{L}{}^{-2}\mathfrak{G}^2]-c'_4c'_5\}\overset{[+1]}{S}{}_\perp=0,
\end{aligned}
\tag{33}
$$

$$
\begin{aligned}
&\Big[\Big(2\frac{1-\nu}{1-2\nu}-\overset{\square}{\rho}\overset{\square}{G}{}^{-1}\mathfrak{G}^2\Big)[2(1+c_3)-\overset{\square}{\rho}\overset{\square}{G}{}^{-1}\overset{[-2]}{\mathfrak{I}}\overset{[-1]}{L}{}^{-2}\mathfrak{G}^2]-(c'_4+c'_5)^2\Big]A_\parallel=0,\\
&\Big[\Big(2\frac{1-\nu}{1-2\nu}-\overset{\square}{\rho}\overset{\square}{G}{}^{-1}\mathfrak{G}^2\Big)[2(1+c_3)-\overset{\square}{\rho}\overset{\square}{G}{}^{-1}\overset{[-2]}{\mathfrak{I}}\overset{[-1]}{L}{}^{-2}\mathfrak{G}^2]-(c'_4+c'_5)^2\Big]\overset{[+1]}{S}{}_\parallel=0,
\end{aligned}
\tag{34}
$$

$$
B=-\mathfrak{G}2\overset{\square}{G}\overset{\square}{\lambda}{}^{-1}\underset{*}{\alpha}\frac{1+\nu}{1-2\nu}A_\parallel-\mathfrak{G}2\overset{\square}{G}\overset{\square}{\lambda}{}^{-1}\overset{[-1]}{L}{}^2\underset{*}{\overset{[+1]}{\beta}}\overset{[+1]}{S}{}_\parallel.
\tag{35}
$$

Возможные случаи распространения поверхностей слабых разрывов представлены в таблице.

| No. | $\mathbf{A}$ | | $\overset{[+1]}{\mathbf{S}}$ | | $B$ |
|---|---|---|---|---|---|
| I | $A_{\parallel} = 0$ | $A_{\perp} = 0$ | $\overset{[+1]}{S}_{\parallel} = \overset{[+1]}{0}$ | $\overset{[+1]}{S}_{\perp} = \overset{[+1]}{0}$ | $B = 0$ |
| II | $A_{\parallel} = 0$ | $A_{\perp} \neq 0$ | $\overset{[+1]}{S}_{\parallel} = \overset{[+1]}{0}$ | $\overset{[+1]}{S}_{\perp} = \overset{[+1]}{0}$ | $B = 0$ |
| III | $A_{\parallel} \neq 0$ | $A_{\perp} = 0$ | $\overset{[+1]}{S}_{\parallel} = \overset{[+1]}{0}$ | $\overset{[+1]}{S}_{\perp} = \overset{[+1]}{0}$ | см. (35) |
| IV | $A_{\parallel} = 0$ | $A_{\perp} = 0$ | $\overset{[+1]}{S}_{\parallel} = \overset{[+1]}{0}$ | $\overset{[+1]}{S}_{\perp} \neq \overset{[+1]}{0}$ | $B = 0$ |
| V | $A_{\parallel} = 0$ | $A_{\perp} = 0$ | $\overset{[+1]}{S}_{\parallel} \neq \overset{[+1]}{0}$ | $\overset{[+1]}{S}_{\perp} = \overset{[+1]}{0}$ | см. (35) |
| VI | $A_{\parallel} = 0$ | $A_{\perp} \neq 0$ | $\overset{[+1]}{S}_{\parallel} = \overset{[+1]}{0}$ | $\overset{[+1]}{S}_{\perp} \neq \overset{[+1]}{0}$ | $B = 0$ |
| VII | $A_{\parallel} \neq 0$ | $A_{\perp} = 0$ | $\overset{[+1]}{S}_{\parallel} \neq \overset{[+1]}{0}$ | $\overset{[+1]}{S}_{\perp} = \overset{[+1]}{0}$ | см. (35) |
| VIII | $A_{\parallel} \neq 0$ | $A_{\perp} \neq 0$ | $\overset{[+1]}{S}_{\parallel} = \overset{[+1]}{0}$ | $\overset{[+1]}{S}_{\perp} = \overset{[+1]}{0}$ | см. (35) |
| IX | $A_{\parallel} = 0$ | $A_{\perp} = 0$ | $\overset{[+1]}{S}_{\parallel} \neq \overset{[+1]}{0}$ | $\overset{[+1]}{S}_{\perp} \neq \overset{[+1]}{0}$ | см. (35) |
| X | $A_{\parallel} \neq 0$ | $A_{\perp} = 0$ | $\overset{[+1]}{S}_{\parallel} = \overset{[+1]}{0}$ | $\overset{[+1]}{S}_{\perp} \neq \overset{[+1]}{0}$ | см. (35) |
| XI | $A_{\parallel} = 0$ | $A_{\perp} \neq 0$ | $\overset{[+1]}{S}_{\parallel} \neq \overset{[+1]}{0}$ | $\overset{[+1]}{S}_{\perp} = \overset{[+1]}{0}$ | см. (35) |
| XII | $A_{\parallel} \neq 0$ | $A_{\perp} = 0$ | $\overset{[+1]}{S}_{\parallel} \neq \overset{[+1]}{0}$ | $\overset{[+1]}{S}_{\perp} \neq \overset{[+1]}{0}$ | см. (35) |
| XIII | $A_{\parallel} = 0$ | $A_{\perp} \neq 0$ | $\overset{[+1]}{S}_{\parallel} \neq \overset{[+1]}{0}$ | $\overset{[+1]}{S}_{\perp} \neq \overset{[+1]}{0}$ | см. (35) |
| XIV | $A_{\parallel} \neq 0$ | $A_{\perp} \neq 0$ | $\overset{[+1]}{S}_{\parallel} \neq \overset{[+1]}{0}$ | $\overset{[+1]}{S}_{\perp} = \overset{[+1]}{0}$ | см. (35) |
| XV | $A_{\parallel} \neq 0$ | $A_{\perp} \neq 0$ | $\overset{[+1]}{S}_{\parallel} = \overset{[+1]}{0}$ | $\overset{[+1]}{S}_{\perp} \neq \overset{[+1]}{0}$ | см. (35) |
| XVI | $A_{\parallel} \neq 0$ | $A_{\perp} \neq 0$ | $\overset{[+1]}{S}_{\parallel} \neq \overset{[+1]}{0}$ | $\overset{[+1]}{S}_{\perp} \neq \overset{[+1]}{0}$ | см. (35) |

