Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния.

DOI: 10.37972/chgpu.2024.60.2.008 *EDN: EUXBUD*

Научная статья *УДК: 539.374*

Е. В. Мурашкин[1], *Ю. Н. Радаев*[1]

ПЛОСКИЕ ГАРМОНИЧЕСКИЕ ТЕРМОУПРУГИЕ ВОЛНЫ В УЛЬТРАГЕМИТРОПНОМ МИКРОПОЛЯРНОМ ТЕЛЕ

[1] *Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия*

Аннотация. Работа посвящена проблемам, связанным с распространением плоских гармонических связанных волн температурного инкремента, трансляционных и спинорных перемещений в ультрагемитропном микрополярном термоупругом теле. Приводится замкнутая система дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка относительно температурного инкремента и перемещений (трансляционных и спинорных). Найдены и проанализированы характеристические уравнения для волновых чисел плоских гармонических связанных термоупругих волн. Получены алгебраические выражения для корней характеристических уравнений и отделены нормальные волновые числа с положительной действительной частью. Для продольной волны комплексные амплитуды температурного инкремента, трансляционных и спинорных перемещений оказываются связанными, в отличие от атермической по своей природе поперечной волны.

Ключевые слова: микрополярная термоупругость, ультрагемитропное тело, трансляционное смещение, спинорное смещение, плоская гармоническая по времени волна, продольная волна, поперечная волна, волновое число, комплексная амплитуда, фазовая плоскость, дисперсионное уравнение, вектор поляризации.

Мурашкин Евгений Валерьевич, канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник лаб. моделирования в механике деформируемого твердого тела; `e-mail:` murashkin@ipmnet.ru; https://orcid.org/0000-0002-3267-4742; AuthorID: 129570

Радаев Юрий Николаевич, д-р физ.-мат. наук, проф., ведущий научный сотрудник лаб. моделирования в механике деформируемого твердого тела; `e-mail:` radayev@ipmnet.ru; https://orcid.org/0000-0002-0866-2151; AuthorID: 103116

для цитирования: *Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н.* Плоские гармонические термоупругие волны в ультрагемитропном микрополярном теле // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2024. № 2(60). С. 116–128. DOI: 10.37972/chgpu.2024.60.2.008 EDN: EUXBUD

Поступила: 03.09.2024; принята в печать: 16.09.2024; опубликована: 18.12.24.

Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost.

DOI: `10.37972/chgpu.2024.60.2.008` *EDN: EUXBUD*
Research Article

E. V. Murashkin[1], *Y. N. Radayev*[1]

PLANE HARMONIC THERMOELASTIC WAVES IN ULTRAHEMITROPIC MICROPOLAR SOLID

[1] *Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow, Russia*

Abstract. The study is devoted to problems associated with propagation of plane harmonic coupled waves of temperature increment, translational and spinor displacements in an ultrahemitropic micropolar thermoelastic solid. A closed system of differential equations in partial derivatives of the second order with respect to the temperature increment and displacements (translational and spinor) is revisited. Characteristic equations for wavenumbers of plane harmonic coupled thermoelastic waves are found and analyzed. Algebraic expressions for the roots of the characteristic equations are obtained and normal wavenumbers with a positive real part are separated. For a longitudinal wave, complex amplitudes of the temperature increment, translational and spinor displacements are coupled, in contrast to a transverse wave, which is athermal in nature.

Keywords: micropolar thermoelasticity, ultrahemitropic solid, translational displacement, spinor displacement, plane time-harmonic wave, longitudinal wave, transverse wave, wavenumber, complex amplitude, phase plane, dispersion equation, polarization vector.

Evgenii V. Murashkin, Cand. Sci. Phys. & Math., MD, Senior Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences; `e-mail:` evmurashkin@gmail.ru; https://orcid.org/0000-0002-3267-4742; AuthorID: 129570

Yuri N. Radayev, Dr. Sci. Phys. & Math., Prof., Leading Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences; `e-mail:` radayev@ipmnet.ru; https://orcid.org/0000-0002-0866-2151; AuthorID: 103116

to cite this article: *Murashkin E. V., Radayev Y. N.* Plane harmonic thermoelastic waves in ultrahemitropic micropolar solid // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2024. No 2(60). p. 116–128. DOI: `10.37972/chgpu.2024.60.2.008` EDN: EUXBUD

Received: 03.09.2024; accepted: 16.09.2024; published: 18.12.24.

1. Введение. Модели микрополярных континуумов основаны на понятиях спинорных и трансляционных перемещений, определяющих движение элемента деформируемой среды. Указанный способ моделирования микрополярного тела впервые был описан в работе братьев Коссера [1]. Последующие многочисленные работы по микрополярной упругости появились только через 50 лет. Среди них следует отдельно отметить работы отечественных ученых [2, 3], а также работы немецких авторов [4–7]. Векторы спинорных и трансляционных перемещений могут быть введены в теорию способами известными в теоретической механике как теоремы Шаля о поворотах твердого тела. В известных авторам публикациях построение микрополярных теорий основывается на второй теореме Шаля, позволяющей рассматривать векторы спинорных и трансляционных перемещений как независимые векторные/псевдовекторные поля.

