DOI: `10.37972/chgpu.2024.60.2.009` *EDN: FTWGTW*
Научная статья *УДК: 539.735*

Б. Г. Миронов

К ТЕОРИИ КРУЧЕНИЯ НЕОДНОРОДНЫХ ПРИЗМАТИЧЕСКИХ СТЕРЖНЕЙ, НАХОДЯЩИХСЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВНЕШНЕГО ДАВЛЕНИЯ

Российский университет транспорта, Москва, Россия

Аннотация. В работе исследовано предельное состояние стержней из идеального жесткопластического неоднородного материала, находящихся под действием переменного внешнего давления, линейно меняющегося вдоль образующей стержня. Рассмотрены основные соотношения, описывающие предельное состояние неоднородных стержней. Определены характеристики исследуемых соотношений и соотношения вдоль характеристик. Получены интегралы основных соотношений при различных условиях предельного состояния. Рассмотрена задача о предельном состоянии неоднородного призматического стержня с прямоугольным сечением под внешним давлением, с предположением линейной зависимости предела текучести от координат.

Ключевые слова: кручение, неоднородность, пластичность, напряжение, деформация, линия разрыва напряжений, условие пластичности

Миронов Борис Григорьевич, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей математики и естественных наук; `e-mail:` mbg.chspu@yandex.ru; `https://orcid.org/0000-0002-2116-8908`; AuthorID: 13384

для цитирования: *Миронов Б. Г.* К теории кручения неоднородных призматических стержней, находящихся под действием внешнего давления // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2024. № 2(60). С. 107–115. DOI: `10.37972/chgpu.2024.60.2.009` EDN: FTWGTW

Поступила: 10.08.24; *принята в печать: 06.12.24;* *опубликована: 18.12.24.*

Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost.

DOI: `10.37972/chgpu.2024.60.2.009` *EDN: FTWGTW*
Research Article

B. G. Mironov

ON THE THEORY OF TORSION OF HETEROGENEOUS PRISMATIC RODS UNDER EXTERNAL PRESSURE

Russian University of Transport, Moscow, Russia

Abstract. The study investigates the ultimate state of rods made of ideally rigid-plastic heterogeneous material under external pressure linearly varying along the rod's generatrix. The primary relationships describing the ultimate state of heterogeneous rods are considered. Characteristics of the studied relationships and equations along these characteristics are determined. Integrals of the main equations are derived for various conditions of the rod's ultimate state. The problem of the ultimate state of a heterogeneous prismatic rod with a rectangular cross-section under external pressure is studied, assuming that the yield strength linearly depends on the coordinate of the point.

Keywords: torsion, heterogeneity, plasticity, stress, deformation, stress discontinuity line, plasticity condition

Boris G. Mironov, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor; `e-mail:` mbg.chspu@yandex.ru; `https://orcid.org/0000-0002-2116-8908`; AuthorID: 13384

to cite this article: *Mironov B. G.* On the Theory of Torsion of Heterogeneous Prismatic Rods Under External Pressure // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2024. No 2(60). p. 107–115. DOI: `10.37972/chgpu.2024.60.2.009` EDN: FTWGTW

Received: 10.08.24; accepted: 06.12.24; published: 18.12.24.

Введение. Неоднородность механических свойств пластических тел в различных точках вызвана различными причинами: неоднородностью состава, неоднородным упрочнением материала, влиянием потоков элементарных частиц, воздействием температурных градиентов и т.п. Кручение цилиндрического стержня с односвязным поперечным сечением, в предположении, что предел текучести является произвольной функцией координат x и y точки, исследовалась в [1]. Показано, что, как и в случае однородности [2] о чисто пластическом кручении сводится к одному дифференциальному уравнению первого порядка в частных производных. При этом характеристики, вообще говоря, не являются прямыми. Для случая, когда предел текучести меняется вдоль какого-то направления, найдены интегралы исследуемого соотношения. В работе [3] исследована задача о кручении круглого пластического стержня с кусочно-постоянной неоднородностью. Предполагается, что в сечении стержня есть линия раздела материала с различными пределами текучести. Показано, что в случае, когда линия раздела выходит на контур сечения то это приводит к появлению дополнительных линий разрыва напряжений в области с более высоким пределом текучести. Найдены характеристики, линии разрыва напряжений, определен предельный момент. В [4] рассмотрено предельное состояние неоднородных цилиндрических и призматических стержней при линеаризованном условии пластичности. Кручение изотропных и анизотропных стержней при действии давления, линейно меняющегося вдоль образующей, изучено в [5] и [6]. Определены характеристики исследуемых соотношений и найдены соотношения вдоль них. Задача о кручении стержней из упрочняющегося материала не является статически определимой. Отдельные случаи кручения стержней из упрочняющегося материала, находящихся под действием переменного внешнего давления в линеаризованной постановке рассмотрены в работах [7] и [8]. Предельное состояние неоднородных стержней из идеального жесткопластического материала, находящихся под действием внешнего давления, исследовано в [9]. В работе рассмотрены общие соотношения. Найдены интегралы исследуемых соотношений для различных случаев условий пластичности.