Рассмотрим каждый вариант распространения поверхности слабого разрыва, представленный в таблице, по отдельности. Распространение поверхностей слабых разрывов температурного инкремента, трансляционных и спинорных перемещений в каждом из представленных шестнадцати случаев возможно только при выполнении следующих огрнаничений, наложенных на определяющие параметры среды:

I. Поверхность $\Sigma$ не является поверхностью слабого разрыва. Поля температурного инкремента, трансляционных и спинорных перемещений — непрерывны.

II. Реализация волновой картины возможна только если $c'_5 = 0$, тогда скорость распространяющейся поверхности слабого разрыва трансляционных перемещений вычисляется согласно:

$$\mathfrak{G} = v^{\mu}_{\perp} = \sqrt{\frac{\overset{\square}{G}(1+c_1)}{\overset{\square}{\rho}}}.$$

Заметим, что при равенстве нулю определяющей микрополярной постоянной $c_1$ скорость $\mathfrak{G}$ в точности совпадет со скоростью чисто упругой поперечной волны $v_{\|} = \overset{\square}{G}/\overset{\square}{\rho}$.

III. Условие распространения волновой поверхности: $c'_4 + c'_5 = 0$. Скорость распространяющейся поверхности слабого разрыва трансляционных перемещений равна скорости распространения чисто упругой продольной волны:

$$\mathfrak{G} = v_{\|} = \sqrt{\frac{2\overset{\square}{G}(1-\nu)}{\overset{\square}{\rho}(1-2\nu)}}.$$

IV. Распространение волновой поверхности возможно только если $c'_4 = 0$. Скорость распространяющейся поверхности слабого разрыва спинорных перемещений:

$$\mathfrak{G} = v^{\mu\mu}_{\perp} = \overset{[-1]}{L}\sqrt{\frac{\overset{\square}{G}(1+c_2)}{\overset{\square}{\rho}\,\overset{[-2]}{\mathfrak{I}}}}.$$

В этом случае скорость $\mathfrak{G}$ является абсолютным скаляром и не проявляет чувствительность к зеркальным отражениям.