Важным классом задач в теориях волновой термомеханики микрополярных сред являются задачи распространения плоских гармонических волн в термоупругих средах. Этот класс задач подготавливает к идентификации полуизотропных микрополярных тел. Волновым задачам термомеханики микрополярных континуумов посвящена обширная литература [8–18]. Тем не менее следует отметить, что некоторые проблемы, существенные как для теории, так и для прикладных вопросов, до сих пор остаются не исследованными. В первую очередь это касается вопросов ориентации в пространстве (поляризаций) для плоских гармонических волн, что препятствует применению теории микрополярной термоупругости в экспериментах и не позволяет говорить о завершенности рассматриваемых исследований. Следует отдельно отметить, что предмет настоящей работы, связанный с распространением гармонических волн в ультрагемитропной среде, никогда ранее не исследовался. Изложение материала настоящей статьи в значительной степени использует терминологию, обозначения, методы и результаты, изложенные в предыдущих статьях [13–27].

2. Распространение плоских связанных гармонических волн в ультрагемитропном термоупругом микрополярном теле. Связанная система уравнений ультрагемитропной микрополярной термоупругости может быть записана векторной форме [28]:

$$\begin{cases} 2(1-\nu)(1-2\nu)^{-1}\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{u}-2\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\phi}+L(c_4+c_5)\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\phi}- \\ \qquad -2\underset{*}{\alpha}(1+\nu)(1-2\nu)^{-1}\boldsymbol{\nabla}\theta=\rho G^{-1}(\partial.)^2\mathbf{u}, \\ 2(1+c_3)\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\phi}+L^{-1}(c_4+c_5)\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{u}-2L^{-1}c_5\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\phi}+ \\ \qquad +2L^{-2}(2\boldsymbol{\phi}-\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{u})-2\underset{*}{\beta}\boldsymbol{\nabla}\theta=\rho\mathfrak{I}G^{-1}L^{-2}(\partial.)^2\boldsymbol{\phi}, \\ \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\theta-C\lambda^{-1}\partial.\theta-2G\lambda^{-1}\underset{*}{\alpha}\dfrac{1+\nu}{1-2\nu}\boldsymbol{\nabla}\cdot\partial.\mathbf{u}-2G\lambda^{-1}L^2\underset{*}{\beta}\boldsymbol{\nabla}\cdot\partial.\boldsymbol{\phi}=0, \end{cases} \tag{1}$$

где G — модуль сдвига; ν — коэффициент Пуассона; L — характерная микродлина; c_3, c_4, c_5, — не имеющие физической размерности псевдоскаляры; $\underset{*}{\alpha}$ —

коэффициент линейного теплового расширения; $\underset{*}{\beta}$ — коэффициент теплового искажения; C — теплоемкость на единицу объема (см. [19,20]). В (1) выполнена замена $C\theta_0^{-1} \longrightarrow C$, $\lambda\theta_0^{-1} \longrightarrow \lambda$.

Система дифференциальных уравнений в частных производных (1), записанная в терминах вектора трансляционных перемещений $\mathbf{u}$, вектора спинорных перемещений $\boldsymbol{\phi}$ и температурного инкремента θ служит основой для исследования сильных и слабых разрывов в микрополярной гемитропной среде, а также волновых процессов, которые в рассматриваемом случае характеризуются одновременным распространением прямых и зеркальных мод.

Рассмотрим задачу о распространении связанной гармонической плоской волны с частотой ω. В этом случае поля температурного инкремента, трансляционных и спинорных перемещений можно представить в форме

$$\mathbf{u} = \mathbf{A}\Phi, \quad \boldsymbol{\phi} = \mathbf{S}\Phi, \quad \theta = B\Phi, \quad \Phi = e^{i \arg \Phi}, \quad \arg \Phi = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t, \tag{2}$$

где $\mathbf{k}$ — волновой вектор; $\mathbf{r}$ — радиус вектор; ω — циклическая частота гармонической волны; $\mathbf{A}$, $\mathbf{S}$ — векторы комплексных амплитуд трансляционных и спинорных перемещений соответственно; B — (комплексная) амплитуда температурного инкремента; Φ — фазовый множитель; $\arg \Phi$ — фаза плоской волны. $\arg \Phi = \mathrm{const}$ — фазовые плоскости. При этом, для существования связанной термоупругой волны необходимо выполнение следующего условия

$$B \neq 0. \tag{3}$$

Отметим, что $\mathbf{k} = k\mathbf{s}$, где k — комплексное число, $\mathbf{s}$ — вещественный единичный вектор.

