

Р. И. Непершин

ПОПЕРЕЧНОЕ СДАВЛИВАНИЕ ЦИЛИНДРА ШТАМПОМ С КРИВОЛИНЕЙНОЙ ГЛАДКОЙ ГРАНИЦЕЙ

Московский государственный технологический университет “СТАНКИН”,
Москва, Россия

Аннотация. Приведено численное моделирование поперечного сдавливания жесткопластического цилиндра штампом с гладкой криволинейной границей. Рассматривается плоское пластическое течение при вогнутовыпуклой границе штампа с непрерывным полем скоростей на конечной стадии сдавливания. Заполнение полости штампа на вогнутом участке границы происходит без скольжения по границе контакта и моделируется линиями скольжения по Прандтлю с разрывом скоростей по жесткопластическим границам. При скольжении по выпуклой границе происходит уменьшение жесткой области на вогнутой границе контакта, переходящее в пластическое деформирование по всему сечению на конечной стадии сдавливания цилиндра. Моделирование представляет интерес для оценки предельной нагрузки при поперечном сжатии цилиндра штампами с криволинейной границей и штамповке деталей с криволинейным профилем поперечной осадкой цилиндрической заготовки.

Ключевые слова: поперечное сдавливание цилиндра, гладкий штамп, криволинейная граница, идеальная пластичность, плоская деформация, линии скольжения, скорости течения, контактное давление, предельная нагрузка, штамповка деталей.

Непершин Ростислав Иванович, доктор технических наук, профессор; e-mail: nepershin_ri@rambler.ru; AuthorID: 109974

для цитирования: Непершин Р. И. Поперечное сдавливание цилиндра штампом с криволинейной гладкой границей // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2024. № 3(61). С. 43–59. DOI: 10.37972/chgpu.2024.61.3.005 EDN: NDFLCK

Статья опубликована на условиях лицензии *Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)*.

R. I. Nepershin

CYLINDER TRANSVERSE COMPRESSION BY THE DIES WITH CURVILINEAR SMOOTH BOUNDARY

Moscow State Technological University STANKIN, Moscow, Russia

Abstract. Computer simulation of the rigid-plastic cylinder transverse compression by the dies with smooth boundaries is presented using plane strain ideal plastic theory. Final stage of cylinder plastic deformation by the dies with smooth concave-convex boundary and continuous velocity field is considered. Filling of the die cavity on the concave boundary part takes place without slip on this boundary at the main part of cylinder plastic deformation, and it is simulated using Prandtl's slip lines and velocity field with velocity discontinues on the rigid-plastic boundaries. But with approach to the final deformation stage slip on the convex die boundary begins, with continuous slip lines and velocity fields and decrease of the rigid region to zero at the final stage. The computer simulation can be used for the limit loads estimation in the case of cylinder transverse plastic compression by the dies with curvilinear smooth boundary, and forging of the parts with curved profiles on technological pressure equipment.

Keywords: cylinder transverse compression, curved smooth dies, ideal plasticity, plane strain, slip lines, velocities, contact pressure, contact friction, limit load, forging by curved dies.

Rostislav I. Nepershin, Doctor of Technical Sciences, Professor; e-mail: nepershin_ri@rambler.ru; AuthorID: 109974

to cite this article: *Nepershin R. I. Cylinder transverse compression by the dies with curvilinear smooth boundary // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2024. No 3(61). p. 43–59. DOI: 10.37972/chgpu.2024.61.3.005 EDN: NDFLCK*

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение. В технологии массового и крупносерийного производства деталей машин применяется штамповка поковок сложной формы на высокопроизводительных кривошипных прессах пластическим сдавливанием заготовки в штампах [1, 2]. При штамповке поковок сложной формы используют предварительные переходы формообразования начальной формы заготовки из стандартного проката в ручьях штампа или в ковочных вальцах с целью обеспечения гарантированного заполнения полости штампа в чистовом ручье. При этом в условиях массового производства важной проблемой является повышение стойкости штампов, ограниченной усталостной прочностью и износом при высоких циклических нагрузках. Моделирование нестационарных процессов пластического деформирования в штампах на основе математической теории идеальной пластичности [3] решением полной системы уравнений для напряжений и скоростей с изменением жестких и пластических зон представляет практический интерес. В работах [4, 5] приведено моделирование нестационарных процессов плоского и осесимметричного пластического течения при сдавливании жесткопластического цилиндра и шара плоскими плитами с изменением пластического течения по Прандтлю от начального выдавливания металла на поверхность цилиндра или сферы до образования тонкой полосы или тонкого диска в конце процесса деформирования. В настоящей работе рассматривается плоское нестационарное пластическое течение при сдавливании жесткопластического цилиндра по нормали к его оси в штампе с гладкой вогнутовыпуклой границей, при которой поле скоростей на конечной стадии деформирования непрерывно, контактное давление и неоднородность пластического течения снижаются. Вычислены криволинейные профили штампов с двумя плоскостями симметрии, зависящие от угла наклона касательной в точке перегиба, с расчетами линий скольжения с непрерывными полями скоростей на конечной стадии сдавливания, распределения контактного давления и силы деформирования при поперечном сдавливании цилиндра. Моделирование нестационарного процесса поперечного сдавливания цилиндра в штампе с гладкой вогнутовыпуклой формой границы показывает, что заполнение полости штампа до точки перегиба при переходе от вогнутой границы к выпуклой происходит без скольжения по границе контакта с пластическим течением по линиям скольжения Прандтля и разрывом скоростей вдоль жесткопластической границы, по аналогии с процессом сдавливания цилиндра плоскими штампами [4]. На конечной стадии сдавливания цилиндра пластическое течение начинается при скольжении по выпуклой границе штампа, жесткая область с вогнутой границей контакта уменьшается до нуля с непрерывным пластическим течением по всему сечению.

