Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния.

DOI: `10.37972/chgpu.2024.61.3.009` *EDN: OLGXFN*
Научная статья *УДК: 539.374*

Е. В. Мурашкин, Ю. Н. Радаев

ВОЛНОВЫЕ ЧИСЛА СВЯЗАННОЙ ПЛОСКОЙ ТЕРМОУПРУГОЙ ВОЛНЫ В УЛЬТРАИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

Аннотация. В настоящей работе рассматриваются вопросы распространения плоских гармонических связанных волн температурного инкремента, трансляционных и спинорных перемещений в ультраизотропном микрополярном термоупругом теле и вычисляются их волновые числа. Ультраизотропная модель трактуется как дважды приведенный вариант полуизотропного тела. Проанализированы порядки членов дифференциальных уравнений в частных производных связанной микрополярной термоупругости по шкале, связанной с микро/нанодлиной. Найдены и проанализированы характеристические уравнения для волновых чисел плоских гармонических связанных термоупругих продольных (бикубическое уравнение) и поперечных (биквадратное уравнение) волн. Получены алгебраические выражения для корней характеристических уравнений и отделены нормальные волновые числа с положительной действительной частью.

Ключевые слова: микрополярная термоупругость, ультраизотропное тело, трансляционное смещение, спинорное смещение, плоская гармоническая по времени волна, продольная волна, поперечная волна, волновое число, комплексная амплитуда, фазовая плоскость, дисперсионное уравнение, вектор поляризации.

Мурашкин Евгений Валерьевич, канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник лаб. моделирования в механике деформируемого твердого тела; `e-mail:` murashkin@ipmnet.ru; https://orcid.org/0000-0002-3267-4742; AuthorID: 129570

Радаев Юрий Николаевич, д-р физ.-мат. наук, проф., ведущий научный сотрудник лаб. моделирования в механике деформируемого твердого тела; `e-mail:` radayev@ipmnet.ru; https://orcid.org/0000-0002-0866-2151; AuthorID: 103116

для цитирования: *Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н.* Волновые числа связанной плоской термоупругой волны в ультраизотропной среде // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2024. № 3(61). С. 128–139. DOI: `10.37972/chgpu.2024.61.3.009` EDN: OLGXFN

Поступила: 03.09.2024; принята в печать: 16.09.2024; опубликована: 24.12.24.

Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost.

DOI: 10.37972/chgpu.2024.61.3.009 *EDN: OLGXFN*

Research Article

E. V. Murashkin, Y. N. Radayev

WAVENUMBERS OF COUPLED PLANE THERMOELASTIC WAVE IN ULTRAISOTROPIC MEDIUM

Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow, Russia

Abstract. In present paper, the problems of propagation of plane harmonic coupled waves of temperature increment, translational and spinor displacements in an ultraisotropic micropolar thermoelastic solid are considered and their wavenumbers are calculated. The ultraisotropic model is treated as a doubly reduced version of a semi-isotropic solid. The orders of terms of partial differential equations of coupled micropolar thermoelasticity are analyzed with respect to a micro/nanolength scale. The characteristic equations for wavenumbers of plane harmonic coupled thermoelastic longitudinal (bicubic equation) and transverse (biquadratic equation) waves are found and analyzed. Algebraic expressions for the roots of the characteristic equations are obtained and normal wavenumbers with a positive real part are separated.

Keywords: micropolar thermoelasticity, ultraisotropic solid, translational displacement, spinor displacement, plane time-harmonic wave, longitudinal wave, transverse wave, wavenumber, complex amplitude, phase plane, dispersion equation, polarization vector.

Evgenii V. Murashkin, Cand. Sci. Phys. & Math., MD, Senior Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences; e-mail: evmurashkin@gmail.ru; https://orcid.org/0000-0002-3267-4742; AuthorID: 129570

Yuri N. Radayev, Dr. Sci. Phys. & Math., Prof., Leading Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences; e-mail: radayev@ipmnet.ru; https://orcid.org/0000-0002-0866-2151; AuthorID: 103116

to cite this article: *Murashkin E. V., Radayev Y. N.* Wavenumbers of coupled plane thermoelastic wave in ultraisotropic medium // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2024. No 3(61). p. 128–139. DOI: 10.37972/chgpu.2024.61.3.009 EDN: OLGXFN

Received: 03.09.2024; accepted: 16.09.2024; published: 24.12.24.

1. Введение. Модели микрополярных континуумов основаны на понятиях спинорных и трансляционных перемещений, определяющих движение элемента деформируемой среды. Указанный способ моделирования микрополярного тела впервые был описан в работе братьев Коссера [1]. Последующие многочисленные работы по микрополярной упругости появились только через 50 лет. Среди них следует отдельно отметить работы отечественных исследователей [2, 3], а также работы немецких авторов [4–7]. Векторы спинорных и трансляционных перемещений могут быть введены в теорию способами известными в теоретической механике как теоремы Шаля о поворотах твердого тела. В известных авторам публикациях построение микрополярных теорий основывается на второй теореме Шаля, позволяющая рассматривать векторы спинорных и трансляционных перемещений как независимые векторные/псевдовекторные поля.