После подставновки (2) в систему уравнений (1), связывающую волновой вектор $\mathbf{k}$, циклическую частоту ω, векторы поляризации плоской волны $\mathbf{A}$, $\mathbf{S}$ и амплитуду B, получим:

$$\begin{cases} \begin{aligned} & \rho G^{-1}\omega^2\mathbf{A} - 2[1-\nu)(1-2\nu)^{-1}]\mathbf{k}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{A}) - 2i\mathbf{k}\times\mathbf{S} - \\ & \quad - L(c_4+c_5)\mathbf{k}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{S}) - 2\underset{*}{\alpha}(1+\nu)(1-2\nu)^{-1})i\mathbf{k}B = \mathbf{0}, \\ & [\rho\Im G^{-1}L^{-2}\omega^2 + 4L^{-2}]\mathbf{S} - 2(1+c_3)\mathbf{k}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{S}) - 2L^{-1}c_5 i\mathbf{k}\times\mathbf{S} - \\ & \quad - L^{-1}(c_4+c_5)\mathbf{k}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{A}) - 2L^{-2}i\mathbf{k}\times\mathbf{A} - 2\underset{*}{\beta}i\mathbf{k}B = \mathbf{0}, \\ & (C\lambda^{-1}i\omega - k^2)B - 2G\lambda^{-1}\underset{*}{\alpha}\frac{1+\nu}{1-2\nu}\omega(\mathbf{k}\cdot\mathbf{A}) - 2G\lambda^{-1}L^2\underset{*}{\beta}\omega(\mathbf{k}\cdot\mathbf{S}) = 0. \end{aligned} \end{cases} \tag{4}$$

Представим векторы комплексных амплитуд трансляционных ($\mathbf{A}$) и спинорных ($\mathbf{S}$) перемещений в виде суммы

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_\perp + A_\parallel\mathbf{k}, \qquad \mathbf{S} = \mathbf{S}_\perp + S_\parallel\mathbf{k}, \tag{5}$$

где векторы $\mathbf{A}_\perp$ и $\mathbf{S}_\perp$ расположены в плоскости перпендикулярной волновому вектору $\mathbf{k}$, т.е. в плоскости постоянной фазы $\arg \Phi = \mathrm{const}$.

Подставив представление (5) в систему (4), получим

$$
\begin{cases}
[\rho G^{-1}\omega^2](\mathbf{A}_\perp + A_\parallel \mathbf{k}) - 2(1-\nu)(1-2\nu)^{-1}A_\parallel k^2\mathbf{k} - \\
-2i\mathbf{k}\times\mathbf{S}_\perp - L(c_4+c_5)S_\parallel k^2\mathbf{k} - 2\underset{*}{\alpha}(1+\nu)(1-2\nu)^{-1}i\mathbf{k}B = \mathbf{0}, \\
[\rho\Im G^{-1}L^{-2}\omega^2 + 4L^{-2}](\mathbf{S}_\perp + S_\parallel\mathbf{k}) - 2(1+c_3)S_\parallel k^2\mathbf{k} - 2L^{-1}c_5 i\mathbf{k}\times\mathbf{S}_\perp - \\
-L^{-1}(c_4+c_5)A_\parallel k^2\mathbf{k} - 2L^{-2}i\mathbf{k}\times\mathbf{A}_\perp - 2\underset{*}{\beta}i\mathbf{k}B = \mathbf{0}, \\
(C\lambda^{-1}i\omega - k^2)B - 2G\lambda^{-1}\underset{*}{\alpha}\dfrac{1+\nu}{1-2\nu}\omega A_\parallel k^2 - 2G\lambda^{-1}L^2\underset{*}{\beta}\omega S_\parallel k^2 = 0.
\end{cases} \tag{6}
$$

Нетрудно заметить, что система (6) распадается на две независимые системы уравнений, отдельно для продольных и поперечных волн.

3. Волновые числа связанной продольной плоской гармонической волны. Проекции уравнений системы (4) на волновой вектор $\mathbf{k}$ представляет собой замкнутую систему трех линейных однородных уравнений:

$$
\begin{cases}
\Big(\omega^2 - \dfrac{2G(1-\nu)}{\rho(1-2\nu)}k^2\Big)A_\parallel - (c_4+c_5)\rho^{-1}GLk^2S_\parallel - 2\underset{*}{\alpha}\dfrac{G(1+\nu)}{\rho(1-2\nu)}iB = 0, \\
[\omega^2 + 4(\rho\Im)^{-1}G - 2(1+c_3)(\rho\Im)^{-1}GL^2k^2]S_\parallel - \\
-(c_4+c_5)(\rho\Im)^{-1}GLk^2A_\parallel - 2\underset{*}{\beta}(\rho\Im)^{-1}GL^2iB = 0, \\
(C\lambda^{-1}i\omega - k^2)B - 2G\lambda^{-1}\underset{*}{\alpha}\dfrac{1+\nu}{1-2\nu}\omega A_\parallel k^2 - 2G\lambda^{-1}L^2\underset{*}{\beta}\omega S_\parallel k^2 = 0.
\end{cases} \tag{7}
$$

Для существования нетривиального решения алгебраической системы (7) необходимо и достаточно, чтобы ее определитель был равен нулю, т.е.

