Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния.

DOI: 10.37972/chgpu.2024.61.3.010 *EDN: QFDKXY*

Научная статья *УДК: 539.374*

Е. В. Мурашкин

ОБОБЩЕННЫЕ ФИГУРЫ НАЯ ДЛЯ УЛЬТРАГЕМИТРОПНЫХ И УЛЬТРАИЗОТРОПНЫХ МИКРОПОЛЯРНЫХ УПРУГИХ ТЕЛ

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

Аннотация. В настоящей статье обсуждаются вопросы построения фигур Ная для микрополряных тел. Из общего анизотропного микрополярного упругого тела редуцируются к гемитропному, а затем к ультрагемитропному и, окончательно, к ультраизотропному микрополярному телу. Определяющие тензоры четвертого ранга преобразуются к двумерной матричной форме. Итоговые фигуры Ная для рассматриваемых микрополярных тел получаются путем объединения элементарных фигур для определяющих тензоров. Получены фигуры Ная, графически представляющие гемитропное, ультрагемитропное и ультраизотропное микрополярное упругое тело и связями между компонентами асимметричных определяющих тензоров.

Ключевые слова: микрополярная среда, упругий потенциал, определяющий тензор, гемитропное микрополярное тело, ультрагемитропность, ультраизотропность, фигура Ная, матричное представление

Мурашкин Евгений Валерьевич, канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник лаб. моделирования в механике деформируемого твердого тела; e-mail: murashkin@ipmnet.ru; https://orcid.org/0000-0002-3267-4742; AuthorID: 129570

для цитирования: *Мурашкин Е. В.* Обобщенные фигуры Ная для ультрагемитропных и ультраизотропных микрополярных упругих тел // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2024. № 3(61). С. 140–153. DOI: 10.37972/chgpu.2024.61.3.010 EDN: QFDKXY

Поступила: 03.10.2024; принята в печать: 16.12.2024; опубликована: 24.12.24.

Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost.

DOI: `10.37972/chgpu.2024.61.3.010` *EDN: QFDKXY*
Research Article

E. V. Murashkin

GENERALIZED NYE FIGURES FOR ULTRAHEMITROPIC AND ULTRAISOTROPIC MICROPOLAR ELASTIC SOLIDS

Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow, Russia

Abstract. In present paper, the construction of Nye figures for micropolar solids is discussed. A general anisotropic micropolar elastic solid is reduced to a hemitropic, then to an ultrahemitropic, and finally to an ultraisotropic micropolar solid. The constitutive tensors of the fourth rank are transformed to a two-dimensional matrix form. The final Nye figures for the considered micropolar solids are obtained by combining the elementary figures for the constitutive tensors. We obtain Nye figures that graphically represent a hemitropic, ultrahemitropic, and ultraisotropic micropolar elastic solid and the couples between the components of the asymmetric constitutive tensors.

Keywords: micropolar medium, elastic potential, constitutive tensor, hemitropic micropolar solid, ultrahemitropy, ultraisotropy, Nye figure, matrix representation

Evgenii V. Murashkin, Cand. Sci. Phys. & Math., MD, Senior Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences; `e-mail:` evmurashkin@gmail.ru; https://orcid.org/0000-0002-3267-4742; AuthorID: 129570

to cite this article: *Murashkin E. V.* Generalized Nye figures for ultrahemitropic and ultraisotropic micropolar elastic solids // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2024. No 3(61). p. 140–153. DOI: `10.37972/chgpu.2024.61.3.010` EDN: QFDKXY

Received: 03.10.2024; accepted: 16.12.2024; published: 24.12.24.

1. Введение и предварительные сведения В современной инженерной практике все большее применение находят конструкционные метаматериалы и биокомпозиты, обладающие сложной микроструктурой [1–3]. Микро- и наноструктурные состояния таких материалов зачастую реагируют на изменение ориентации координатного базиса трехмерного пространства. Математическое моделирование указанных метаматериалов требует привлечения аппарата микрополярной термомеханики [4–8].

Линейное анизотропное микрополярное тело, характеризующееся 171 определяющими постоянными, может быть редуцировано с помощью специальных координатных представлений [9–12] к гемитропному, а затем к ультрагемитропному и, окончательно, к ультраизотропному.

В настоящей работе метод матричного представления Ная [13–21] применяется к асимметричным тензорам четвертого, для последующего построения фигур Ная для асимметричных моделей гемитропного, ультрагемитропного и ультраизотропного микрополярного упругого тела.

Изложение настоящей статьи базируется на результатах, терминологии и понятиях предыдущих публикаций [22–36].