Математическая модель микрополярного тела фиксируется квадратичной энергетической формы потенциала напряжений [4, 8–23]. Задание потенциала для общего анизотропного случая и последующая его редукция сначала к гемитропному телу, а затем к изотропному и, в конце концов, к ультраизотропному телу, позволяет наиболее простым и естественным способом получить замкнутую систему дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка относительно температурного инкремента и перемещений (трансляционных и спинорных). Система уравнений гемитропного микрополярного термоупругого тела (CGNI)[1] формулируется в терминах определяющих постоянных (G — модуль сдвига, ν — коэффициент Пуассона, L — характерная нано/микродлина[2] и т.д.). В указанную систему дифференциальных уравнений входят следующие «доминирующие» частные производные максимального порядка (в данной случае — второго):

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\,,\qquad \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}\cdot\,,\qquad \boldsymbol{\nabla}\cdot\underset{\cdot}{\partial}\,,\qquad \underset{\cdot\cdot}{\partial}^{2}\,. \tag{1}$$

Некоторые из них включают множитель L^2. L — инфинитеземальная величина, которой в теориях C, CGNI/II/III присваивается первый порядок малости, т.е. $L = o(1)$. Указанное обстоятельство говорит о гиперсингулярной возмущенности системы дифференциальных уравнений, формулирующей модель полуизотропного микрополярного термоупругого тела. Что касается теплопередачи в полуизотропной среде CGNI, то соответствующее уравнение включает слагаемое

$$L^2\boldsymbol{\nabla}\cdot\underset{\cdot}{\partial}\boldsymbol{\phi},$$

[1]Акроним CGNI соответствует классификации теплопроводящих тел, подробно изложенной в работе [24]. Литера C отсылает к Cosserat & Cosserat [1].

[2]Характерная микродлина может быть введена в определяющие уравнения моделей C, CGNI различными способами, один из которых описан в работах Нейбера (см., например, [4]). Несмотря на очевидный физический смысл указанного определяющего модуля, теории, использующие материальные постоянные, приянтые в данной работе, пока не получили должного распространения в научной литературе.

где $\boldsymbol{\phi}$ — спинвектор. Учет этого слагаемого имеет смысл, только если оно будет конечным по шкале бесконечно малых, привязанной к характерной микро/нанодлине L, т.е.

$$L^2 \boldsymbol{\nabla} \cdot \underset{\cdot}{\partial} \boldsymbol{\phi} = O(1),$$

т.е. расходимость скоростей микроповоротов достаточно велика. Тем самым предлагается новый подход к моделирования C, CGNI тел.

Важным классом задач в теориях волновой термомеханики микрополярных сред являются задачи распространения плоских гармонических волн в термоупругих средах. Этот класс задач подготавливает к идентификации полуизотропных микрополярных тел. Волновым задачам термомеханики микрополярных континуумов посвящена обширная литература [8, 17–23, 25–28]. Тем не менее следует отметить, что некоторые проблемы, существенные как для теории, так и для прикладных вопросов, до сих пор остаются не исследованными. В первую очередь это касается вопросов ориентации в пространстве (поляризаций) для плоских гармонических волн, что препятствует применению теории микрополярной термоупругости в экспериментах и не позволяет говорить о завершенности рассматриваемых исследований. Следует отдельно отметить, что предмет настоящей работы, связанный с распространением гармонических волн в ультраизотропной среде, никогда ранее не исследовался. Изложение материала настоящей статьи в значительной степени использует терминологию, обозначения, методы и результаты, изложенные в предыдущих статьях [9–23].

2. Распространение плоских связанных гармонических волн в ультраизотропном термоупругом микрополярном теле. Связанная система уравнений ультрагемитропной микрополярной термоупругости может быть записана векторной форме [29]:

$$\begin{cases} \dfrac{1-\nu}{1-2\nu}\boldsymbol{\nabla\nabla}\cdot\mathbf{u} - \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\phi} - \underset{*}{\alpha}\dfrac{1+\nu}{1-2\nu}\boldsymbol{\nabla}\theta = \dfrac{1}{2}\rho G^{-1}\underset{\cdot\cdot}{\partial}^2\mathbf{u}, \\ L^2(1+c_3)\boldsymbol{\nabla\nabla}\cdot\boldsymbol{\phi} + 2(\boldsymbol{\phi} - \dfrac{1}{2}\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{u}) = \dfrac{1}{2}\rho\Im G^{-1}\underset{\cdot\cdot}{\partial}^2\boldsymbol{\phi}, \\ \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\theta - C\lambda^{-1}\underset{\cdot}{\partial}\theta - 2G\lambda^{-1}\underset{*}{\alpha}\dfrac{1+\nu}{1-2\nu}\boldsymbol{\nabla}\cdot(\underset{\cdot}{\partial}\mathbf{u}) = 0, \end{cases} \tag{2}$$

где выполнена замена $C\theta_0^{-1} \longrightarrow C$, $\lambda\theta_0^{-1} \longrightarrow \lambda$.