V. Условие распространения: $c'_4 + c'_5 = 0$. Скорость распространяющейся поверхности слабого разрыва спинорных перемещений равна скорости распространения чисто упругой продольной волны:

$$\mathfrak{G} = v^{\mu\mu}_{\|} = \overset{[-1]}{L}\sqrt{\frac{2\overset{\square}{G}(1+c_3)}{\overset{\square}{\rho}\,\overset{[-2]}{\mathfrak{I}}}}$$

В этом случае скорость $\mathfrak{G}$ является абсолютным скаляром и не проявляет чувствительность к зеркальным отражениям.

VI. Анализируя соотношения (33) вычислим скорость распространения поверхности слабого разрыва трансляционных и спинорных перемещений:

$$\sqrt{2}\underset{\pm}{\mathfrak{G}}_{\perp} = \sqrt{(v^{\mu}_{\perp})^2 + (v^{\mu\mu}_{\perp})^2 \pm \sqrt{4\tilde{c}'_4\tilde{c}'_5 + ((v^{\mu}_{\perp})^2 - (v^{\mu\mu}_{\perp})^2)^2}},$$

$$\tilde{c}'_4 = \rho^{-1}Gc'_4, \qquad \tilde{c}'_5 = \rho^{-1}\mathfrak{I}^{-1}GL^2c'_5,$$

VII. Анализируя соотношения (34) вычислим скорость распространения поверхности слабого разрыва трансляционных и спинорных перемещений:

$$\sqrt{2}\underset{\pm}{\mathfrak{G}}_{\parallel} = \sqrt{(v_{\parallel})^2 + (v_{\parallel}^{\mu\mu})^2 \pm \sqrt{4(c_4' + c_5')^2\rho^{-2}\mathfrak{I}^{-1}G^2L^2 + ((v_{\parallel})^2 - (v_{\parallel}^{\mu\mu})^2)^2}},$$

VIII. Условие распространения волновой поверхности: $c_4' = c_5' = 0$ и $v_{\perp}^{\mu} = v_{\parallel}$.
IX. Условие распространения волновой поверхности: $c_4' = c_5' = 0$ и $v_{\perp}^{\mu\mu} = v_{\parallel}^{\mu\mu}$.
X. Условие распространения волновой поверхности: $c_4' = c_5' = 0$ и $v_{\perp}^{\mu\mu} = v_{\parallel}$.
XI. Условие распространения волновой поверхности: $c_4' = c_5' = 0$ и $v_{\perp}^{\mu} = v_{\perp}^{\mu\mu}$.
XII. Условия распространения волновой поверхности: $c_4' = 0$. Скорость волны: $\sqrt{2}\underset{\pm}{\mathfrak{G}}_{\parallel} = v_{\parallel}^{\mu\mu}$.
XIII. Условия распространения волновой поверхности: $c_4' + c_5' = 0$ и $\sqrt{2}\underset{\pm}{\mathfrak{G}}_{\perp} = v_{\parallel}^{\mu\mu}$.
XIV. Условия распространения волновой поверхности: $c_5' = 0$ и $\sqrt{2}\underset{\pm}{\mathfrak{G}}_{\parallel} = v_{\perp}^{\mu}$.
XV. Условие распространения волновой поверхности: $c_4' + c_5' = 0$ и $\sqrt{2}\underset{\pm}{\mathfrak{G}}_{\parallel} = v_{\parallel}$.
XVI. Условие распространения волновой поверхности: $\underset{\pm}{\mathfrak{G}}_{\perp} = \underset{\pm}{\mathfrak{G}}_{\parallel}$

Следует отметить, что случаи II, IV и VI соответсвуют распротарнению атермических поперечных волн. Для случаев III, V, VII–XVI характерно наличие слабого разрыва температурного инкремента. Связь скачков температурного инкремента и скачков трансляционных и спинорных перемещений дается зависимостью (35).