1. Постановка задачи. Рассмотрим напряженно-деформированное состояние неоднородного стержня из идеального жесткопластического материала. Предположим, что образующие стержня параллельны оси z. Стержень находится под действием переменного внешнего давления линейно меняющегося вдоль образующей стержня. Предположим также, что стержень закручивается вокруг своей оси. При этом боковая поверхность стержня свободна от нагрузок.

2. Построение решений. Компоненты тензора напряжений σ_{ij} в стержне определяются из соотношений:

$$\begin{aligned} &\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -\lambda z + \mu \ \ (\lambda,\, \mu - const) \\ &\tau_{xy} = 0, \tau_{xz} = \tau_{xz}\,(x,\, y)\,,\ \tau_{yz} = \tau_{yz}\,(x,\, y)\,, \end{aligned} \tag{1}$$

уравнения равновесия

$$\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}=\lambda \tag{2}$$

условия пластичности

$$f\left(\tau_{xz},\ \tau_{yz},\,x,\,y\right)=0. \tag{3}$$

Компоненты тензора скоростей деформаций ε_{ij} в стержне определяются следующими соотношениями

$$\varepsilon_x=\varepsilon_y=\varepsilon_z=\varepsilon_{xy}=0 \tag{4}$$

и соотношением ассоциированного закона пластического течения

$$\frac{\varepsilon_{xz}}{\frac{\partial f}{\partial\tau_{xz}}}=\frac{\varepsilon_{yz}}{\frac{\partial f}{\partial\tau_{yz}}} \tag{5}$$

Граничное условие на контуре поперечного сечения стержня имеет вид

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\tau_{yz}}{\tau_{xz}}\,, \tag{6}$$

Согласно соотношению (6), на контуре поперечного сечения вектор $\tau=(\tau_{xz},\ \tau_{yz})$ касательного напряжения направлен по касательной к нему.

Продифференцируем соотношение (3) по переменной xи получим

$$\frac{\partial f}{\partial\tau_{xz}}\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial\tau_{yz}}\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial x}=0. \tag{7}$$

Из уравнения равновесия (2) и соотношения (7) имеем

$$-\frac{\partial f}{\partial\tau_{yz}}\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial\tau_{xz}}\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda\frac{\partial f}{\partial\tau_{xz}}. \tag{8}$$

Следовательно, для определения характеристик уравнения (8) и соотношений вдоль этих характеристик получим соотношения

$$\frac{dx}{-\frac{\partial f}{\partial\tau_{yz}}}=\frac{dy}{\frac{\partial f}{\partial\tau_{xz}}}=\frac{d\tau_{yz}}{\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda\frac{\partial f}{\partial\tau_{xz}}} \tag{9}$$

В соответствии с (9) характеристики уравнения (8) определяются из соотношения

$$\frac{\partial f}{\partial\tau_{xz}}dx+\frac{\partial f}{\partial\tau_{yz}}dy=0 \tag{10}$$

и соотношения вдоль характеристик находим из уравнений

$$\frac{\partial f}{\partial\tau_{yz}}d\tau_{yz}+\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda\frac{\partial f}{\partial\tau_{xz}}\right)dx=0,\ \ \frac{\partial f}{\partial\tau_{xz}}d\tau_{yz}-\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda\frac{\partial f}{\partial\tau_{xz}}\right)dy=0. \tag{11}$$

Аналогично, из соотношения (3), продифференцированного по переменной y, и уравнение равновесия (2) получим

$$\frac{\partial f}{\partial\tau_{yz}}\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial\tau_{xz}}\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial y}+\lambda\frac{\partial f}{\partial\tau_{yz}}. \tag{12}$$

$$\frac{dx}{\frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}}} = \frac{dy}{-\frac{\partial f}{\partial \tau_{xz}}} = \frac{d\tau_{xz}}{\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}}} \tag{13}$$