Система дифференциальных уравнений в частных производных (2), записанная в терминах вектора трансляционных перемещений $\mathbf{u}$, вектора спинорных перемещений $\boldsymbol{\phi}$ и температурного инкремента θ служит основой для исследования сильных и слабых разрывов в микрополярной гемитропной среде, а также волновых процессов, которые в рассматриваемом случае характеризуются одновременным распространением прямых и зеркальных мод.

Рассмотрим задачу о распространении связанной гармонической плоской волны с частотой ω. В этом случае поля температурного инкремента, трансляционных и спинорных перемещений можно представить в форме

$$\mathbf{u} = \mathbf{A}\Phi, \quad \boldsymbol{\phi} = \mathbf{S}\Phi, \quad \theta = B\Phi, \quad \Phi = e^{i \arg \Phi}, \quad \arg \Phi = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t, \tag{3}$$

где $\mathbf{k}$ — волновой вектор; $\mathbf{r}$ — радиус вектор; ω — циклическая частота гармонической волны; $\mathbf{A}$, $\mathbf{S}$ — векторы комплексных амплитуд трансляционных и спинорных перемещений соответственно; B — (комплексная) амплитуда температурного инкремента; Φ — фазовый множитель; $\arg \Phi$ — фаза плоской волны. Уравнение $\arg \Phi = \mathrm{const}$ задает фазовые плоскости. При этом, для существования связанной термоупругой волны необходимо выполнение следующего условия

$$B \neq 0. \tag{4}$$

Отметим, что $\mathbf{k} = k\mathbf{s}$, где k — комплексное число, $\mathbf{s}$ — вещественный единичный вектор.

После подставновки (3) в систему уравнений (2), связывающую волновой вектор $\mathbf{k}$, циклическую частоту ω, векторы поляризации плоской волны $\mathbf{A}$, $\mathbf{S}$ и амплитуду B, получим:

$$\begin{cases} \rho G^{-1}\omega^2 \mathbf{A} - 2(1-\nu)(1-2\nu)^{-1})\mathbf{k}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{A}) - \\ \qquad\qquad - 2i\mathbf{k}\times\mathbf{S} - 2\underset{*}{\alpha}(1+\nu)(1-2\nu)^{-1})i\mathbf{k}B = \mathbf{0}, \\ [\rho\Im G^{-1}L^{-2}\omega^2 + 4L^{-2}]\mathbf{S} - 2(1+c_3)\mathbf{k}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{S}) - 2L^{-2}i\mathbf{k}\times\mathbf{A} = \mathbf{0}, \\ (C\lambda^{-1}i\omega - k^2)B - 2G\lambda^{-1}\underset{*}{\alpha}\dfrac{1+\nu}{1-2\nu}\omega(\mathbf{k}\cdot\mathbf{A}) = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Представим векторы комплексных амплитуд трансляционных ($\mathbf{A}$) и спинорных ($\mathbf{S}$) перемещений в виде суммы

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_\perp + A_\parallel\mathbf{k}, \quad \mathbf{S} = \mathbf{S}_\perp + S_\parallel\mathbf{k}, \tag{6}$$

где векторы $\mathbf{A}_\perp$ и $\mathbf{S}_\perp$ расположены в плоскости перпендикулярной волновому вектору $\mathbf{k}$, т.е. в плоскости постоянной фазы $\arg \Phi = \mathrm{const}$.

Подставив представление (6) в систему (5), получим

$$\begin{cases} [\rho G^{-1}\omega^2](\mathbf{A}_\perp + A_\parallel\mathbf{k}) - 2(1-\nu)(1-2\nu)^{-1}A_\parallel k^2\mathbf{k} - \\ \qquad\qquad - 2i\mathbf{k}\times\mathbf{S}_\perp - 2\underset{*}{\alpha}(1+\nu)(1-2\nu)^{-1}i\mathbf{k}B = \mathbf{0}, \\ [\rho\Im G^{-1}L^{-2}\omega^2 + 4L^{-2}](\mathbf{S}_\perp + S_\parallel\mathbf{k}) - 2(1+c_3)S_\parallel k^2\mathbf{k} - 2L^{-2}i\mathbf{k}\times\mathbf{A}_\perp = \mathbf{0}, \\ (C\lambda^{-1}i\omega - k^2)B - 2G\lambda^{-1}\underset{*}{\alpha}\dfrac{1+\nu}{1-2\nu}\omega A_\parallel k^2 = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Нетрудно заметить, что система (7) распадается на две независимые системы уравнений, отдельно для продольных и поперечных волн.