$$
\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} \omega^2 - [V_\parallel]^2k^2 & -a_1k^2 & -ia_2 \\ -a_1\Im^{-1}k^2 & \omega^2 + \Omega - (V_\parallel^{\mu\mu})^2k^2 & -ia_3 \\ -a_4\omega k^2 & -a_5\omega k^2 & ia_6\omega - k^2 \end{vmatrix} = 0, \tag{8}
$$

где

$$
\begin{gathered}
[V_\parallel]^2 = \frac{2G(1-\nu)}{\rho(1-2\nu)}, \quad [V_\parallel^{\mu\mu}]^2 = \frac{2GL^2(1+c_3)}{\rho\Im}, \quad a_2 = 2\underset{*}{\alpha}\frac{G(1+\nu)}{\rho(1-2\nu)}, \\
\rho\Im\Omega = 4G, \quad \rho a_1 = (c_4+c_5)GL, \quad \rho\Im a_3 = 2\underset{*}{\beta}GL^2, \\
\lambda a_4 = 2G\underset{*}{\alpha}\frac{1+\nu}{1-2\nu}, \quad \lambda a_5 = 2GL^2\underset{*}{\beta}, \quad \lambda a_6 = C.
\end{gathered} \tag{9}
$$

Отметим, что уравнение (8) совпадает по форме с аналогичным для полуизотропного термоупругого тела, а матрица $\mathbf{A}$ качественно совпадает с аналогичной для гемитропного тела [29, 30]. Поэтому корни уравнения будем искать аналогичным способом.

Алгебраическое уравнение (8) представляет собой бикубическое уравнение относительно, подлежащего определению, волнового числа k:

$$Q_6k^6 + Q_4k^4 + Q_2k^2 + Q_0 = 0, \tag{10}$$

где использованы следующие обозначения

$$\begin{aligned}
Q_6 &= a_1^2\mathfrak{I} - [V_\parallel V_\parallel^{\mu\mu}]^2, \qquad Q_0 = ia_6\omega^3(\omega^2+\Omega),\\
Q_4 &= \Big([V_\parallel]^2 + [V_\parallel^{\mu\mu}]^2\Big)\omega^2 + [V_\parallel]^2\Omega + i[a_1(a_3a_4 + a_2a_5\mathfrak{I}) -\\
&\quad - (a_6Q_6 + a_3a_5[V_\parallel]^2 + a_2a_4[V_\parallel^{\mu\mu}]^2)]\omega,\\
Q_2 &= -\omega^2\Omega - \omega^4 + i[a_2a_4 + a_3a_5 - a_6([V_\parallel]^2 + [V_\parallel^{\mu\mu}]^2)]\omega^3 -\\
&\quad - i(a_6[V_\parallel]^2 - a_2a_4)\omega\Omega.
\end{aligned} \tag{11}$$

Уравнение (10) не имеет вещественных корней, т.е. $\operatorname{Im} k \neq 0$, иначе продольная волна оказалась бы не затухающей, что для связанных термоупругих волн невозможно. Указанное обстоятельство связано с неэлиминирующейся термической составляющей в связанной термоупругой волне.

Корни уравнения (10) будут иметь вид

$$\begin{aligned}
&k_{1,2,3} = \sqrt{Y_{1,2,3} - \frac{Q_4}{3Q_6}},\\
&k_4 = -k_1, \qquad k_5 = -k_2, \qquad k_6 = -k_3.
\end{aligned} \tag{12}$$

где

$$Y_1 = a + b, \quad Y_{2,3} = -\frac{1}{2}(a+b) \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}(a-b), \tag{13}$$

$$a = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\mathfrak{D}_1}}, \quad b = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\mathfrak{D}_1}}, \quad \mathfrak{D}_1 = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}.$$

$$p = \frac{2Q_6Q_2 - Q_4^2}{Q_6^2}, \qquad q = \frac{2Q_4^3 - 9Q_6Q_4Q_2 + 27Q_6^2Q_0}{27Q_6^3}. \tag{14}$$

Достаточно выбрать одно из значений квадратного корня $\sqrt{\mathfrak{D}_1}$, а для каждого из трех значений величины a необходимо подбирать такое значение b, для которого выполняется условие

$$ab = -p/3.$$

Значения волновых чисел (12), полученные при исследовании бикубического (10) уравнения, можно впоследствии использовать при отделении однозначных ветвей многозначных квадратных и кубических радикалов на комплексной плоскости $k = \mathrm{Re}k + i\mathrm{Im}k$ ($\operatorname{Re} k > 0$).