Важно отметить, что в случаях (VII), (XII), (XIV), (XVI), слабый разрыв приращения температуры может быть выведен из последнего уравнения в (32). В этих случаях распространение атермических волн возможно, если нормальные проекции векторов поляризации разрывов **A** и **S** удовлетворяют следующему псевдотензорному соотношению

$$\frac{A_{\parallel}}{\overset{[+1]}{S}_{\parallel}} = -\overset{[-1]}{L}{}^2 \frac{\overset{[+1]}{\underset{*}{\beta}}}{\underset{*}{\alpha}} \frac{1-2\nu}{1+\nu}.$$

**5. Заключение.** В настоящей работе рассмотрены вопросы распространения поверхностей слабых разрывов температурного инкремента, трансляционных и спинорных перемещений в полуизотропной термоупругой микрополярной среде. Построена мультивесовая теория слабых разрывов температурного инкремента, трансляционных и спинорных перемещений в полуизотропной термоупругой микрополярной среде. Предлагаемая математическая теория существенным образом опирается на достижения современного псевдотензорного

исчисления. Получена общая мультивесовая форма псевдотензорного соотношения на волновой поверхности, распространяющейся в полуизотропной термоупругой микрополярной среде. С этой целью геометрические и кинематические условия Адамара–Томаса обобщены на псевдотензорный случай с учетом псевдотензорной геометрии распространяющейся поверхности слабых разрывов. Возможные варианты распространения слабых разрывов сведены в таблицу и проанализированы. Для возможной реализации каждого случая указаны ограничения накладываемые на определяющие постоянные полуизотропной термоупругой микрополярной среды. Изучены возможные соотношения между амплитудными факторами слабого разрыва температурного поля и векторов-разрывов трансляционных и спинорных перемещений. Указаны случаи соответствующие распространению термических и атермических волновых поверхностей.

## ДОПОЛНИТЕЛЬНО

**Вклад авторов.** Все авторы подтверждают соответствие своего авторства международным критериям ICMJE (все авторы внесли существенный вклад в разработку концепции, проведение исследования и подготовку статьи, прочли и одобрили финальную версию перед публикацией).
**Конфликт интересов.** Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.
**Источник финансирования.** Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 23-21-00262).

## ADDITIONAL INFORMATION

**Authors' contribution.** All authors confirm that their authorship meets the international ICMJE criteria (all authors have made a significant contribution to the development of the concept, research and preparation of the article, read and approved the final version before publication).
**Competing interests.** The authors declare that they have no competing interests.
**Funding.** The study was carried out with the financial support of the Russian Science Foundation (project No. 23-21-00262).

## ЛИТЕРАТУРА

[1] Nowacki W. Theory of Asymmetric Elasticity. Oxford, New York, Toronto, Sydney, Paris, Frankfurt : Pergamon Press, 1986. viii+383 p.
[2] Altenbach H., Maugin G. A., Erofeev V. (eds.). Mechanics of generalized continua. Berlin : Springer, 2011. Vol. 7. XX+352 p. DOI: 10.1007/978-3-642-19219-7.
[3] Eremeyev V. A., Lebedev L. P., Altenbach H. Foundations of micropolar mechanics. Berlin : Springer Science & Business Media, 2012. XX+352 p. DOI: 10.1007/978-3-642-28353-6.
[4] Altenbach H. Eremeyev V. A. (eds.). Generalized continua-from the theory to engineering applications. Berlin : Springer Science & Business Media, 2012. Vol. 541. XVII+387 p. DOI: 10.1007/978-3-7091-1371-4.
[5] Maugin G. A. Non-classical continuum mechanics. Singapore : Springer Verlag, 2017. XVII+259 p. DOI: 10.1007/978-981-10-2434-4.
[6] Neuber H. Über Probleme der Spannungskonzentration im Cosserat-Körper // Acta Mechanica. 1966. Vol. 2. P. 48–69. DOI: 10.1007/BF01176729.