И в соответствии с соотношениями (13) имеем, что вдоль характеристик (10) имеют место соотношения

$$\frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}} d\tau_{xz} - \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}} \right) dx = 0, \ \frac{\partial f}{\partial \tau_{xz}} d\tau_{xz} + \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}} \right) dy = 0. \tag{14}$$

Интегралы соотношений (10), (11) и (14), в общем случае, возможно получить только численно. В некоторых случаях, есть возможность проинтегрировать эти уравнения.

Рассмотрим случай, когда условие пластичности (3) имеет вид:

$$\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 = k\,(\,x,\,y) \tag{15}$$

В соответствии с (15) уравнение характеристик (10) примет вид

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\tau_{xz}}{\tau_{yz}}\,, \tag{16}$$

а соотношения (14) запишутся в виде

$$\tau_{yz} d\tau_{xz} = \left(-k \frac{\partial k}{\partial y} + \lambda \tau_{yz} \right) dx, \ \tau_{xz} d\tau_{yz} = \left(-k \frac{\partial k}{\partial x} + \lambda \tau_{xz} \right) dy. \tag{17}$$

В частности, при $k = k\,(y)$ из (17) получим

$$\tau_{yz} = \lambda y + c_1, \ \tau_{xz} = \pm \sqrt{k^2(y) - (\lambda y + c_1)^2}. \tag{18}$$

где $c_1 = const$ вдоль каждой характеристики.

Согласно (18) из уравнения (16) получим

$$x = \mp \int \frac{\lambda y + c_1}{\sqrt{k^2(y) - (\lambda y + c_1)^2}} dy + c_2 \tag{19}$$

где $c_2 = const$ вдоль каждой характеристики.

Аналогично, при $k = k\,(x)$ из соотношения (17) имеем

$$\tau_{xz} = \lambda x + c_3, \ \tau_{yz} = \pm \sqrt{k^2(x) - (\lambda x + c_3)^2}. \tag{20}$$

где $c_3 = const$ вдоль каждой характеристики.

В соответствии с (20) из (16) следует

$$y = \mp \int \frac{\lambda x + c_3}{\sqrt{k^2(x) - (\lambda x + c_3)^2}} dy + c_4 \tag{21}$$

где $c_4 = const$ вдоль каждой характеристики.

Рассмотрим призматический стержень с прямоугольным сечением $ABCD$ со сторонами $2a$и $2b$ (рис. 1). Предположим, что условие пластичности (15) имеет вид

$$\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 = (k_0 sign \tau_{yz} + \lambda y)^2. \tag{22}$$

При этом из (18) получим соотношения для компонент напряжения

$$\tau_{yz} = \lambda y + c_1,\ \tau_{xz} = \pm\sqrt{(k_0 - c_1)(2\lambda y + k_0 + c_1)}. \tag{23}$$

Уравнения характеристик (19) примут вид

$$x = \mp\frac{\sqrt{2\lambda y + k_0 + c_1}}{3\lambda\sqrt{k_0 - c_1}}\,(\lambda y - k_0 + 2c_1) + c_2 \tag{24}$$

Вдоль отрезка AB $\quad x = a,\ \tau_{xz} = 0,\ \tau_{yz} = k_0 + \lambda y$ В области, примыкающей к отрезку AB, компоненты тензора напряжений также имеют вид

$$\tau_{xz} = 0,\ \tau_{yz} = k_0 + \lambda y \tag{25}$$

Характеристиками являются прямые параллельные оси x.

Вдоль отрезка BC $\quad y = -b,\ \tau_{xz} = k_0 - \lambda b,\ \tau_{yz} = 0$ В области, примыкающей к отрезку BC, компоненты тензора напряжений имеют вид

$$\tau_{xz} = \sqrt{(k_0 - \lambda b)(2\lambda y + k_0 + \lambda b)},\ \tau_{yz} = \lambda(y + b). \tag{26}$$

Характеристиками являются линии, уравнения которых имеют вид

$$\sqrt{2\lambda y + k_0 + \lambda b}\,(\lambda y - k_0 + 2\lambda b) = -3\lambda\sqrt{k_0 - \lambda b}x + c_{21}, \tag{27}$$

где $c_{21} = const$ вдоль каждой характеристики.