4. Волновые числа холодной атермической поперечной плоской гармонической волны. Рассмотрим проекции системы линейных уравнений (6) ортогональные направления в фазовой плоскости $\arg\Phi = \text{const}$. Введем в рассмотрение два единичных взаимно ортогональных вектора $\boldsymbol{\imath}$ и $\boldsymbol{\jmath}$, расположенных в фазовой плоскости. Тогда векторы $\mathbf{A}_\perp$ и $\mathbf{S}_\perp$ можно представить в форме

$$\mathbf{A}_\perp = \underset{1}{A}_\perp\boldsymbol{\imath} + \underset{2}{A}_\perp\boldsymbol{\jmath}, \qquad \mathbf{S}_\perp = \underset{1}{S}_\perp\boldsymbol{\imath} + \underset{2}{S}_\perp\boldsymbol{\jmath}. \tag{15}$$

Проекции системы линейных уравнений (6) на орты $\boldsymbol{\imath}$ и $\boldsymbol{\jmath}$ примут вид

$$\begin{aligned} \omega^2\underset{1}{A}_\perp + 2i\rho^{-1}Gk\underset{2}{S}_\perp &= 0,\\ \omega^2\underset{2}{A}_\perp - 2i\rho^{-1}Gk\underset{1}{S}_\perp &= 0,\\ [\Im\omega^2 + 4\rho^{-1}G]\underset{1}{S}_\perp + 2iLc_5\rho^{-1}Gk\underset{2}{S}_\perp + 2i\rho^{-1}Gk\underset{2}{A}_\perp &= 0,\\ [\Im\omega^2 + 4\rho^{-1}G]\underset{2}{S}_\perp - 2iLc_5\rho^{-1}Gk\underset{1}{S}_\perp - 2i\rho^{-1}Gk\underset{1}{A}_\perp &= 0. \end{aligned} \tag{16}$$

Для существования нетривиального решения системы линейных однородных уравнений (16) необходимо и достаточно, чтобы следующий определитель был равен нулю, т.е.

$$\det(\mathbf{P}) = \begin{vmatrix} \omega^2 & 0 & 0 & -ia_8k \\ 0 & \omega^2 & ia_8k & 0 \\ 0 & -ia_8k & \omega^2\Im + 2a_8 & ia_9k \\ ia_8k & 0 & -ia_9k & \omega^2\Im + 2a_8 \end{vmatrix} = 0, \tag{17}$$

где введены обозначения:

$$a_8\rho = 2G, \qquad a_9\rho\Im = 2Lc_5G. \tag{18}$$

Отметим, что в отличие от аналогичного уравнения для полуизотропного термоупругого тела [29, 30] волновые числа k не присутствуют в элементах главной диагонали $\mathbf{P}$. Кроме того, видим, что характерные определяющие числа $[V_\perp^\mu]^2 = G(1+c_1)\rho^{-1}$ и $[V_\perp^{\mu\mu}]^2 = G(1+c_2)(\rho\Im)^{-1}$ равны нулю для ультрагемитропного тела.

Волновые числа поперечных волн вещественны $\operatorname{Im} k = 0$, что физически очевидно для атермических волн, т.е. связано с холодностью, “атермичностью” поперечной волны и с отсутствуем потери энергии при ее распространении и элиминированием термической составляющей. В этом случае транспонированная матрица (17) комплексно–сопряжена исходной, т.е. является Эрмитовой.

Алгебраическое уравнение (17) представляет собой биквадратное уравнение относительно квадрата волнового числа k:

$$a_8^4k^4 - \omega^2(4a_8^3 + (a_9^2 + 2a_8^2\Im)\omega^2))k^2 + \omega^4(2a_8 + \Im\omega^2)^2 = 0 \tag{19}$$

или

$$(a_8^2k^2 - a_9k\omega^2 - \omega^2(2a_8 + \Im\omega^2))(a_8^2k^2 + a_9k\omega^2 - \omega^2(2a_8 + \Im\omega^2)) = 0 \tag{20}$$

Корни уравнения вычисляются согласно соотношениям:

$$2a_8^2 k_{1,2,3,4} = \pm a_9 \omega^2 \pm \omega \sqrt{8a_8^3 + \omega^2 (a_9^2 + 4a_8^2 \Im)}, \tag{21}$$

где знаки $\pm$ не согласованны. В силу того, что неравенство

$$\omega^2 (a_9^2 + 4a_8^2 \Im) \geq -8a_8^3, \tag{22}$$

справедливо при любых не отрицательных определяющих постоянных, корни (21) будут вещественными.

Среди корней (21) нормальным волновым числом всегда будет являться

$$2a_8^2 k = a_9 \omega^2 + \omega \sqrt{8a_8^3 + \omega^2 (a_9^2 + 4a_8^2 \Im)}, \tag{23}$$

а корни

$$\begin{gathered} 2a_8^2 k_1 = -a_9 \omega^2 + \omega \sqrt{8a_8^3 + \omega^2 (a_9^2 + 4a_8^2 \Im)}, \\ 2a_8^2 k_2 = a_9 \omega^2 - \omega \sqrt{8a_8^3 + \omega^2 (a_9^2 + 4a_8^2 \Im)}, \end{gathered} \tag{24}$$

только при определенных значениях определяющих постоянных.

5. Заключение. В настоящей работе рассматриваются вопросы распространения плоских гармонических связанных волн температурного инкремента, трансляционных и спинорных перемещений в ультрагемитропном термоупругом теле.

(1) Получена связанная система дифференциальных уравнений с частными производными, записанная в терминах вектора трансляционных перемещений, вектора спинорных перемещений и температурного инкремента для микрополярного ультрагемитропного тела.