1. Гладкая граница штампа и линии скольжения. Гладкую вогнутовыпуклую границу штампа с непрерывными полями напряжений и скоростей перемещений при сдавливании жесткопластического цилиндра при плоской деформации вычисляем с использованием дифференциальных уравнений линий скольжения ξ и η

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \varphi \quad \text{для } \xi, \quad \frac{dy}{dx} = -\operatorname{ctg} \varphi \quad \text{для } \eta \quad (1)$$

с уравнениями Генки для среднего напряжения σ , угла наклона касательной φ на ξ , и уравнениями Гейгингер для скоростей V_ξ, V_η на линиях скольжения ξ и η

$$d\sigma - d\varphi = 0 \quad \text{на } \xi, \quad d\sigma + d\varphi = 0 \quad \text{на } \eta \quad (2)$$

$$dV_\xi - V_\eta d\varphi = 0 \quad \text{на } \xi, \quad dV_\eta + V_\xi d\varphi = 0 \quad \text{на } \eta \quad (3)$$

где напряжения принимаем безразмерными, отнесенными к удвоенной пластической постоянной $2k$ материала цилиндра. Напряжения и скорости в декартовых координатах x, y , связаны с $\sigma, \varphi, V_\xi, V_\eta$ соотношениями

$$\sigma_x = \sigma + \frac{1}{2} \sin 2\varphi, \quad \sigma_y = \sigma - \frac{1}{2} \sin 2\varphi, \quad \tau_{xy} = \frac{1}{2} \cos 2\varphi, \quad (4)$$

$$V_x = V_\xi \cos \varphi - V_\eta \sin \varphi, \quad V_y = V_\xi \sin \varphi + V_\eta \cos \varphi. \quad (5)$$

Соотношения (5) используем для отображения сетки линий скольжения на плоскость годографа скоростей V_x, V_y и для определения граничных условий для скоростей V_ξ, V_η на границе штампа и на линиях симметрии пластической области. Гладкая граница штампа при сдавливании цилиндра совпадает с главным напряжением σ_1 , и линии скольжения наклонены к касательной к этой границе под углами $\pm\pi/4$.

Линии скольжения при сдавливании цилиндра штампом с гладкой вогнуто-выпуклой границей и двумя плоскостями симметрии показаны на рис. 1 в первом квадранте плоскости поперечного сечения x, y . Начало координат O находится в центре свободной границы OA на линии симметрии x . За единицу длины принимаем длину свободной границы OA . Границу штампа ACD с углом наклона касательной - θ_C в точке перегиба C находим интегрированием уравнения $dy/dx = -\theta$ при $0 \leq \theta \leq \theta_C$ при вычислении линий скольжения по следующему алгоритму.

В области AOB со свободной границей OA при перемещении границы штампа по направлению оси - y имеет место однородное пластическое сжатие при $\sigma_1 = 0, \sigma_2 = -1, \sigma = -0.5, \varphi = -\pi/4$, ограниченное прямой линией скольжения $\eta(AB)$, на которой задаем N точек с шагом $\Delta x = \Delta y = -1/N$. На гладкой выпуклой границе AC прямые линии скольжения η наклонены к касательной под углом $\pi/4$ и $\varphi = -(\pi/4 + \theta)$. Сетку линий скольжения вычисляем при постоянном приращении угла поворота касательной $\Delta\varphi$ к криволинейным линиям скольжения ξ , и вследствие ортогональности ξ и η линий скольжения на границе AC имеем $\Delta\varphi = \Delta\theta = \theta_C/N$. В первой точке границы AC около точки A , в которой $\theta = 0$, из соотношения (2) на линии скольжения ξ находим $\varphi = -(\pi/4 + \Delta\theta)$ и $\sigma = -(0.5 + \Delta\varphi)$. Координаты точки границы AC находим

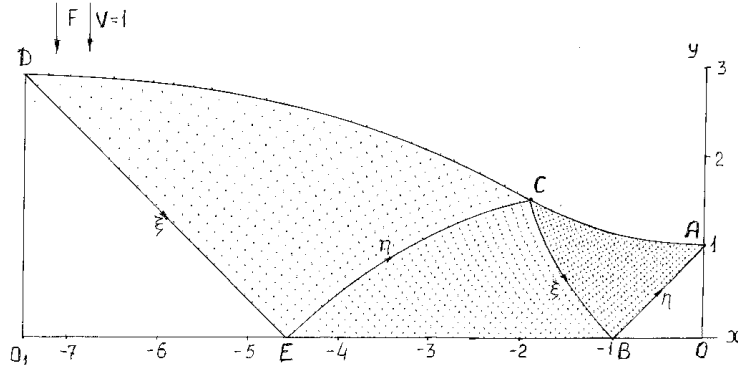


Рис. 1. Линии скольжения и гладкая граница штампа с углом наклона касательной $\theta_c = 0.5236$ в точке перегиба C на конечной стадии сдвливания цилиндра.

на пересечении прямых при конечно-разностной аппроксимации дифференциальных уравнений границы AC и линии скольжения ξ около точки A

$$y = y_A - (x - x_A)tg\tilde{\theta}, \quad \tilde{\theta} = 0.5(\theta_A + \theta), \quad (6)$$

$$y = y_1 + (x - x_1)tg\tilde{\varphi}, \quad \tilde{\varphi} = 0.5(\varphi + \varphi_1), \quad \varphi = -(\pi/4 + \theta), \quad (7)$$

где нижним индексом 1 обозначены координаты и угол φ в точке пересечения линий скольжения η и ξ вблизи границы AC . Затем от найденной точки на границе AC и начальной η линии скольжения AB вычисляем линию скольжения η , проходящую через точку на границе AC , до первой точки ξ линии скольжения BC около точки B циклической процедурой расчета регулярных точек линий скольжения при плоской деформации [6]. От найденной точки на границе AC и проходящей через нее линии скольжения η из уравнений (6) и (7) находим координаты и значения φ и $\sigma = -(0.5 + \theta)$ на границе AC и линии скольжения в области ABC , используя известные данные с индексом A в уравнениях (6) в найденных точках границы AC .

Линии скольжения в области BCE находим решением задачи смешанного типа по известным значениям σ и φ на ξ линии скольжения BC с граничным условием $\varphi = -\pi/4$, $y = 0$ на линии симметрии x . При этом циклическими процедурами определяются координаты x и значения σ в точках сетки линий скольжения на оси x и ξ линии скольжения от BC до точки E с известными значениями σ и φ на η линии скольжения CE . Линии скольжения ξ в области CDE - прямые ортогональные к η линии скольжения CE , ограниченные вогнутой границей штампа. Точки этой границы находим на пересечении прямых ξ линий скольжения с углами наклона $\varphi = -(\pi/4 + \theta)$ и прямых, определяемых уравнением (6), начиная от точки перегиба C при $\theta = \theta_c$, и уменьшении угла θ с шагом $\Delta\theta$ до нуля в точке D . Линии скольжения η , ортогональные к прямым

линиям скольжения ξ в области CDE , находим циклическими вычислениями регулярных точек линий скольжения начиная от η линии скольжения CE до точки D .