3. Волновые числа связанной продольной плоской гармонической волны. Проекции уравнений системы (5) на волновой вектор $\mathbf{k}$ представляет собой замкнутую систему трех линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} \left(\omega^2 - \dfrac{2G(1-\nu)}{\rho(1-2\nu)}k^2\right)A_\parallel - 2\underset{*}{\alpha}\dfrac{G(1+\nu)}{\rho(1-2\nu)}iB = 0, \\ [\omega^2 + 4(\rho\mathfrak{I})^{-1}G - 2(1+c_3)(\rho\mathfrak{I})^{-1}GL^2k^2]S_\parallel = 0, \\ (C\lambda^{-1}i\omega - k^2)B - 2G\lambda^{-1}\underset{*}{\alpha}\dfrac{1+\nu}{1-2\nu}\omega A_\parallel k^2 = 0. \end{cases} \tag{8}$$

Для существования нетривиального решения алгебраической системы (8) необходимо и достаточно, чтобы ее определитель был равен нулю, т.е.

$$\begin{vmatrix} \omega^2 - [V_\parallel]^2k^2 & 0 & -ia_2 \\ 0 & \omega^2 + \Omega - [V_\parallel^{\mu\mu}]^2k^2 & 0 \\ -a_4\omega k^2 & 0 & ia_6\omega - k^2 \end{vmatrix} = 0, \tag{9}$$

где

$$\begin{gathered} [V_\parallel]^2 = \frac{2G(1-\nu)}{\rho(1-2\nu)}, \quad [V_\parallel^{\mu\mu}]^2 = \frac{2GL^2(1+c_3)}{\rho\mathfrak{I}}, \quad a_2 = 2\underset{*}{\alpha}\frac{G(1+\nu)}{\rho(1-2\nu)}, \\ \rho\mathfrak{I}\Omega = 4G, \quad \lambda a_4 = 2G\underset{*}{\alpha}\frac{1+\nu}{1-2\nu}, \quad \lambda a_6 = C. \end{gathered} \tag{10}$$

Отметим, что уравнение (9) совпадает по форме (но не полностью идентично) с аналогичным для изотропного термоупругого тела [17].

Алгебраическое уравнение (9) представляет собой бикубическое уравнение относительно, подлежащего определению, волнового числа k:

$$Q_6k^6 + Q_4k^4 + Q_2k^2 + Q_0 = 0, \tag{11}$$

где использованы следующие обозначения

$$\begin{aligned} Q_6 &= a_1^2\mathfrak{I} - [V_\parallel V_\parallel^{\mu\mu}]^2, \qquad Q_0 = ia_6\omega^3(\omega^2+\Omega), \\ Q_4 &= \left([V_\parallel]^2 + [V_\parallel^{\mu\mu}]^2\right)\omega^2 + [V_\parallel]^2\Omega - i(a_6Q_6 + a_2a_4[V_\parallel^{\mu\mu}]^2)\omega, \\ Q_2 &= -\omega^2\Omega - \omega^4 + i[a_2a_4 - a_6([V_\parallel]^2 + [V_\parallel^{\mu\mu}]^2)]\omega^3 - \\ &\quad - i(a_6[V_\parallel]^2 - a_2a_4)\omega\Omega. \end{aligned} \tag{12}$$

Корни уравнения (11) будут иметь вид

$$\begin{gathered} k_{1,2,3} = \sqrt{Y_{1,2,3} - \frac{Q_4}{3Q_6}}, \\ k_4 = -k_1, \qquad k_5 = -k_2, \qquad k_6 = -k_3. \end{gathered} \tag{13}$$

где

$$Y_1 = a+b, \quad Y_{2,3} = -\frac{1}{2}(a+b) \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}(a-b), \tag{14}$$

$$a = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\mathfrak{D}_1}}, \quad b = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\mathfrak{D}_1}}, \quad \mathfrak{D}_1 = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}.$$

$$p = \frac{2Q_6Q_2 - Q_4^2}{Q_6^2}, \qquad q = \frac{2Q_4^3 - 9Q_6Q_4Q_2 + 27Q_6^2Q_0}{27Q_6^3}. \tag{15}$$

Достаточно выбрать одно из значений квадратного корня $\sqrt{\mathfrak{D}_1}$, а для каждого из трех значений величины a необходимо подбирать такое значение b, для которого выполняется условие

$$ab = -p/3.$$

Значения волновых чисел (13), полученные при исследовании бикубического (11) уравнения, можно впоследствии использовать при отделении однозначных ветвей многозначных квадратных и кубических радикалов на комплексной плоскости $k = \mathrm{Re}k + i\mathrm{Im}k$ ($\mathrm{Re}\, k > 0$).