(2) Указаны алгебраические уравнения для волновых чисел продольных (бикубическое уравнение) и поперечных связанных волн (биквадратное уравнение).

(3) Волновые числа продольных гармонических волн оказываются комплексными, что соответствует связанности комплексных амплитуд температурного инкремента, трансляционных и спинорных перемещений.

(4) Отмечены характерные отличия дисперсионных соотношений от аналогичных, полученных ранее для полуизотропного тела.

(5) Вычислены волновые числа поперечных гармонических волн, которые оказываются вещественными. Отделены нормальные волновые числа поперечных волн.

ДОПОЛНИТЕЛЬНО

Вклад авторов. Все авторы подтверждают соответствие своего авторства международным критериям ICMJE (все авторы внесли существенный вклад в разработку концепции, проведение исследования и подготовку статьи, прочли и одобрили финальную версию перед публикацией).
Конфликт интересов. Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.
Источник финансирования. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 23-21-00262).

ADDITIONAL INFORMATION

Authors' contribution. All authors confirm that their authorship meets the international ICMJE criteria (all authors have made a significant contribution to the development of the concept, research and preparation of the article, read and approved the final version before publication).
Competing interests. The authors declare that they have no competing interests.
Funding. The study was carried out with the financial support of the Russian Science Foundation (project No. 23-21-00262).

ЛИТЕРАТУРА

[1] Cosserat Eugène Maurice Pierre, Cosserat François. Théorie des corps déformables. Paris : A. Hermann et fils, 1909. VI+226 p.
[2] Aero E. L., Kuvshinskii E. V. Fundamental equations of the theory of elastic media with rotationally interacting particles // Soviet Physics-Solid State. 1961. Vol. 2, no. 7. P. 1272–1281.
[3] Pal'mov V. A. Fundamental equations of the theory of asymmetric elasticity // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 1964. Vol. 28, no. 3. P. 496–505.
[4] Neuber H. Über Probleme der Spannungskonzentration im Cosserat-Körper // Acta Mechanica. 1966. Vol. 2. P. 48–69. DOI: 10.1007/BF01176729.
[5] G unther W. Zur Statik und Kinematik des Cosseratschen Kontinuums // Abh. Braunschweig. Wiss. Ges. 1958. Vol. 10. P. 195–213.
[6] Neuber H. On the general solution of linear-elastic problems in isotropic and anisotropic Cosserat continua // Applied Mechanics: Proceedings of the Eleventh International Congress of Applied Mechanics Munich (Germany) 1964 / Springer. 1966. P. 153–158. DOI: 10.1007/978-3-662-29364-5_16.
[7] Neuber H. On the Effect of Stress Concentration in Cosserat Continua // Mechanics of Generalized Continua / Ed. by Ekkehart Kröner. Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 1968. P. 109–113.
[8] Smith A. C. Waves in micropolar elastic solids // Int. J. Eng. Sci. 1967. Vol. 5. P. 741–746. DOI: 10.1016/0020-7225(67)90019-5.
[9] Willson A. J. The micropolar elastic vibrations of a circular cylinder // International Journal of Engineering Science. 1972. Vol. 10, no. 1. P. 17–22. DOI: 10.1016/0020-7225(72)90071-7.
[10] Nowacki W. Theory of Asymmetric Elasticity. Oxford, New York, Toronto, Sydney, Paris, Frankfurt : Pergamon Press, 1986. viii+383 p.
[11] Achenbach J. Wave propagation in elastic solids. Amsterdam, London, New York : American Elsevier, 2012. 335 c.
[12] Maugin G. A. Acceleration waves in simple and linear viscoelastic micropolar materials // International Journal of Engineering Science. 1974. Vol. 12, no. 2. P. 143–157. DOI: 10.1016/0020-7225(74)90013-5.

[13] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Термические и атермические плоские гармонические волны в ацентрическом изотропном теле // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния. 2023. № 2(56). С. 99–107. DOI: 10.37972/chgpu.2023.56.2.010.

[14] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Прямые, инверсные и зеркальные волновые моды связанных волн перемещений и микровращений в гемитропных микрополярных средах // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния. 2021. № 2(48). С. 115–127. DOI: 10.37972/chgpu.2021.48.2.014.

[15] Murashkin E. V., Stadnik N. E. Compatibility conditions in continua with microstrusture // MATEC Web of Conferences. 2017. Vol. 95. P. 12001. DOI: 10.1051/matecconf/20179512001.

[16] Murashkin E. V., Radayev Y. N. On a classification of weak discontinuities in micropolar thermoelasticity // Materials Physics and Mechanics. 2015. Vol. 23, no. 1. P. 10–13. DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-1-79-89.

[17] Kovalev V. A., Murashkin E. V., Radayev Y. N. On weak discontinuities and jump equations on wave surfaces in micropolar thermoelastic continua // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2015. Vol. 15, no. 1. P. 79–89. DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-1-79-89.