[7] Neuber H. On the general solution of linear-elastic problems in isotropic and anisotropic Cosserat continua // Applied Mechanics: Proceedings of the Eleventh International Congress of Applied Mechanics Munich (Germany) 1964 / Springer. 1966. P. 153–158. DOI: 10.1007/978-3-662-29364-5_16.
[8] Neuber H. On the Effect of Stress Concentration in Cosserat Continua // Mechanics of Generalized Continua / Ed. by Ekkehart Kröner. Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 1968. P. 109–113.
[9] Радаев Ю. Н. Правило множителей в ковариантных формулировках микрополярных теорий механики континуума // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2018. Т. 22. С. 504–517. DOI: 10.14498/vsgtu1635.
[10] Радаев Ю.Н., Мурашкин Е.В. Псевдотензорная формулировка механики гемитропных микрополярных сред // Проблемы прочности и пластичности. 2020. Vol. 82, no. 4. P. 399–412. DOI: 10.32326/1814-9146-2020-82-4-399-412.
[11] Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On a micropolar theory of growing solids // Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences. 2020. Vol. 24, no. 3. P. 424–444. DOI: 10.14498/vsgtu1792.
[12] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. К теории линейных гемитропных микрополярных сред // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. ИЯ Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2020. № 4. С. 16–24. DOI: 10.37972/chgpu.2020.89.81.031.
[13] Murashkin E. V., Radaev Y. N. Coupled Thermoelasticity of Hemitropic Media. Pseudotensor Formulation // Mechanics of Solids. 2023. Vol. 58, no. 3. P. 802–813. DOI: 10.3103/s0025654423700127.
[14] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. К поливариантности основных уравнений связанной термоупругости микрополярного тела // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния. 2023. № 3(57). С. 112–128. DOI: 10.37972/chgpu.2023.57.3.010.
[15] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Мультивесовая термомеханика гемитропных микрополярных тел // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния. 2023. № 4(58). С. 86–120. DOI: 10.37972/chgpu.2023.58.4.010.
[16] Мурашкин Е. В. О связи микрополярных определяющих параметров термодинамических потенциалов состояния // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. ИЯ Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2023. № 1(55). С. 110–121. DOI: 10.37972/chgpu.2023.55.1.012.
[17] Kovalev V. A., Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On the Neuber theory of micropolar elasticity. A pseudotensor formulation // Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences. 2020. Vol. 24, no. 4. P. 752–761. DOI: 10.14498/vsgtu1799.
[18] Whitham G. B. Linear and nonlinear waves. New York : John Wiley & Sons, 2011. 660 p.
[19] Бреховских Л. М., Гончаров В. В. Linear and nonlinear waves. М. : Наука, 1982. 335 с.
[20] Smith A. C. Waves in micropolar elastic solids // Int. J. Eng. Sci. 1967. Vol. 5. P. 741–746. DOI: 10.1016/0020-7225(67)90019-5.
[21] Willson A. J. The micropolar elastic vibrations of a circular cylinder // International Journal of Engineering Science. 1972. Vol. 10, no. 1. P. 17–22. DOI: 10.1016/0020-7225(72) 90071-7.
[22] Achenbach J. Wave propagation in elastic solids. Amsterdam, London, New York : American Elsevier, 2012. 335 с.
[23] Maugin G. A. Acceleration waves in simple and linear viscoelastic micropolar materials // International Journal of Engineering Science. 1974. Vol. 12, no. 2. P. 143–157. DOI: 10.1016/0020-7225(74)90013-5.