Приведенный алгоритм определяет гладкую вогнуто-выпуклую границу штампа ACD и соответствующие линии скольжения в зависимости от одного параметра - угла наклона касательной θ_C в точке перегиба C . В вычислительной программе вводится второй параметр $0 \leq cl \leq 1$, который изменяет кривизну выпуклого участка границы штампа на выходе из пластической области. При $cl < 1$ начальные точки кривых линий скольжения ξ задаем на части границы AB с шагом $\Delta y = -cl/N$. В этом случае на границе штампа появляется линейный отрезок с углом наклона θ_C , соединяющий вогнутый и выпуклый участки. При $cl \rightarrow 0$ выпуклая граница стягивается в сингулярную угловую точку A с прямой наклонной границы AC , длина которой равна двум, и граница ACD совпадает с идеальным профилем для прессования при плоской деформации [6]. При $cl = 1$ получаем идеальную границу штампа, показанную на рис.1, с минимальной кривизной выпуклой границы AC .

2. Поле скоростей. Скорости V_ξ, V_η находим интегрированием уравнений (3) после вычисления линий скольжения и гладкой границы ACD , при перемещении границы ACD по оси y со скоростью $V = -1$ относительно неподвижной горизонтальной линии симметрии x . Поле скоростей на плоскости годографа V_x, V_y находим по уравнениям (5).

В области DEO_1 с прямыми линиями скольжения ξ и η при $\varphi = \pi/4$ имеет место однородное деформированное состояние с постоянными скоростями деформации $\varepsilon_x = -\varepsilon_y = 1/H$ при линейном изменении скоростей V_x, V_y в зависимости от координат x, y

$$V_x = \frac{L+x}{H}, \quad V_y = -\frac{y}{H}, \quad -L \leq x \leq -L+H, \quad 0 \leq y \leq H \quad (8)$$

где длина L проекции границы ACD на ось x и высота H по оси y определяются координатами точки D : $L = -x_D, H = y_D$. Граничные условия для скоростей V_ξ, V_η на линии скольжения DE при $\varphi = -\pi/4$ находим из уравнений (5) и (8)

$$V_\xi = \frac{V_x - V_y}{\sqrt{2}}, \quad V_\eta = \frac{V_x + V_y}{\sqrt{2}} \quad (9)$$

На гладкой границе ACD при $\varphi = -(\pi/4 + \theta)$ выполняется условие непрерывности скорости по нормали к границе

$$\cos \theta + \frac{V_\eta - V_\xi}{\sqrt{2}} = 0 \quad (10)$$

и на линии симметрии x при $\varphi = -\pi/4$ и $V_y = 0$ из второго уравнения (5) следует $V_\xi = V_\eta$.

В вычислительной программе после расчета линий скольжения и границы ACD сохраняем массивы значений σ и φ на границе ACD и на ξ линии скольжения DE . Скорости перемещений в точках сетки линий скольжения находим при обратном расчете линий скольжения от границы DE к границе AB , так как уравнения (3) содержат угол φ .

В области DEC скорости находим численным решением смешанной задачи для уравнений (2), (3) с граничными условиями для скоростей (8)-(10). При этом скорости V_ξ , V_η в точках границы DC находим по известным значениям $V_{\xi 2}$, $V_{\eta 2}$ и φ_2 в точках на η линиях скольжения ближайших к границе DC , начиная от окрестности точки D , при конечноразностной аппроксимации второго уравнения (3) при граничном условии (10)

$$\begin{aligned} V_\eta &= \frac{V_{\xi 2} - \zeta(V_{\eta 2} + \sqrt{2} \cos \theta)}{1 + \zeta}, & V_\xi &= V_\eta + \sqrt{2} \cos \theta, \\ \zeta &= 0.5(\varphi - \varphi_2), & \varphi &= -(\pi/4 + \theta), \end{aligned} \quad (11)$$

с последующими вычислениями V_ξ , V_η в регулярных точках сетки линий скольжения от границы DC до η линии скольжения EC по известным значениям $V_{\xi 1}$, $V_{\eta 1}$, φ_1 и $V_{\xi 2}$, $V_{\eta 2}$, φ_2 в точках ξ и η линий скольжения и угла φ в точке пересечения линий скольжения

$$V_\xi = \frac{V_{\xi 1} + \zeta_1(V_{\eta 1} + V_{\eta 2}) - \zeta_1 \zeta_2 V_{\xi 2}}{1 + \zeta_1 \zeta_2}, \quad \zeta_1 = 0.5(\varphi - \varphi_1), \quad (12)$$

$$V_\eta = \frac{V_{\eta 2} - \zeta_2(V_{\xi 1} + V_{\xi 2}) - \zeta_1 \zeta_2 V_{\eta 1}}{1 + \zeta_1 \zeta_2}, \quad \zeta_2 = 0.5(\varphi - \varphi_2). \quad (13)$$

В области BCE скорости находим решением смешанной задачи, вычисляя скорости на оси x по известным значениям $V_{\xi 1}$, $V_{\eta 1}$, φ_1 в ближайших к оси x точках η линий скольжения, начиная от линии EC , с использованием конечноразностной аппроксимации первого уравнения (3)

$$V_\xi = V_\eta = \frac{V_{\eta 1} + \zeta_1 V_{\eta 1}}{1 - \zeta_1}, \quad \zeta_1 = 0.5(\varphi - \varphi_1), \quad \varphi = -\pi/4. \quad (14)$$

Затем вычисляем скорости в регулярных точках сетки линий скольжения по уравнениям (12), (13). В области ABC решаем смешанную задачу с известными значениями $V_{\xi 2}$, $V_{\eta 2}$ и φ_2 на линии скольжения CB , вычисляя по уравнениям (11) скорости на границе AC и по (12), (13) в регулярных точках до линии скольжения AB . По условию пластической несжимаемости безразмерная горизонтальная скорость V_0 на границе OA равна L . В области OAB имеет место линейное изменение скоростей по осям x , y

$$V_x = L + x - 1 \leq x \leq 0, \quad V_y = -y, \quad 0 \leq y \leq 1. \quad (15)$$

Так как линии скольжения и скорости находим численным интегрированием уравнений (1) - (3), то после определения скоростей в области OAB равенство $V_0 = L$ используем для оценки накопленной погрешности вычислений поля скоростей.