4. Волновые числа холодной атермической поперечной плоской гармонической волны. Рассмотрим проекции системы линейных уравнений (7) ортогональные направления в фазовой плоскости $\arg\Phi = \mathrm{const}$. Введем в рассмотрение два единичных взаимно ортогональных вектора $\boldsymbol{\imath}$ и $\boldsymbol{\jmath}$, расположенных в фазовой плоскости. Тогда векторы $\mathbf{A}_\perp$ и $\mathbf{S}_\perp$ можно представить в форме

$$\mathbf{A}_\perp = \underset{1}{A}_\perp\boldsymbol{\imath} + \underset{2}{A}_\perp\boldsymbol{\jmath}, \quad \mathbf{S}_\perp = \underset{1}{S}_\perp\boldsymbol{\imath} + \underset{2}{S}_\perp\boldsymbol{\jmath}. \tag{16}$$

Проекции системы линейных уравнений (7) на орты $\boldsymbol{\imath}$ и $\boldsymbol{\jmath}$ примут вид

$$\begin{aligned}
\omega^2\underset{1}{A}_\perp + 2i\rho^{-1}Gk\underset{2}{S}_\perp &= 0,\\
\omega^2\underset{2}{A}_\perp - 2i\rho^{-1}Gk\underset{1}{S}_\perp &= 0,\\
[\mathfrak{I}\omega^2 + 4\rho^{-1}G]\underset{1}{S}_\perp + 2i\rho^{-1}Gk\underset{2}{A}_\perp &= 0,\\
[\mathfrak{I}\omega^2 + 4\rho^{-1}G]\underset{2}{S}_\perp - 2i\rho^{-1}Gk\underset{1}{A}_\perp &= 0.
\end{aligned} \tag{17}$$

Для существования нетривиального решения системы линейных однородных уравнений (17) необходимо и достаточно, чтобы следующий определитель был равен нулю, т.е.

$$\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} \omega^2 & 0 & 0 & ia_8k \\ 0 & \omega^2 & -ia_8k & 0 \\ 0 & ia_8k & \omega^2\mathfrak{I} + 2a_8 & 0 \\ -ia_8k & 0 & 0 & \omega^2\mathfrak{I} + 2a_8 \end{vmatrix} = 0, \tag{18}$$

где введены обозначения:

$$a_8\rho = 2G. \tag{19}$$

Отметим, что в отличие от аналогичного уравнения для полуизотропного и изотропного CGNI тел волновые числа k не входят в элементы главной диагонали $\mathbf{A}$. Кроме того, видно, что характерные определяющие числа $[V_\perp^\mu]^2 = G(1 + c_1)\rho^{-1}$ и $[V_\perp^{\mu\mu}]^2 = G(1 + c_2)(\rho\mathfrak{I})^{-1}$, равны нулю для ультраизотропного тела.

Волновые числа поперечных волн вещественны $\operatorname{Im} k = 0$, что физически очевидно для атермических волн, т.е. связано с “атермичностью” поперечной волны и с отсутствуем потери энергии при ее распространении и элиминированием термической составляющей. В этом случае транспонированная матрица (18) комплексно–сопряжена исходной, т.е. является Эрмитовой.

Алгебраическое уравнение (18) представляет собой биквадратное уравнение относительно квадрата волнового числа k:

$$a_8^4 k^4 - 4a_8^3 \mathfrak{I} k^2 \omega^2 + 4a_8^2 \mathfrak{I}^2 \omega^4 - 2a_8^2 \mathfrak{I} k^2 \omega^4 + 4a_8 \mathfrak{I}^2 \omega^6 + \mathfrak{I}^2 \omega^8 = 0 \tag{20}$$

или

$$(a_8^2 k^2 - 2a_8 \omega^2 - \mathfrak{I} \omega^4)^2 = 0. \tag{21}$$

Вещественные корни уравнения вычисляются согласно соотношениям:

$$a_8 k_{1,2,3,4} = \pm \omega \sqrt{\mathfrak{I} \omega^2 + 2a_8}. \tag{22}$$

Откуда следует, что имеется кратный вещественный корень

$$a_8 k_1 = a_8 k_2 = \omega \sqrt{\mathfrak{I} \omega^2 + 2a_8}, \tag{23}$$

являющийся нормальным волновым числом.

Отметим, что волновое число (23) будет всегда вещественным, т.к.:

$$a_8 = 2G\rho^{-1} > 0. \tag{24}$$

5. Заключение. В настоящей работе рассматриваются вопросы распространения плоских гармонических связанных волн температурного инкремента, трансляционных и спинорных перемещений в ультраизотропном термоупругом микрополярном CGNI теле. Ультраизотропная модель трактуется как результат двукратно приведенной модели полуизотропного тела.