[18] Ковалев В. А., Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Математическая теория связанных плоских гармонических термоупругих волн в микрополярных континуумах первого типа // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Математика. Механика. Информатика. 2014. Vol. 14, no. 1. P. 77–87. DOI: 10.18500/1816-9791-2014-14-1-77-87.

[19] Радаев Ю. Н. Правило множителей в ковариантных формулировках микрополярных теорий механики континуума // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2018. Т. 22. С. 504–517. DOI: 10.14498/vsgtu1635.

[20] Радаев Ю.Н., Мурашкин Е.В. Псевдотензорная формулировка механики гемитропных микрополярных сред // Проблемы прочности и пластичности. 2020. Vol. 82, no. 4. P. 399–412. DOI: 10.32326/1814-9146-2020-82-4-399-412.

[21] Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On a micropolar theory of growing solids // Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences. 2020. Vol. 24, no. 3. P. 424–444. DOI: 10.14498/vsgtu1792.

[22] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. К теории линейных гемитропных микрополярных сред // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. ИЯ Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2020. № 4. С. 16–24. DOI: 10.37972/chgpu.2020.89.81.031.

[23] Murashkin E. V., Radaev Y. N. Coupled Thermoelasticity of Hemitropic Media. Pseudotensor Formulation // Mechanics of Solids. 2023. Vol. 58, no. 3. P. 802–813. DOI: 10.3103/s0025654423700127.

[24] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. К поливариантности основных уравнений связанной термоупругости микрополярного тела // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния. 2023. № 3(57). С. 112–128. DOI: 10.37972/chgpu.2023.57.3.010.

[25] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Мультивесовая термомеханика гемитропных микрополярных тел // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния. 2023. № 4(58). С. 86–120. DOI: 10.37972/chgpu.2023.58.4.010.

[26] Murashkin E. V., Radayev Y. N. On Algebraic Triple Weights Formulation of Micropolar Thermoelasticity // Mechanics of Solids. 2024. Vol. 59, no. 1. P. 555–580. DOI: 10.1134/s0025654424700274.

[27] Murashkin E. V., Radayev Y. N. Heat transfer in anisotropic micropolar solids // Mechanics of Solids. 2023. Vol. 58, no. 9. P. 3111–3119. DOI: 10.3103/S0025654423700255.
[28] Murashkin E. V., Radayev Y. N. Coupled Harmonic Thermoelastic Waves in an Ultrahemitropic Micropolar Medium // Mechanics of Solids. 2024. Vol. 59, no. 5. P. ??
[29] Murashkin E. V., Radayev Y. N. Волновые числа гармонических плоских волн трансляционных и спинорных перемещений в полуизотропной термоупругой среде // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2024. Т. 28, № 3. С. 445–461. DOI: 10.14498/vsgtu2087.
[30] Murashkin E. V., Radayev Y. N. Coupled Harmonic Plane Waves in a Semi-Isotropic Thermoelastic Medium // Mechanics of Solids. 2024. Vol. 59, no. 4. P. 2387–2394. DOI: 10.1134/S0025654424700316.

REFERENCES

[1] Cosserat Eugène Maurice Pierre, Cosserat François. Théorie des corps déformables. Paris : A. Hermann et fils, 1909. VI+226 p.

[2] Aero E. L., Kuvshinskii E. V. Fundamental equations of the theory of elastic media with rotationally interacting particles // Soviet Physics-Solid State. 1961. Vol. 2, no. 7. P. 1272–1281.

[3] Pal'mov V. A. Fundamental equations of the theory of asymmetric elasticity // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 1964. Vol. 28, no. 3. P. 496–505.

[4] G unther W. Zur Statik und Kinematik des Cosseratschen Kontinuums // Abh. Braunschweig. Wiss. Ges. 1958. Vol. 10. P. 195–213.

[5] Neuber H. Über Probleme der Spannungskonzentration im Cosserat-Körper // Acta Mechanica. 1966. Vol. 2. P. 48–69. DOI: 10.1007/BF01176729.

[6] Neuber H. On the general solution of linear-elastic problems in isotropic and anisotropic Cosserat continua // Applied Mechanics: Proceedings of the Eleventh International Congress of Applied Mechanics Munich (Germany) 1964 / Springer. 1966. P. 153–158. DOI: 10.1007/978-3-662-29364-5_16.

[7] Neuber H. On the Effect of Stress Concentration in Cosserat Continua // Mechanics of Generalized Continua / Ed. by Ekkehart Kröner. Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 1968. P. 109–113.

[8] Smith A. C. Waves in micropolar elastic solids // Int. J. Eng. Sci. 1967. Vol. 5. P. 741–746. DOI: 10.1016/0020-7225(67)90019-5.

[9] Willson A. J. The micropolar elastic vibrations of a circular cylinder // International Journal of Engineering Science. 1972. Vol. 10, no. 1. P. 17–22. DOI: 10.1016/0020-7225(72)90071-7.

[10] Nowacki W. Theory of Asymmetric Elasticity. Oxford, New York, Toronto, Sydney, Paris, Frankfurt : Pergamon Press, 1986. viii+383 p.