На рис. 1 и 2 показаны линии скольжения и годограф скоростей для криволинейного профиля ACD с углом наклона касательной в точке перегиба $\theta_C = 0.5236$, при $H = 2.85$, $L = 7.38$. Распределение давления p на границе контакта приведено в табл. 1. Среднее давление q и сила F на единицу длины по нормали к плоскости x, y , приложенные к штампу с учетом вертикальной оси симметрии равны $q = 1.67$, $F = 24.65$. Накопленная погрешность определения скорости V_x на границе OA при вычислении линий скольжения и годографа скоростей равна $V_{xA}/L = -0.078$. Вектор скорости по направлению главного напряжения σ_1 возрастает вдоль вогнутой и выпуклой частей границы DCA и в пластической области при положительном значении диссипативной функции. Поле скоростей в пластической области непрерывно. Среднее давление q и сила F существенно снижаются по сравнению с пластическим течением в штампах на конечной стадии заполнения полости, с угловой точкой границы контакта и разрывом скорости по жесткопластической границе [6].

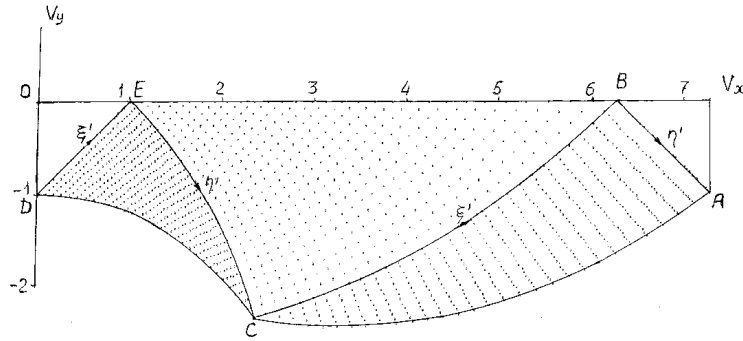


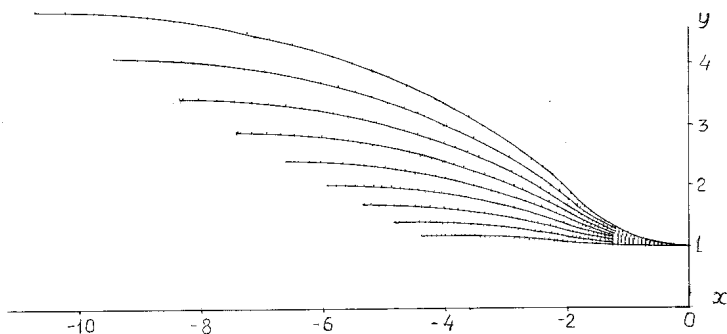
Рис. 2. Годограф скоростей в пластической области с линиями скольжения на рис. 1.

На рис. 3 показаны криволинейные профили гладкой границы штампа в первом квадранте плоскости x, y , вычисленные для углов наклона касательной в точке перегиба в интервале $0.0873 \leq \theta_C \leq 0.7854$ с шагом $\Delta\theta_C = 0.0873$. В табл. 2 приведены основные параметры этих профилей в зависимости от угла θ_C : высота H относительно оси x по вертикальной оси симметрии и проекция L на горизонтальную линию симметрии, отнесённые к полутолщине при $x = 0$, принятой за единицу длины; радиус R сечения цилиндра для поперечного сдавливания в штампе, равный площади сечения на конечной стадии деформирования, ограниченной уравнением $y(x)$ границы полости штампа на рис. 1

$$R = 2\sqrt{S/\pi}, \quad S = \int_{-L}^0 y(x)dx; \quad (16)$$

среднего давления q , найденного интегрированием распределения давления p на границе штампа, и погонной силы $F = 2qL$ на единицу длины по нормали к плоскости x, y .

$-x$	y	p	$-x$	y	p
0.000	1.000	1.000	2.169	1.655	1.559
0.133	1.002	1.035	2.442	1.795	1.593
0.266	1.009	1.070	2.730	1.929	1.628
0.399	1.021	1.105	3.032	2.057	1.663
0.532	1.037	1.140	3.350	2.179	1.698
0.663	1.058	1.175	3.682	2.293	1.733
0.794	1.083	1.209	4.030	2.400	1.768
0.924	1.113	1.244	4.394	2.497	1.803
1.053	1.148	1.279	4.773	2.585	1.838
1.180	1.187	1.314	5.168	2.661	1.873
1.306	1.230	1.349	5.579	2.726	1.908
1.431	1.278	1.384	6.006	2.779	1.942
1.554	1.330	1.419	6.449	2.818	1.977
1.674	1.387	1.454	6.909	2.842	2.012
1.793	1.447	1.489	7.384	2.850	2.047
1.910	1.512	1.524			

Таблица 1. Распределение давления p на границе контакта.Рис. 3. Гладкие профили штампа с углами наклона касательной в точке перегиба $\theta_C = 0.0873, 0.1745, 0.2618, 0.3491, 0.4363, 0.5236, 0.6109, 0.6981, 0.7854$.

3. Поперечное сдавливание цилиндра. Первая стадия пластического сдавливания начинается при контакте цилиндра с границей штампа в точке D и малом перемещении s границы штампа по радиусу цилиндра в направлении оси $-y$ (рис. 1). При малых углах наклона касательной θ в окрестности точки D и малых перемещениях s линии скольжения и поле скоростей определяются по Прандтлю вдавливанием штампа в пластическое полупространство с круговой границей, аналогично задаче о сдавливании цилиндра плоскими плитами [4].