(1) Получена связанная система дифференциальных уравнений с частными производными в терминах вектора трансляционных перемещений, вектора спинорных перемещений и температурного инкремента для микрополярного ультраизотропного тела.

(2) Проанализированы порядки членов в дифференциальных уравнениях с частными производными связанной микрополярной термоупругости по шкале бесконечно малых привязанной к характерной микро/нанодлине.

(3) Найдены и проанализированы алгебраические уравнения для волновых чисел продольных (бикубическое уравнение) и поперечных связанных волн (биквадратное уравнение). Волны последнего типа — холодные атермические, никак не связанные с тепловыделением.

(4) Волновые числа продольных гармонических волн оказываются комплексными, в силу производства энтропии при распространении тепла.

(5) Вычислены волновые числа поперечных гармонических волн, которые оказываются вещественными. Найдено двукратное нормальное волновое число поперечных волн.

ДОПОЛНИТЕЛЬНО

Вклад авторов. Все авторы подтверждают соответствие своего авторства международным критериям ICMJE (все авторы внесли существенный вклад в разработку концепции, проведение исследования и подготовку статьи, прочли и одобрили финальную версию перед публикацией).
Конфликт интересов. Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.
Источник финансирования. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 23-21-00262).

ADDITIONAL INFORMATION

Authors' contribution. All authors confirm that their authorship meets the international ICMJE criteria (all authors have made a significant contribution to the development of the concept, research and preparation of the article, read and approved the final version before publication).
Competing interests. The authors declare that they have no competing interests.
Funding. The study was carried out with the financial support of the Russian Science Foundation (project No. 23-21-00262).

ЛИТЕРАТУРА

[1] Cosserat E. M. P., Cosserat F. Théorie des corps déformables. Paris : A. Hermann et fils, 1909. VI+226 p.
[2] Aero E. L., Kuvshinskii E. V. Fundamental equations of the theory of elastic media with rotationally interacting particles // Soviet Physics-Solid State. 1961. Vol. 2, no. 7. P. 1272–1281.
[3] Pal'mov V. A. Fundamental equations of the theory of asymmetric elasticity // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 1964. Vol. 28, no. 3. P. 496–505.
[4] Neuber H. Über Probleme der Spannungskonzentration im Cosserat-Körper // Acta Mechanica. 1966. Vol. 2. P. 48–69. DOI: 10.1007/BF01176729.
[5] G unther W. Zur Statik und Kinematik des Cosseratschen Kontinuums // Abh. Braunschweig. Wiss. Ges. 1958. Vol. 10. P. 195–213.
[6] Neuber H. On the general solution of linear-elastic problems in isotropic and anisotropic Cosserat continua // Applied Mechanics: Proceedings of the Eleventh International Congress of Applied Mechanics Munich (Germany) 1964 / Springer. 1966. P. 153–158. DOI: 10.1007/978-3-662-29364-5_16.
[7] Neuber H. On the Effect of Stress Concentration in Cosserat Continua // Mechanics of Generalized Continua / Ed. by Ekkehart Kröner. Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 1968. P. 109–113.
[8] Nowacki W. Theory of Asymmetric Elasticity. Oxford, New York, Toronto, Sydney, Paris, Frankfurt : Pergamon Press, 1986. viii+383 p.
[9] Радаев Ю. Н. Правило множителей в ковариантных формулировках микрополярных теорий механики континуума // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2018. Т. 22. С. 504–517. DOI: 10.14498/vsgtu1635.
[10] Радаев Ю.Н., Мурашкин Е.В. Псевдотензорная формулировка механики гемитропных микрополярных сред // Проблемы прочности и пластичности. 2020. Vol. 82, no. 4. P. 399–412. DOI: 10.32326/1814-9146-2020-82-4-399-412.
[11] Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On a micropolar theory of growing solids // Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences. 2020. Vol. 24, no. 3. P. 424–444. DOI: 10.14498/vsgtu1792.