[24] Murashkin E. V., Radayev Y. N. On strong and weak discontinuities of the coupled thermomechanical field in micropolar thermoelastic type-II continua // Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.]. 2014. T. 18, № 4. C. 85–97. DOI: 10.14498/vsgtu1331.
[25] Ковалев В. А., Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Математическая теория связанных плоских гармонических термоупругих волн в микрополярных континуумах первого типа // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Математика. Механика. Информатика. 2014. Vol. 14, no. 1. P. 77–87. DOI: 10.18500/1816-9791-2014-14-1-77-87.
[26] Kovalev V. A., Murashkin E. V., Radayev Y. N. On weak discontinuities and jump equations on wave surfaces in micropolar thermoelastic continua // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2015. Vol. 15, no. 1. P. 79–89. DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-1-79-89.
[27] Murashkin E. V., Radayev Y. N. On a classification of weak discontinuities in micropolar thermoelasticity // Materials Physics and Mechanics. 2015. Vol. 23, no. 1. P. 10–13. DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-1-79-89.
[28] Murashkin E. V., Stadnik N. E. Compatibility conditions in continua with microstrusture // MATEC Web of Conferences. 2017. Vol. 95. P. 12001. DOI: 10.1051/matecconf/20179512001.
[29] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Прямые, инверсные и зеркальные волновые моды связанных волн перемещений и микровращений в гемитропных микрополярных средах // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния. 2021. № 2(48). С. 115–127. DOI: 10.37972/chgpu.2021.48.2.014.
[30] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Термические и атермические плоские гармонические волны в ацентрическом изотропном теле // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния. 2023. № 2(56). С. 99–107. DOI: 10.37972/chgpu.2023.56.2.010.
[31] Murashkin E. V., Radayev Y. N. On Algebraic Triple Weights Formulation of Micropolar Thermoelasticity // Mechanics of Solids. 2024. Vol. 59, no. 1. P. 555–580. DOI: 10.1134/s0025654424700274.
[32] Murashkin E. V., Radayev Y. N. Heat transfer in anisotropic micropolar solids // Mechanics of Solids. 2023. Vol. 58, no. 9. P. 3111–3119. DOI: 10.3103/S0025654423700255.
[33] Розенфельд Б. А. Многомерные пространства. М. : Наука, 1966. 648 с.
[34] Synge J. L., Schild A. Tensor calculus. Toronto : Toronto University Press, 1949. Vol. 5. 334 p.
[35] Гуревич Г. Б. Основы теории алгебраических инвариантов. М., Л. : ГИТТЛ, 1948. 408 с. [Gurevich G. B. Foundations of the theory of algebraic invariants. Gröningen, P. Noordhoff, 1964. 429 p.].
[36] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Алгебраический алгоритм систематического приведения одноточечных псевдотензоров к абсолютным тензорам // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. ИЯ Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2022. № 1(51). С. 17–26. DOI: 10.37972/chgpu.2022.51.1.002.
[37] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Ковариантно постоянные тензоры в пространствах Евклида. Элементы теории // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. ИЯ Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2022. № 2(52). С. 106–115. DOI: 10.37972/chgpu.2022.52.2.012.
[38] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Ковариантно постоянные тензоры в пространствах Евклида. Приложения к механике континуума // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. ИЯ Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2022. № 2(52). С. 118–127. DOI: 10.37972/chgpu.2022.52.2.013.

[39] Radayev Y. N. Tensors with Constant Components in the Constitutive Equations of a Hemitropic Micropolar Solids // Mechanics of Solids. 2023. Vol. 58, no. 5. P. 1517–1527. DOI: 10.3103/S0025654423700206.
[40] Poincaré H. Sur les résidus des intégrales doubles // Acta math. 1887. Vol. 6. P. 321–380.
[41] Poincaré Henri. Analysis situs // J. Ecole Polytech. 1895. Vol. 1. P. 1–123.
[42] Фиников С. П. Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии. Л., М. : ОГИЗ, 1948. 432 с.
[43] Картан А. Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы. М. : Мир, 1971. 392 с.
[44] Ефимов Н. В. Введение в теорию внешних форм. М. : Наука, 1977. 88 с.
[45] Арнольд В. И. Математические методы классической механики. М. : Наука, 1979. 431 с.
[46] Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Элементы теории поля: вариационные симметрии и геометрические инварианты. М. : Физматлит, 2009. 156 с.
[47] Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Волновые задачи теории поля и термомеханика. Саратов : Изд-во Саратовского ун-та, 2010. 328 с.

## REFERENCES

[1] Nowacki W. Theory of Asymmetric Elasticity. Oxford, New York, Toronto, Sydney, Paris, Frankfurt : Pergamon Press, 1986. viii+383 p.
[2] Altenbach H., Maugin G. A., Erofeev V. (eds.). Mechanics of generalized continua. Berlin : Springer, 2011. Vol. 7. XX+352 p. DOI: 10.1007/978-3-642-19219-7.
[3] Eremeyev V. A., Lebedev L. P., Altenbach H. Foundations of micropolar mechanics. Berlin : Springer Science & Business Media, 2012. XX+352 p. DOI: 10.1007/978-3-642-28353-6.
[4] Altenbach H. Eremeyev V. A. (eds.). Generalized continua-from the theory to engineering applications. Berlin : Springer Science & Business Media, 2012. Vol. 541. XVII+387 p. DOI: 10.1007/978-3-7091-1371-4.
[5] Maugin G. A. Non-classical continuum mechanics. Singapore : Springer Verlag, 2017. XVII+259 p. DOI: 10.1007/978-981-10-2434-4.
[6] Neuber H. Über Probleme der Spannungskonzentration im Cosserat-Körper // Acta Mechanica. 1966. Vol. 2. P. 48–69. DOI: 10.1007/BF01176729.
[7] Neuber H. On the general solution of linear-elastic problems in isotropic and anisotropic Cosserat continua // Applied Mechanics: Proceedings of the Eleventh International Congress of Applied Mechanics Munich (Germany) 1964 / Springer. 1966. P. 153–158. DOI: 10.1007/978-3-662-29364-5_16.
[8] Neuber H. On the Effect of Stress Concentration in Cosserat Continua // Mechanics of Generalized Continua / Ed. by Ekkehart Kröner. Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 1968. P. 109–113.
[9] Radaev Y. N. The multiplier rule in covariant formulations of micropolar theories of continuum mechanics // Vestn. Sam. gos. tekhn. un-ta. Ser. Fiz.-mat. nauki. 2018. Vol. 22. P. 504–517. DOI: 10.14498/vsgtu1635.
[10] Radaev Y. N., Murashkin E. V. Pseudotensor formulation of the mechanics of hemitropic micropolar media // Problems of strength and ductility. 2020. Vol. 82, no. 4. P. 399–412. DOI: 10.32326/1814-9146-2020-82-4-399-412.
[11] Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On a micropolar theory of growing solids // Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences. 2020. Vol. 24, no. 3. P. 424–444. DOI: 10.14498/vsgtu1792.
[12] Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On theory of linear hemitropic micropolar media // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im.