Таблица 2. Зависимости параметров профилей на рис. 3 от угла наклона касательной θ_C в точке перегиба С (рис. 1)

θ_C	H	L	R	q	F
0.087	1.191	4.376	2.474	1.091	9.55
0.174	1.418	4.811	2.736	1.190	11.45
0.262	1.688	5.316	3.052	1.298	13.80
0.349	2.010	5.904	3.435	1.413	16.69
0.436	2.393	6.587	3.895	1.537	20.25
0.524	2.850	7.384	4.449	1.669	24.65
0.611	3.393	8.314	5.114	1.808	30.07
0.698	4.041	9.402	5.911	1.954	36.75
0.785	4.811	10.67	6.864	2.107	44.98

Давление на штамп q на первой стадии снижается от $1 + \pi/2$ при $s \rightarrow 0$ до 2.25, при увеличении перемещения до s_0 и переходом на вторую стадию пластического течения. На этой стадии пластическая область определяется линиями скольжения и полем скоростей по Прандтлю при сдавливании пластического слоя с отношением $h/a = 6.4$ полутолщины $h = y_A$ к полудлине $a = x_A + L$, которые определяются координатами точки A границы контакта цилиндра на вогнутой границе DC . Анализ первой стадии сдавливания цилиндра с радиусом R плоским штампом [4] показывает, что первая стадия заканчивается при безразмерных значениях $h/R = 0.988$ и $a/R = 0.154$, и весьма малом изменении круговой границы при выдавливании материала на границу цилиндра при перемещении $s_0/R = 0.012$.

При сдавливании цилиндра штампом с криволинейной границей перемещение s_0 при переходе ко второй стадии находим по координатам точки контакта A на границе цилиндра при $h/R = 0.988$ в полярных координатах с центром в точке O_1 и углом $\text{tg } \alpha = 6.4$

$$x_A = R \cos \alpha - L, \quad y_A = R \sin \alpha, \quad x_A = x_{A0}, \quad s_0 = y_{A0} - y_A, \quad \alpha = 1.416, \quad (17)$$

где x_{A0} и y_{A0} — координаты точки A_0 на смещенной границе штампа, проходящей через начальную точку контакта с цилиндром $x = -L, y = R$. По табличной функции границы штампа DC находим интервал $x_{i+1} \leq x_A \leq x_i$ для координаты x_A , линейной интерполяцией на этом интервале находим координату y_{A0} , затем из второго и третьего соотношений (17) находим перемещение штампа s_0 в конце первой стадии сдавливания цилиндра.

На второй стадии сдавливания при $s > s_0$ происходит смещение u круговой границы жесткой области деформируемого цилиндра по оси симметрии x и точки A границы контакта с заполнением полости штампа. При $s = 0$ граница штампа определяется уравнением $y(x)$ границы ACD при конечном положении, показанном на рис.1 и сдвигом по оси y на величину $R - H$ до контакта с

верхней точкой недеформированного цилиндра. При $s > s_0$ координаты точки A определяются пересечением круговой границы жесткой области со смещенной на $R - H - s$ границей $y(x)$

$$x_A = x = u + R \cos \alpha - L, \quad y_A = y + R - H - s = R \sin \alpha, \quad (18)$$

где u и α зависят от перемещения s при заполнении полости штампа и изменении границы пластической и жесткой области.

С увеличением s отношение h/a уменьшается вследствие увеличения длины $a = L + x_P$ и уменьшения высоты $h = y_A$ пластической области при перемещении точки контакта A по границе штампа ACD . При $h/a \leq 1$ пластическая область моделируется сдавливанием пластического слоя с конечным обратным отношением $a/h > 1$, пластическим течением по оси x и разрывом скорости вдоль жесткопластической границы с выпуклой свободной границей с радиусом R . При этом линии скольжения с сингулярной точкой A и вертикальной границей $x = x_A$, $0 \leq y \leq y_A$ с однородным напряженным состоянием сжатия $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = -1$ и поле скоростей удовлетворяют условию положительности диссипативной функции.

Жесткая область в виде сегмента круга с радиусом R и центральным углом 2α перед этой границей не нагружена, и перемещается с постоянной скоростью аналогично процессам сдавливания цилиндра плоскими штампами [4] и вдавливания штампа в пластическое полупространство с выпуклой криволинейной границей [7, 8]. При приближении к конечной стадии сдавливания цилиндра при $s = R - H$ имеет место скольжение по выпуклой границе штампа AC с уменьшением веера линий скольжения в точке A и жесткой области на вогнутой границе контакта, стремящейся к точке D . Жесткая область с радиусом R и уменьшением угла α перед свободной границей $x = x_P$ сохраняется.

Из равенства площади круга с радиусом R сумме площади, ограниченной границей штампа от точки D до точки A , и площади сегмента круга с радиусом R и углом α находим нелинейное уравнение для определения s при заданных координатах x , y границы штампа ACD , связанных с координатами точки A уравнениями (18).

$$\frac{\pi}{4} + \frac{(x + L)(s - R + H) - \frac{1}{2}(\alpha - \sin \alpha \cos \alpha) - \int_{-L}^x y(x) dx}{R^2} = 0, \quad (19)$$

где

$$\sin \alpha = \frac{y + R - H - s}{R}. \quad (20)$$

Интегралы, зависящие от координаты x в уравнении (19), вычисляются в программе после определения границы ACD на рис. 1, и сохраняются в массиве данных на этой границе вместе с координатами x , y , фигурирующими в уравнениях (18) - (20). Значения s с погрешностью меньше 10^{-3} находим численным решением уравнения (19) с подстановкой (20) методом Ньютона от начального

значения s_0 до конечного значения $s = R - H$ при заполнении полости штампа. После вычисления s по уравнению (20) находим угол α , по уравнениям (18) находим перемещение центра круговой границы деформируемого цилиндра u и величины $a = L + x_A$ и $h = y_A$, определяющие изменения пластической и жесткой области при сдавливании цилиндра.

Ниже приведены результаты численного моделирования поперечного сдавливания цилиндра с радиусом $R = 3.435$ в гладком штампе с криволинейной границей, определяемой углом наклона касательной $\theta_C = 0.349$ в точке перегиба при $H = 2.01$, $L = 5.9$, среднем давлении $q = 1.413$ и силе $F = 16.69$ на конечной стадии сдавливания. Первая стадия сдавливания заканчивается при $s_0 = 0.031$, $a = 0.53$, $h = 3.39$, $q = 2.225$, $F = 2.36$.

На рис. 4 показаны линии скольжения по Прандтлю и годограф скоростей на второй стадии сдавливания цилиндра при перемещении штампа $s = 0.29$, $a = 1.73$, $h/a = 1.75$, $q = 1.143$ и $F = 3.36$. Центр свободной круговой границы жесткой области перемещается по оси x на $u = 0.106$ от начальной координаты $x = -L$. Пластическая область симметрична относительно границы $x = -L$, $0 \leq y \leq R - s$. Область выше границы AB перемещается со скоростью штампа $V_y = -1$, $V_x = 0$ без скольжения по границе контакта AD и нагружена до однородного напряженного состояния с прямыми линиями скольжения ξ и η при $\varphi = -\pi/4$ и давлении $q = \sigma_{01} - (2\psi + \frac{1}{2})$, где σ_{01} — среднее напряжение в центре O_1 , определяемое по условию равенства нулю горизонтальной силы, приложенной к свободной жесткой области с круговой границей [4].