Линия разрыва напряжений, выходящая из вершины B поперечного сечения стержня, определяется уравнением

$$(2\lambda y + k_0 + \lambda b)^3 = (k_0 - \lambda b)(k_0 - \lambda b - 3\lambda(x - a))^2 \tag{28}$$

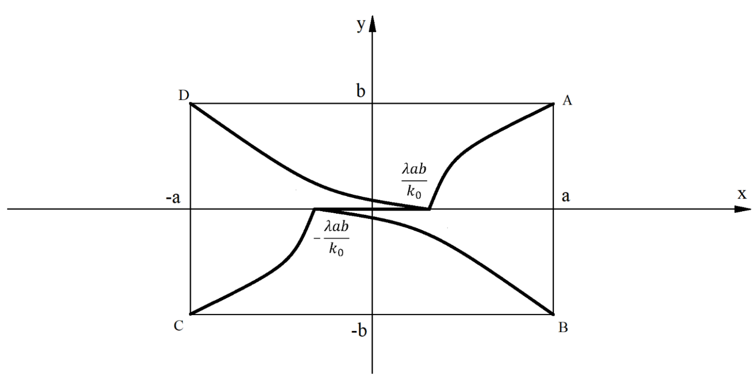

Рис. 1. Расположение линий разрыва напряжений на поперечном сечении стержня

Вдоль отрезка CD $\quad x = -a,\ \tau_{xz} = 0,\ \tau_{yz} = -k_0 + \lambda y$ В области, примыкающей к отрезку CD, компоненты тензора напряжений также имеют вид

$$\tau_{xz} = 0,\ \tau_{yz} = -k_0 + \lambda y \tag{29}$$

Характеристиками являются прямые параллельные оси x

Линия разрыва напряжений, выходящая из вершины C поперечного сечения стержня, определяется уравнением

$$(k_0 - \lambda b)\left(2\lambda y + k_0 + \lambda b\right)^3 = \left((k_0 - \lambda b)^2 + 3\lambda\left(k_0 + \lambda b\right)(x + a)\right)^2 \tag{30}$$

Вдоль отрезка DA $y = b$, $\tau_{xz} = -k_0 + \lambda b$, τ_{yz} =0 В области, примыкающей к отрезку DA, компоненты тензора напряжений имеют вид

$$\tau_{xz} = -\sqrt{(k_0 - \lambda b)(-2\lambda y + k_0 + \lambda b)},\ \tau_{yz} = \lambda(y - b). \tag{31}$$

Характеристиками являются линии, уравнения которых имеют вид

$$\sqrt{-2\lambda y + k_0 + \lambda b}\,(-\lambda y - k_0 + 2\lambda b) = 3\lambda\sqrt{k_0 - \lambda b}x + c_{22}, \tag{32}$$

где $c_{22} = const$ вдоль каждой характеристики.

Линия разрыва напряжений, выходящая из вершины D поперечного сечения стержня, определяется уравнением

$$(-2\lambda y + k_0 + \lambda b)^3 = (k_0 - \lambda b)(k_0 - \lambda b - 3\lambda(x + a))^2 \tag{33}$$

А линия разрыва напряжений, выходящая из вершины A поперечного сечения стержня, определяется уравнением

$$(k_0 - \lambda b)\left(-2\lambda y + k_0 + \lambda b\right)^3 = \left((k_0 - \lambda b)^2 + 3\lambda\left(k_0 + \lambda b\right)(x - a)\right)^2 \tag{34}$$

3. Заключение. Таким образом в работе

(1) исследованы основные соотношения, описывающие предельное состояние неоднородных стержней, находящихся под действием линейно меняющегося вдоль образующей внешнего давления;

(2) определены характеристики исследуемых соотношений и интегралы основных соотношений при различных условиях предельного состояния стержня;

(3) изучена задача о предельном состоянии неоднородного призматического стержня с прямоугольным сечением, находящегося под внешним давлением, в предположении, что предел текучести линейно зависит от ординаты точки;

(4) определено поле характеристик исследуемой задачи, найдены линии разрыва напряжений и компоненты тензора напряжений.

ДОПОЛНИТЕЛЬНО

Вклад авторов. 100%.
Конфликт интересов. Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.
Источник финансирования. Авторы заявляют об отсутствии внешнего финансирования при проведении исследования.