[11] Achenbach J. Wave propagation in elastic solids. Amsterdam, London, New York : American Elsevier, 2012. 335 с.

[12] Maugin G. A. Acceleration waves in simple and linear viscoelastic micropolar materials // International Journal of Engineering Science. 1974. Vol. 12, no. 2. P. 143–157. DOI: 10.1016/0020-7225(74)90013-5.

[13] Murashkin E. V., Radayev Yu. N. Direct, inverse and mirror wave modes of coupled waves of displacements and microrotations in hemitropic micropolar media // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. IYa Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya. 2021. no. 2(48). P. 115–127. DOI: 10.37972/chgpu.2021.48.2.014.

[14] Murashkin E. V., Radayev Yu. N. Thermal and athermal plane harmonic waves in an acentric isotropic solid // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. IYa Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya. 2023. no. 2(56). P. 99–107. DOI: 10.37972/chgpu.2023.56.2.010.

[15] Murashkin E. V., Stadnik N. E. Compatibility conditions in continua with microstrusture // MATEC Web of Conferences. 2017. Vol. 95. P. 12001. DOI: 10.1051/matecconf/20179512001.

[16] Murashkin E. V., Radayev Y. N. On a classification of weak discontinuities in micropolar thermoelasticity // Materials Physics and Mechanics. 2015. Vol. 23, no. 1. P. 10–13. DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-1-79-89.

[17] Kovalev V. A., Murashkin E. V., Radaev Yu. N. Mathematical theory of coupled plane harmonic thermoelastic waves in micropolar continua of the first type // Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya Matematika. Mekhanika. Informatika. 2014. Vol. 14, no. 1. P. 77–87. DOI: 10.18500/1816-9791-2014-14-1-77-87.

[18] Kovalev V. A., Murashkin E. V., Radayev Y. N. On weak discontinuities and jump equations on wave surfaces in micropolar thermoelastic continua // Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya Matematika. Mekhanika. Informatika. 2015. Vol. 15, no. 1. P. 79–89. DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-1-79-89.
[19] Radaev Y. N. The multiplier rule in covariant formulations of micropolar theories of continuum mechanics // Vestn. Sam. gos. tekhn. un-ta. Ser. Fiz.-mat. nauki. 2018. Vol. 22. P. 504–517. DOI: 10.14498/vsgtu1635.
[20] Radaev Y. N., Murashkin E. V. Pseudotensor formulation of the mechanics of hemitropic micropolar media // Problems of strength and ductility. 2020. Vol. 82, no. 4. P. 399–412. DOI: 10.32326/1814-9146-2020-82-4-399-412.
[21] Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On a micropolar theory of growing solids // Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences. 2020. Vol. 24, no. 3. P. 424–444. DOI: 10.14498/vsgtu1792.
[22] Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On theory of linear hemitropic micropolar media // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. IYa Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya. 2020. no. 4. P. 16–24. DOI: 10.37972/chgpu.2020.89.81.031.
[23] Murashkin E. V., Radaev Y. N. Coupled Thermoelasticity of Hemitropic Media. Pseudotensor Formulation // Mechanics of Solids. 2023. Vol. 58, no. 3. P. 802–813. DOI: 10.3103/s0025654423700127.
[24] Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On the polyvariance of the basic equations of coupled thermoelasticity of a micropolar solid // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. IYa Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya. 2023. no. 3(57). P. 112–128. DOI: 10.37972/chgpu.2023.57.3.010.
[25] Murashkin E. V., Radayev Yu. N. Multiweight thermomechanics of hemitropic micropolar solids // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. IYa Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya. 2023. no. 4(58). P. 86–120. DOI: 10.37972/chgpu.2023.58.4.010.
[26] Murashkin E. V., Radayev Y. N. Heat transfer in anisotropic micropolar solids // Mechanics of Solids. 2023. Vol. 58, no. 9. P. 3111–3119. DOI: 10.3103/S0025654423700255.
[27] Murashkin E. V., Radayev Y. N. On Algebraic Triple Weights Formulation of Micropolar Thermoelasticity // Mechanics of Solids. 2024. Vol. 59, no. 1. P. 555–580. DOI: 10.1134/s0025654424700274.
[28] Murashkin E. V., Radayev Y. N. Coupled Harmonic Thermoelastic Waves in an Ultrahemitropic Micropolar Medium // Mechanics of Solids. 2024. Vol. 59, no. 5. P. ??
[29] Murashkin E. V., Radayev Y. N. Coupled Harmonic Plane Waves in a Semi-Isotropic Thermoelastic Medium // Mechanics of Solids. 2024. Vol. 59, no. 4. P. 2387–2394. DOI: 10.1134/S0025654424700316.
[30] Murashkin E. V., Radayev Y. N. Волновые числа гармонических плоских волн трансляционных и спинорных перемещений в полуизотропной термоупругой среде // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2024. Т. 28, № 3. С. 445–461. DOI: 10.14498/vsgtu2087.