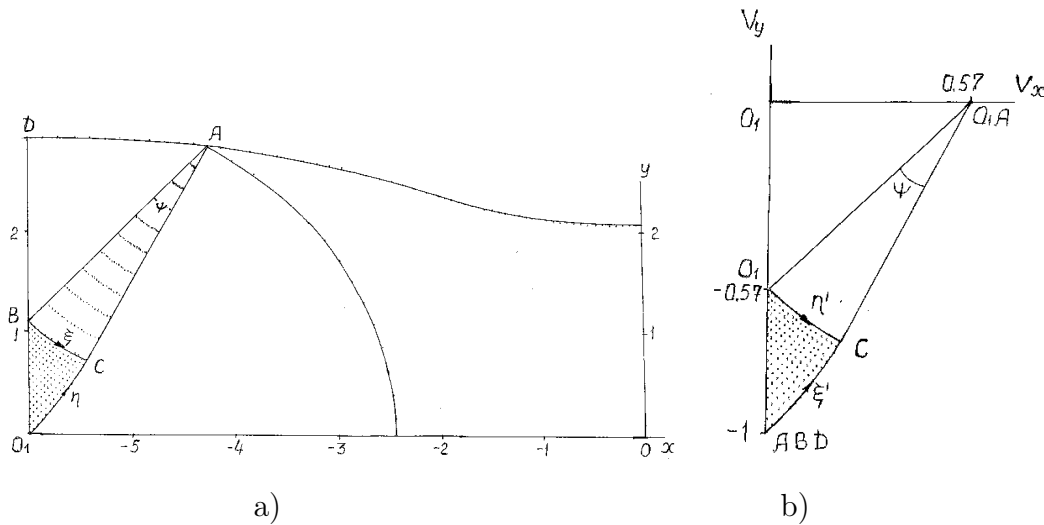


Рис. 4. Линии скольжения (а) и годограф скоростей (б) на второй стадии сдавливания цилиндра. $\theta_C = 0.3491$, $R = 3.435$, $s = 0.29$.

По условиям симметрии относительно оси x и пластической несжимаемости скорость перемещения свободной жесткой области равна $a/h = 0.571$. Вдоль

жесткопластической границы ACO_1 (рис. 4а) имеет место постоянный разрыв скорости $[V] = \sqrt{2}(a/h)$, который отображается на годографе скоростей (рис. 4б) дугой окружности с центральным углом ψ , равным углу веера линий скольжения в сингулярной точке A (рис. 4а). При увеличении перемещения s пластическая область расширяется при движении точки контакта A по границе штампа, перемещении жесткопластической границы ACO с неподвижной точкой O_1 в центре полости штампа и уменьшении свободной жесткой области с круговой границей; отношение h/a уменьшается до единицы с уменьшением угла ψ до нуля и вырождением пластической области в линию сдвига с разрывом скорости $[V] = \sqrt{2}$ и однородным напряженным и деформированным состоянием пластического сжатия $\sigma = -\frac{1}{2}$ и $q = 1$ при $s = 0.597$, $a = 2.646$.

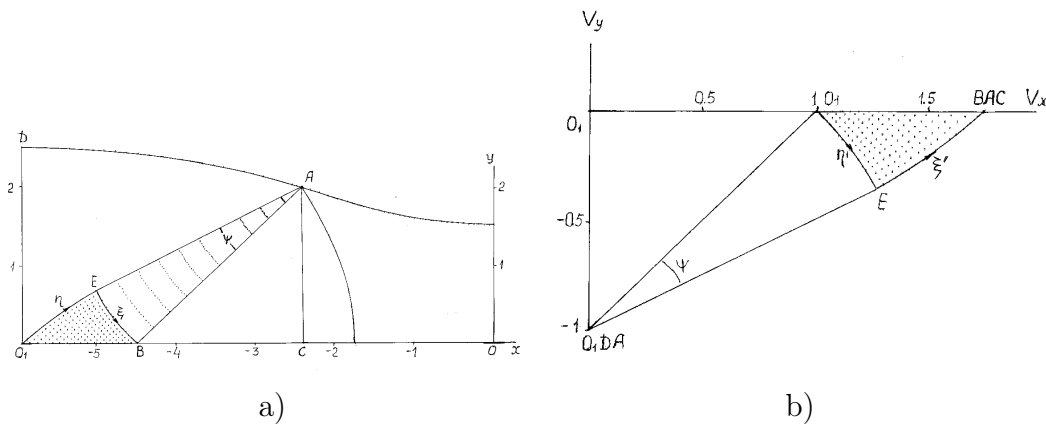


Рис. 5. Линии скольжения (а) и годограф скоростей (б) на третьей стадии сдвливания цилиндра. $\theta_C = 0.3491$, $R = 3.435$, $s = 0.88$.

При перемещениях $s > 0.6$ пластическая область переходит на третью стадию сдвливания слоя при отношении $a/h > 1$ и пластическим течением по линии симметрии x . На рис. 5 показаны линии скольжения и годограф скоростей на третьей стадии при $s = 0.88$, $a = 3.49$, $a/h = 1.71$, $q = 1.133$ и $F = 7.91$. Пластическая область (рис. 5а) ограничена жесткопластической границей AEO_1 , проходящей через центр полости штампа $x = -L$, с постоянным разрывом скорости $[V] = \sqrt{2}$, которая на плоскости годографа скоростей (рис. 5б) отображается окружностью с центральным углом ψ в сингулярной точке A на рис. 5а. Область однородного пластического сжатия ограничена линией скольжения AB и вертикальной границей AC , перемещающейся со скоростью $V_x = a/h$ вместе со свободной жесткой областью, ограниченной дугой окружности радиуса R , смещенной на $u = 0.73$ от центра O_1 по оси x . Жесткая область, ограниченная границей контакта со штампом DA и жесткопластической границей AEO_1 , перемещается со скоростью $V_y = -1$ без скольжения по границе DA . Среднее давление q и силу F находим интегрированием распределения давления $p = -(\sigma + \frac{1}{2})$ по оси x при вычислении линий скольжения.