ADDITIONAL INFORMATION

Authors' contribution. 100%.
Competing interests. The authors declare that they have no competing interests.
Funding. This study was not supported by any external sources of funding.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Кузнецов А. И. The problem of torsion and plane of non-homogeneous body // Archiwum Mechaniki Stosowanej. 1958. Vol. 10, no. 4. P. 447–462.

[2] Ивлев Д. Д. Теория идеальной пластичности. Москва : Наука, 1966. С. 232.

[3] Ольшак В., Рыхлевский Я., Урбановский В. Теория пластичности неоднородных тел. Москва : Мир, 1964. С. 156.

[4] Миронов Б. Г., Миронов Ю. Б. Кручение неоднородных цилиндрических и призматических стержней из идеально пластического материала при линеаризованном условии пластичности // Известия РАН. МТТ. 2020. № 6. С. 65–72. DOI: 10.31857/S0572329920060100.

[5] Миронов Б. Г., Козлова Л. С. Кручение призматических стержней при действии давления, линейно меняющегося вдоль образующей // Известия РАН. МТТ. 2014. № 3. С. 107–113.

[6] Миронов Б. Г., Миронов Ю. Б. К вопросу кручения анизотропных стержней, находящихся под действием внешнего давления // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2023. № 2. С. 160–165. DOI: 10.31857/S0572329922600530.

[7] Миронов Б. Г., Миронов Ю. Б. К вопросу о кручении стержней из упрочняющегося материала, находящихся под действием переменного внешнего давления, при линеаризованном условии пластичности // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2022. № 2. С. 82–89. DOI: 10.31857/S0572329922020143.

[8] Миронов Б. Г., Миронов Ю. Б. О кручении стержней из упрочняющегося материала, находящихся под действием переменного внешнего давления, при линеаризованном законе пластического течения // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2023. № 6. С. 83–88. DOI: 10.31857/S0572329923600226.

[9] Миронов Б. Г., Миронов Ю. Б. К вопросу кручения неоднородных стержней, находящихся под действием внешнего давления // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2021. № 3 (49). С. 42–46. DOI: 10.37972/chgpu.2021.49.3.005.

REFERENCES

[1] Kuznetsov A. I. The problem of torsion and plane of non-homogeneous body // Archiwum Mechaniki Stosowanej. 1958. Vol. 10, no. 4. P. 447–462.

[2] Ivlev D. D. Theory of Ideal Plasticity. Moscow : Nauka, 1966. P. 232.

[3] Olshak V., Rykhlevsky Y., Urbanovsky V. Theory of Plasticity of Heterogeneous Bodies. Moscow : Mir, 1964. P. 156.

[4] Mironov B. G., Mironov Y. B. Torsion of Heterogeneous Cylindrical and Prismatic Rods Made of Perfectly Plastic Material Under Linearized Plasticity Condition // Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Mechanics of Solids (Izvestiya RAN. MTT). 2020. no. 6. P. 65–72. DOI: 10.31857/S0572329920060100.

[5] Mironov B. G., Kozlova L. S. Torsion of Prismatic Rods Under Pressure Linearly Varying Along the Generator // Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Mechanics of Solids (Izvestiya RAN. MTT). 2014. no. 3. P. 107–113.

[6] Mironov B. G., Mironov Y. B. On the Torsion of Anisotropic Rods Under External Pressure // Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Mechanics of Solids (Izvestiya RAN. MTT). 2023. no. 2. P. 160–165. DOI: 10.31857/S0572329922600530.

[7] Mironov B. G., Mironov Y. B. On the Torsion of Rods Made of Hardening Material Under Variable External Pressure Under Linearized Plasticity Condition // Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Mechanics of Solids (Izvestiya RAN. MTT). 2022. no. 2. P. 82–89. DOI: 10.31857/S0572329922020143.

[8] Mironov B. G., Mironov Y. B. On the Torsion of Rods Made of Hardening Material Under Variable External Pressure with a Linearized Law of Plastic Flow // Proceedings

of the Russian Academy of Sciences. Mechanics of Solids (Izvestiya RAN. MTT). 2023. no. 6. P. 83–88. DOI: 10.31857/S0572329923600226.

[9] Mironov B. G., Mironov Y. B. On the Torsion of Heterogeneous Rods Under External Pressure // Bulletin of the Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State. 2021. no. 3 (49). P. 42–46. DOI: 10.37972/chgpu.2021.49.3.005.