IYa Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya. 2020. no. 4. P. 16–24. DOI: 10.37972/chgpu.2020.89.81.031.

[13] Murashkin E. V., Radaev Y. N. Coupled Thermoelasticity of Hemitropic Media. Pseudotensor Formulation // Mechanics of Solids. 2023. Vol. 58, no. 3. P. 802–813. DOI: 10.3103/s0025654423700127.

[14] Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On the polyvariance of the basic equations of coupled thermoelasticity of a micropolar solid // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. IYa Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya. 2023. no. 3(57). P. 112–128. DOI: 10.37972/chgpu.2023.57.3.010.

[15] Murashkin E. V., Radayev Yu. N. Multiweight thermomechanics of hemitropic micropolar solids // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. IYa Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya. 2023. no. 4(58). P. 86–120. DOI: 10.37972/chgpu.2023.58.4.010.

[16] Murashkin E. V. On the relationship between micropolar determining parameters of thermodynamic state potentials // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. IYa Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya. 2023. no. 1(55). P. 110–121. DOI: 10.37972/chgpu.2023.55.1.012.

[17] Kovalev V. A., Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On the Neuber theory of micropolar elasticity. A pseudotensor formulation // Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences. 2020. Vol. 24, no. 4. P. 752–761. DOI: 10.14498/vsgtu1799.

[18] Whitham G. B. Linear and nonlinear waves. New York : John Wiley & Sons, 2011. 660 p.

[19] Brekhovskikh L. M., Goncharov V. V. Linear and nonlinear waves. Moscow : NAUKA, 1982. 335 p.

[20] Smith A. C. Waves in micropolar elastic solids // Int. J. Eng. Sci. 1967. Vol. 5. P. 741–746. DOI: 10.1016/0020-7225(67)90019-5.

[21] Willson AJ. The micropolar elastic vibrations of a circular cylinder // International Journal of Engineering Science. 1972. Vol. 10, no. 1. P. 17–22. DOI: 10.1016/0020-7225(72) 90071-7.

[22] Achenbach Jan. Wave propagation in elastic solids. Amsterdam, London, New York : American Elsevier, 2012. 335 p.

[23] Maugin G. A. Acceleration waves in simple and linear viscoelastic micropolar materials // International Journal of Engineering Science. 1974. Vol. 12, no. 2. P. 143–157. DOI: 10.1016/0020-7225(74)90013-5.

[24] Murashkin Evgenii V, Radayev Yuri N. On strong and weak discontinuities of the coupled thermomechanical field in micropolar thermoelastic type-II continua // Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.]. 2014. Vol. 18, no. 4. P. 85–97. DOI: 10.14498/vsgtu1331.

[25] Kovalev V. A., Murashkin E. V., Radaev Yu. N. Mathematical theory of coupled plane harmonic thermoelastic waves in micropolar continua of the first type // Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya Matematika. Mekhanika. Informatika. 2014. Vol. 14, no. 1. P. 77–87. DOI: 10.18500/1816-9791-2014-14-1-77-87.