На рис. 6 показаны линии скольжения и годограф скоростей на четвертой стадии сдвливания цилиндра при $s = 1.17$, $a = 4.52$, $a/h = 3.16$, $q = 1.376$ и $F = 12.43$. На этой стадии имеет место пластическое скольжение материала по выпуклой и вогнутой границе контакта со штампом с непрерывным полем скоростей. В области ABC со свободной границей AC (рис. 6а) имеет место напряженное состояние однородного сжатия и линейное изменение скоростей по осям координат x, y , удовлетворяющее условию $V_x = a/h$ на границе AC со свободным круговым сегментом жесткой области

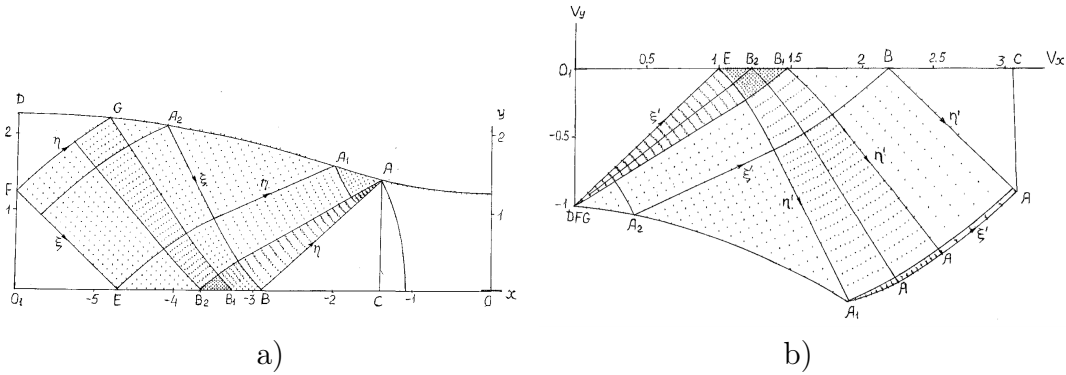


Рис. 6. Линии скольжения (а) и годограф скоростей (б) на четвертой стадии сдвливания цилиндра. $\theta_C = 0.3491$, $R = 3.435$, $s = 1.17$.

$$V_x = \frac{a}{h} + x_A - x, \quad x_B \leq x \leq x_A; \quad V_y = -y, \quad 0 \leq \frac{y}{h} \leq 1, \quad h = y_A, \quad a = L + x_A.$$

Линии скольжения в области ABB_2A определяются углом веера $\psi = \theta_A$ в сингулярной точке A с углом наклона касательной $-\theta_A$ к границе штампа и условием $\varphi = -\pi/4$ на линии симметрии x . Линии скольжения в области AB_2EA_1 определяются граничными условиями $\varphi = -(\pi/4 + \theta)$ на границе штампа AA_1 и $\varphi = -\pi/4$ на линии симметрии x с известными значениями σ и φ на линии скольжения AB_2 . В области A_1EFGA_2 линии скольжения ξ прямые ортогональные к линии скольжения A_1E . В области EFO_1 имеет место напряженное состояние сжатия по оси y и линейное изменение скоростей по осям x и y

$$V_x = \frac{L + x}{L + x_E}, \quad -L \leq x \leq x_E; \quad V_y = -y, \quad 0 \leq \frac{y}{y_F} \leq 1$$

На жесткопластической границе FG скорости $V_\xi = -\sin \varphi$ и $V_\eta = -\cos \varphi$ непрерывны, и на годографе (рис. 6б) отображаются сингулярной точкой DFG с углом веера прямых ξ линий скольжения $\psi = -(\frac{\pi}{4} + \varphi_G)$. На выпуклом участке границы скольжения AA_1 , где A_1 — точка перегиба границы штампа, линии скольжения наклонены к касательной под углом $\pi/4$, при равенстве нулю контактных касательных напряжений. На вогнутом участке границы A_1A_2G ,

на рис. 6а, углы наклона ξ линий скольжения к касательной к этой границе $\alpha = -(\varphi + \theta)$ отклоняются от $\pi/4$, и на этом участке появляются малые контактные касательные напряжения $\tau = \frac{1}{2} \cos 2\alpha$, приведенные в табл. 3, которые приближаются к нулю в конце сдавливания цилиндра при $s = R - H = 1.425$. Эти напряжения приводят к повышению диссипативной функции при пластическом скольжении на участке границы A_1A_2G , которое практически не влияет на интегральные значения давления q и силы F .

На рис. 7 показаны зависимости безразмерных значений q и F от перемещения штампа s относительно оси симметрии x . На первой стадии сдавливания цилиндра до $s = 0.03$ происходит быстрое снижение q от $1 + \frac{\pi}{2}$ при давлении штампа Прандтля на пластическое полупространство до 2.225 при переходе линий скольжения по Прандтлю на второй стадии сдавливания при отношениях $h/a > 1$ до $s = 0.6$ и нелинейном возрастании силы F без скольжения жесткой области на границе контакта. При сдавливании цилиндра на участке $0.6 < s < 1$ пластическая область определяется линиями скольжения по Прандтлю с разрывным полем скоростей при отношениях $1 < a/h < 2$ с небольшим повышением q до 1.23 на третьей стадии, также без скольжения жесткой области на границе контакта. При $s > 1$ граница контакта выходит на выпуклый участок штампа на четвертой стадии сдавливания цилиндра с увеличением скольжения по границе контакта, при уменьшении жесткой области и непрерывном поле скоростей. При этом давление незначительно возрастает и увеличение силы вследствие увеличения длины границы контакта близко к линейному.

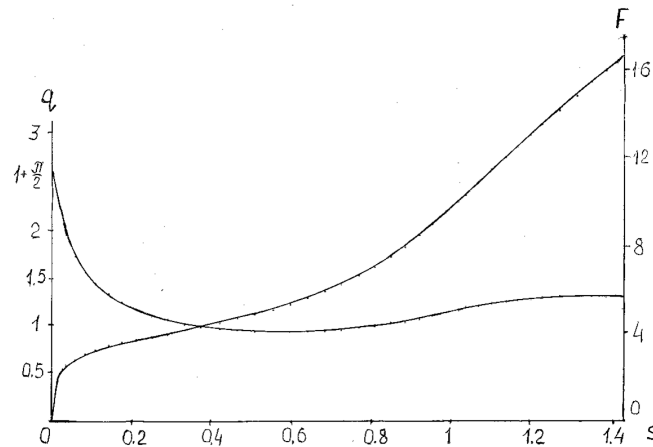


Рис. 7. Зависимости среднего давления q и силы F от перемещения s при сдавливании цилиндра. $\theta_C = 0.3491$, $R = 3.435$.