[12] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. К теории линейных гемитропных микрополярных сред // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. ИЯ Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2020. № 4. С. 16–24. DOI: 10.37972/chgpu.2020.89.81.031.
[13] Murashkin E. V., Radaev Y. N. Coupled Thermoelasticity of Hemitropic Media. Pseudotensor Formulation // Mechanics of Solids. 2023. Vol. 58, no. 3. P. 802–813. DOI: 10.3103/s0025654423700127.
[14] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. К поливариантности основных уравнений связанной термоупругости микрополярного тела // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния. 2023. № 3(57). С. 112–128. DOI: 10.37972/chgpu.2023.57.3.010.
[15] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Мультивесовая термомеханика гемитропных микрополярных тел // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния. 2023. № 4(58). С. 86–120. DOI: 10.37972/chgpu.2023.58.4.010.
[16] Murashkin E. V., Radayev Y. N. On Algebraic Triple Weights Formulation of Micropolar Thermoelasticity // Mechanics of Solids. 2024. Vol. 59, no. 1. P. 555–580. DOI: 10.1134/s0025654424700274.
[17] Ковалев В. А., Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Математическая теория связанных плоских гармонических термоупругих волн в микрополярных континуумах первого типа // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Математика. Механика. Информатика. 2014. Vol. 14, no. 1. P. 77–87. DOI: 10.18500/1816-9791-2014-14-1-77-87.
[18] Kovalev V. A., Murashkin E. V., Radayev Y. N. On weak discontinuities and jump equations on wave surfaces in micropolar thermoelastic continua // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2015. Vol. 15, no. 1. P. 79–89. DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-1-79-89.
[19] Murashkin E. V., Radayev Y. N. On a classification of weak discontinuities in micropolar thermoelasticity // Materials Physics and Mechanics. 2015. Vol. 23, no. 1. P. 10–13. DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-1-79-89.
[20] Murashkin E. V., Stadnik N. E. Compatibility conditions in continua with microstrusture // MATEC Web of Conferences. 2017. Vol. 95. P. 12001. DOI: 10.1051/matecconf/20179512001.
[21] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Прямые, инверсные и зеркальные волновые моды связанных волн перемещений и микровращений в гемитропных микрополярных средах // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния. 2021. № 2(48). С. 115–127. DOI: 10.37972/chgpu.2021.48.2.014.
[22] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Термические и атермические плоские гармонические волны в ацентрическом изотропном теле // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния. 2023. № 2(56). С. 99–107. DOI: 10.37972/chgpu.2023.56.2.010.
[23] Murashkin E. V., Radayev Y. N. Heat transfer in anisotropic micropolar solids // Mechanics of Solids. 2023. Vol. 58, no. 9. P. 3111–3119. DOI: 10.3103/S0025654423700255.
[24] Green A. E., Naghdi P. M. Thermoelasticity without energy dissipation // Journal of elasticity. 1993. Vol. 31, no. 3. P. 189–208.
[25] Smith A. C. Waves in micropolar elastic solids // Int. J. Eng. Sci. 1967. Vol. 5. P. 741–746. DOI: 10.1016/0020-7225(67)90019-5.
[26] Willson A. J. The micropolar elastic vibrations of a circular cylinder // International Journal of Engineering Science. 1972. Vol. 10, no. 1. P. 17–22. DOI: 10.1016/0020-7225(72)90071-7.

[27] Achenbach J. Wave propagation in elastic solids. Amsterdam, London, New York : American Elsevier, 2012. 335 c.
[28] Maugin G. A. Acceleration waves in simple and linear viscoelastic micropolar materials // International Journal of Engineering Science. 1974. Vol. 12, no. 2. P. 143–157. DOI: 10.1016/0020-7225(74)90013-5.
[29] Murashkin E. V., Radayev Y. N. Wavenumbers of Doublet and Triplet Plane Thermoelastic Wave in Ultraisotropic Micropolar Medium // Mechanics of Solids. 2024. Vol. 59, no. 6.

REFERENCES

[1] Cosserat E. M. P., Cosserat F. Théorie des corps déformables. Paris : A. Hermann et fils, 1909. VI+226 p.
[2] Aero E. L., Kuvshinskii E. V. Fundamental equations of the theory of elastic media with rotationally interacting particles // Soviet Physics-Solid State. 1961. Vol. 2, no. 7. P. 1272–1281.
[3] Pal'mov V. A. Fundamental equations of the theory of asymmetric elasticity // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 1964. Vol. 28, no. 3. P. 496–505.
[4] G unther W. Zur Statik und Kinematik des Cosseratschen Kontinuums // Abh. Braunschweig. Wiss. Ges. 1958. Vol. 10. P. 195–213.
[5] Neuber H. Über Probleme der Spannungskonzentration im Cosserat-Körper // Acta Mechanica. 1966. Vol. 2. P. 48–69. DOI: 10.1007/BF01176729.
[6] Neuber H. On the general solution of linear-elastic problems in isotropic and anisotropic Cosserat continua // Applied Mechanics: Proceedings of the Eleventh International Congress of Applied Mechanics Munich (Germany) 1964 / Springer. 1966. P. 153–158. DOI: 10.1007/978-3-662-29364-5_16.
[7] Neuber H. On the Effect of Stress Concentration in Cosserat Continua // Mechanics of Generalized Continua / Ed. by Ekkehart Kröner. Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 1968. P. 109–113.
[8] Nowacki W. Theory of Asymmetric Elasticity. Oxford, New York, Toronto, Sydney, Paris, Frankfurt : Pergamon Press, 1986. viii+383 p.
[9] Radaev Y. N. The multiplier rule in covariant formulations of micropolar theories of continuum mechanics // Vestn. Sam. gos. tekhn. un-ta. Ser. Fiz.-mat. nauki. 2018. Vol. 22. P. 504–517. DOI: 10.14498/vsgtu1635.
[10] Radaev Y. N., Murashkin E. V. Pseudotensor formulation of the mechanics of hemitropic micropolar media // Problems of strength and ductility. 2020. Vol. 82, no. 4. P. 399–412. DOI: 10.32326/1814-9146-2020-82-4-399-412.
[11] Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On a micropolar theory of growing solids // Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences. 2020. Vol. 24, no. 3. P. 424–444. DOI: 10.14498/vsgtu1792.
[12] Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On theory of linear hemitropic micropolar media // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. IYa Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya. 2020. no. 4. P. 16–24. DOI: 10.37972/chgpu.2020.89.81.031.
[13] Murashkin E. V., Radaev Y. N. Coupled Thermoelasticity of Hemitropic Media. Pseudotensor Formulation // Mechanics of Solids. 2023. Vol. 58, no. 3. P. 802–813. DOI: 10.3103/s0025654423700127.
[14] Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On the polyvariance of the basic equations of coupled thermoelasticity of a micropolar solid // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. IYa Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya. 2023. no. 3(57). P. 112–128. DOI: 10.37972/chgpu.2023.57.3.010.