[26] Kovalev Vladimir Aleksandrovich, Murashkin Eugenii Valeryevich, Radayev Yuri Nikolaevich. On weak discontinuities and jump equations on wave surfaces in micropolar thermoelastic continua // Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya Matematika. Mekhanika. Informatika. 2015. Vol. 15, no. 1. P. 79–89. DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-1-79-89.

[27] Murashkin E. V., Radayev Y. N. On a classification of weak discontinuities in micropolar thermoelasticity // Materials Physics and Mechanics. 2015. Vol. 23, no. 1. P. 10–13. DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-1-79-89.

[28] Murashkin E. V., Stadnik N. E. Compatibility conditions in continua with microstrusture // MATEC Web of Conferences. 2017. Vol. 95. P. 12001. DOI: 10.1051/matecconf/20179512001.
[29] Murashkin E. V., Radayev Yu. N. Direct, inverse and mirror wave modes of coupled waves of displacements and microrotations in hemitropic micropolar media // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. IYa Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya. 2021. no. 2(48). P. 115–127. DOI: 10.37972/chgpu.2021.48.2.014.
[30] Murashkin E. V., Radayev Yu. N. Thermal and athermal plane harmonic waves in an acentric isotropic solid // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. IYa Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya. 2023. no. 2(56). P. 99–107. DOI: 10.37972/chgpu.2023.56.2.010.
[31] Murashkin E. V., Radayev Yu N. Heat transfer in anisotropic micropolar solids // Mechanics of Solids. 2023. Vol. 58, no. 9. P. 3111–3119. DOI: 10.3103/S0025654423700255.
[32] Murashkin EV, Radayev YN. On Algebraic Triple Weights Formulation of Micropolar Thermoelasticity // Mechanics of Solids. 2024. Vol. 59, no. 1. P. 555–580. DOI: 10.1134/s0025654424700274.
[33] Rosenfeld B. A. Multidimensional spaces. Moscow : Nauka, 1966. 648 p.
[34] Synge J. L., Schild A. Tensor calculus. Toronto : Toronto University Press, 1949. Vol. 5. 334 p.
[35] Gurevich G. B. Fundamentals of the Theory of Algebraic Invariants. Moscow : GITTL, 1948. 408 p.
[36] Murashkin E. V., Radayev Yu. N. An algebraic algorithm for systematically reducing one-point pseudotensors to absolute tensors // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. IYa Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya. 2022. no. 1(51). P. 17–26. DOI: 10.37972/chgpu.2022.51.1.002.
[37] Murashkin E. V., Radayev Yu. N. Covariantly Constant Tensors in Euclidean Spaces. Elements of Theory // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. IYa Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya. 2022. no. 2(52). P. 106–115. DOI: 10.37972/chgpu.2022.52.2.012.
[38] Murashkin E. V., Radayev Yu. N. Covariantly Constant Tensors in Euclidean Spaces. Applications to Continuum Mechanics // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. IYa Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya. 2022. no. 2(52). P. 118–127. DOI: 10.37972/chgpu.2022.52.2.013.
[39] Radayev Y. N. Tensors with Constant Components in the Constitutive Equations of a Hemitropic Micropolar Solids // Mechanics of Solids. 2023. Vol. 58, no. 5. P. 1517–1527. DOI: 10.3103/S0025654423700206.
[40] Poincaré H. Sur les résidus des intégrales doubles // Acta math. 1887. Vol. 6. P. 321–380.
[41] Poincaré Henri. Analysis situs // J. Ecole Polytech. 1895. Vol. 1. P. 1–123.
[42] Finikov S. P. Cartan's Method of External Forms in Differential Geometry. Moscow : OGIZ, 1948. 432 p.
[43] Cartan A. Differential Calculus. Differential Forms. Moscow : Mir, 1971. 392 p.
[44] Efimov N. V. Introduction to the Theory of External Forms. Moscow : Nauka, 1977. 88 p.
[45] Arnold V. I. Mathematical methods of classical mechanics. Moscow : Наука, 1979. 431 p.
[46] Kovalev V. A., Radaev Yu. N. Elements of field theory: variational symmetries and geometric invariants. Moscow : Fizmatlit, 2009. 156 p.
[47] Kovalev V. A., Radaev Yu. N. Wave problems of field theory and thermomechanics. Saratov : Publishing House of Saratov University, 2010. 328 p.