Таблица 3. Контактное давление p и касательное напряжение τ на вогнутой границе скольжения A_1A_2G (рис. 6а)

$-x$	y	p	$-\tau$	$-x$	y	p	$-\tau$
2.091	1.650	1.349	0.014	3.476	2.029	1.327	0.146
2.206	1.690	1.348	0.026	3.616	2.057	1.324	0.158
2.323	1.728	1.348	0.038	3.759	2.083	1.319	0.170
2.443	1.766	1.347	0.050	3.905	2.108	1.315	0.182
2.564	1.802	1.345	0.062	4.053	2.132	1.334	0.178
2.687	1.838	1.344	0.074	4.198	2.153	1.365	0.165
2.813	1.873	1.342	0.086	4.342	2.172	1.394	0.152
2.940	1.906	1.339	0.098	4.483	2.189	1.422	0.141
3.070	1.939	1.337	0.110	4.622	2.204	1.448	0.130
3.203	1.970	1.334	0.122	4.758	2.217	1.472	0.120
3.338	2.000	1.331	0.134				

4. Заключение. В случае поперечного сдавливания жесткопластического цилиндра штампом с криволинейной границей основным механизмом пластического течения является локализация пластической области с образованием жестких зон, моделируемая линиями скольжения по Прандтлю, начиная от давления штампа на полупространство, переходящего в сдавливание пластического слоя с уменьшением отношения толщины слоя к проекции границы контакта на горизонтальную плоскость.

В рассматриваемой выпукловогнутой границе штампа пластическое течение по Прандтлю с разрывом скорости по жесткопластическим границам удовлетворяет полной системе дифференциальных уравнений для напряжений и скоростей при положительной диссипативной функции с образованием жестких зон без скольжения на вогнутой границе контакта в процессе поперечного сдавливания цилиндра. Доминирующим механизмом деформирования является пластический сдвиг, вызванный перемещением жесткопластической границы по сечению цилиндра с разрывом касательной компоненты скорости.

На конечной стадии сдавливания происходит пластическое скольжение по выпуклой границе штампа на выходе из пластической области, и в случае идеально гладкой границы устанавливается непрерывное пластическое течение по всему сечению деформируемого цилиндра при положительности диссипативной функции.

В переходной зоне деформирования перед конечной стадией происходит уменьшение жестких зон при непрерывном поле скоростей и увеличении границы скольжения на вогнутом участке границы контакта с появлением малых касательных напряжений. При этом положительность диссипативной функции в пластической области сохраняется при малом повышении среднего давления вследствие затраты энергии контактного трения скольжения.

Гладкая выпукло-вогнутая граница штампа существенно снижает контактное давление и силу деформирования по сравнению с конечной стадией штамповки с выдавливанием металла в тонкий слой (облой) при малом радиусе перехода от полости штампа к облою. При штамповке массовых деталей со сложным профилем переменного сечения рассматриваемые профили целесообразно использовать на промежуточных переходах с целью улучшения заполнения полости штампа на конечном переходе, снижения максимальных сил и повышения износостойкости и прочности штампового инструмента при высоких циклических нагрузках.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Машиностроение. Энциклопедия. Т. III-2. Технология заготовительных производств. Москва : Машиностроение, 1996. 736 с.
- [2] Машиностроение. Энциклопедия. Т. VI-4. Машины и оборудование кузнечно-штамповочного и литейного производства. Москва : Машиностроение, 2005. 926 с.
- [3] Ишлинский А. Ю., Ивлев Д. Д. Математическая теория пластичности. Москва : Физматлит, 2001. 704 с.
- [4] Непершин Р. И. Пластическое сдавливание цилиндра плоскими плитами // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия Механика предельного состояния. 2020. № 1 (43). С. 101–120.
- [5] Непершин Р. И. Сдавливание жесткопластической сферы плоскими штампами // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия Механика предельного состояния. 2018. № 1 (35). С. 26–38.
- [6] Nepershin R. I. Applied Problems of Plasticity. Moscow : MSTU STANKIN, 2016. 310 p.
- [7] Быковцев Г. И., Хромов А. М. Плоская задача о вдавливании жесткого штампа в идеальное жестко-пластическое полупространство // Изв. АН СССР, МТТ. 1981. № 6. С. 47–52.
- [8] Быковцев Г. И., Ивлев Д. Д. Теория пластичности. Владивосток : Дальнаука, 1998. 528 с.

REFERENCES

- [1] Machinery Engineering. Encyclopedia. Vol. III-2. Technology of Blank Production. Moscow : Mashinostroenie, 1996. 736 c. (in Russian).
- [2] Machinery Engineering. Encyclopedia. Vol. VI-4. Machines and Equipment for Forging and Foundry Production. Moscow : Mashinostroenie, 2005. 926 c. (in Russian).
- [3] Ishlinsky A. Y., Ivlev D. D. Mathematical Theory of Plasticity. Moscow : Fizmatlit, 2001. 704 c. (in Russian).
- [4] Nepershin R. I. Plastic Compression of a Cylinder by Flat Plates // Vestnik ChGPU named after I.Ya. Yakovlev. Series Mechanics of Limit State. 2020. № 1 (43). С. 101–120. (in Russian).
- [5] Nepershin R. I. Compression of a Rigid-Plastic Sphere by Flat Stamps // Vestnik ChGPU named after I.Ya. Yakovlev. Series Mechanics of Limit State. 2018. № 1 (35). С. 26–38. (in Russian).
- [6] Nepershin R. I. Applied Problems of Plasticity. Moscow : MSTU STANKIN, 2016. 310 p.
- [7] Bykovtsev G. I., Khromov A. M. Plane Problem of Insertion of a Rigid Stamp into an Ideal Rigid-Plastic Half-Space // Izv. AN USSR, MTT. 1981. № 6. С. 47–52. (in Russian).
- [8] Bykovtsev G. I., Ivlev D. D. Theory of Plasticity. Vladivostok : Dalnauka, 1998. 528 c. (in Russian).