[15] Murashkin E. V., Radayev Yu. N. Multiweight thermomechanics of hemitropic micropolar solids // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. IYa Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya. 2023. no. 4(58). P. 86–120. DOI: 10.37972/chgpu.2023.58.4.010.
[16] Murashkin E. V., Radayev Y. N. Heat transfer in anisotropic micropolar solids // Mechanics of Solids. 2023. Vol. 58, no. 9. P. 3111–3119. DOI: 10.3103/S0025654423700255.
[17] Murashkin E. V., Radayev Y. N. On Algebraic Triple Weights Formulation of Micropolar Thermoelasticity // Mechanics of Solids. 2024. Vol. 59, no. 1. P. 555–580. DOI: 10.1134/s0025654424700274.
[18] Kovalev V. A., Murashkin E. V., Radaev Yu. N. Mathematical theory of coupled plane harmonic thermoelastic waves in micropolar continua of the first type // Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya Matematika. Mekhanika. Informatika. 2014. Vol. 14, no. 1. P. 77–87. DOI: 10.18500/1816-9791-2014-14-1-77-87.
[19] Kovalev V. A., Murashkin E. V., Radayev Y. N. On weak discontinuities and jump equations on wave surfaces in micropolar thermoelastic continua // Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya Matematika. Mekhanika. Informatika. 2015. Vol. 15, no. 1. P. 79–89. DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-1-79-89.
[20] Murashkin E. V., Radayev Y. N. On a classification of weak discontinuities in micropolar thermoelasticity // Materials Physics and Mechanics. 2015. Vol. 23, no. 1. P. 10–13. DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-1-79-89.
[21] Murashkin E. V., Stadnik N. E. Compatibility conditions in continua with microstrusture // MATEC Web of Conferences. 2017. Vol. 95. P. 12001. DOI: 10.1051/matecconf/20179512001.
[22] Murashkin E. V., Radayev Yu. N. Direct, inverse and mirror wave modes of coupled waves of displacements and microrotations in hemitropic micropolar media // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. IYa Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya. 2021. no. 2(48). P. 115–127. DOI: 10.37972/chgpu.2021.48.2.014.
[23] Murashkin E. V., Radayev Yu. N. Thermal and athermal plane harmonic waves in an acentric isotropic solid // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. IYa Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya. 2023. no. 2(56). P. 99–107. DOI: 10.37972/chgpu.2023.56.2.010.
[24] Green A. E., Naghdi P. M. Thermoelasticity without energy dissipation // Journal of elasticity. 1993. Vol. 31, no. 3. P. 189–208.
[25] Smith A. C. Waves in micropolar elastic solids // Int. J. Eng. Sci. 1967. Vol. 5. P. 741–746. DOI: 10.1016/0020-7225(67)90019-5.
[26] Willson A. J. The micropolar elastic vibrations of a circular cylinder // International Journal of Engineering Science. 1972. Vol. 10, no. 1. P. 17–22. DOI: 10.1016/0020-7225(72) 90071-7.
[27] Achenbach J. Wave propagation in elastic solids. Amsterdam, London, New York : American Elsevier, 2012. 335 c.
[28] Maugin G. A. Acceleration waves in simple and linear viscoelastic micropolar materials // International Journal of Engineering Science. 1974. Vol. 12, no. 2. P. 143–157. DOI: 10.1016/0020-7225(74)90013-5.
[29] Murashkin E. V., Radayev Y. N. Wavenumbers of Doublet and Triplet Plane Thermoelastic Wave in Ultraisotropic Micropolar Medium // Mechanics of Solids. 2024. Vol. 59, no. 6.