2. Микрополярный упругий потенциал силовых и моментных напряжений. Рассмотрим трехмерное Евклидово пространство с заданной в нем декартовой прямоугольной системой координат x_i. Зададим микрополярный упругий потенциал $\mathscr{U}$, рассчитанный на единицу инвариантного элемента объема $d\tau$, с естественными тензорными асимметричными аргументами в виде

$$\mathscr{U} = \mathscr{U}(\epsilon_{sm}, \kappa_{sm}), \tag{1}$$

где ϵ_{sm} — асимметричный тензор деформации; κ_{sm} — асимметричный тензор деформации изгиба–кручения. Упругий потенциал в случае использования инвариантного элемента объема является абсолютным инвариантом (скаляром), не зависящим ни от каких преобразований трехмерного пространства.

В случае линейного анизотропного микрополярного упругого тела энергетическая форма в произвольной системе координат можно принять в виде:

$$2\mathscr{U} = \underset{1}{H}_{islm}\epsilon_{is}\epsilon_{lm} + \underset{2}{H}_{islm}\kappa_{is}\kappa_{lm} + \underset{3}{H}_{islm}\epsilon_{is}\kappa_{lm}. \tag{2}$$

Отметим, что единственным определяющим тензором четвертого ранга компоненты которого оказываются чувствительными к преобразованиям зеркального отражения и центральной инверсии трехмерного пространства является определяющий тензор $\underset{3}{H}_{islm}$.

Для определяющих гемитропных тензоров и тензоров координатные представления [9] инвариантные относительно группы вращений получаются в форме [12]

$$
\begin{aligned}
\underset{1}{H}_{islm} &= \underset{1}{a} g_{is} g_{lm} + \underset{1}{b} g_{il} g_{sm} + \underset{1}{c} g_{im} g_{sl} \,, \\
\underset{2}{H}_{islm} &= \underset{2}{a} g_{is} g_{lm} + \underset{2}{b} g_{il} g_{sm} + \underset{2}{c} g_{im} g_{sl} \,, \\
\underset{3}{H}_{islm} &= \underset{3}{a} g_{is} g_{lm} + \underset{3}{b} g_{il} g_{sm} + \underset{3}{c} g_{im} g_{sl} \,.
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Здесь $\underset{\mathfrak{a}}{a}$, $\underset{\mathfrak{a}}{b}$, $\underset{\mathfrak{a}}{c}$, $(\mathfrak{a} = 1, 2, 3)$ — девять определяющих скаляров гемитропного микрополярного упругого тела. “Метаиндекс” $\mathfrak{a}$ — нумерует определяющие скаляры. С точки зрения тензорной алгебры $\underset{\mathfrak{a}}{a}$, $\underset{\mathfrak{a}}{b}$, $\underset{\mathfrak{a}}{c}$, как минимум, являются гемитропными (гемитропными) инвариантами.

Вычислим компоненты определяющих тензоров (3) в декартовой системе координат. Для гемитропного упругого тела ненулевыми компонентами будут:

$$
\begin{aligned}
&\underset{\mathfrak{a}}{\mathscr{H}}_{1111} = \underset{\mathfrak{a}}{\mathscr{H}}_{2222} = \underset{\mathfrak{a}}{\mathscr{H}}_{3333} = \underset{\mathfrak{a}}{a} + \underset{\mathfrak{a}}{b} + \underset{\mathfrak{a}}{c}, \\
&\underset{\mathfrak{a}}{\mathscr{H}}_{1122} = \underset{\mathfrak{a}}{\mathscr{H}}_{2211} = \underset{\mathfrak{a}}{\mathscr{H}}_{1133} = \underset{\mathfrak{a}}{\mathscr{H}}_{3311} = \underset{\mathfrak{a}}{\mathscr{H}}_{2233} = \underset{\mathfrak{a}}{\mathscr{H}}_{3322} = \underset{\mathfrak{a}}{a}, \\
&\underset{\mathfrak{a}}{\mathscr{H}}_{1221} = \underset{\mathfrak{a}}{\mathscr{H}}_{2112} = \underset{\mathfrak{a}}{\mathscr{H}}_{1331} = \underset{\mathfrak{a}}{\mathscr{H}}_{3113} = \underset{\mathfrak{a}}{\mathscr{H}}_{2332} = \underset{\mathfrak{a}}{\mathscr{H}}_{3223} = \underset{\mathfrak{a}}{b}, \\
&\underset{\mathfrak{a}}{\mathscr{H}}_{1212} = \underset{\mathfrak{a}}{\mathscr{H}}_{2121} = \underset{\mathfrak{a}}{\mathscr{H}}_{1313} = \underset{\mathfrak{a}}{\mathscr{H}}_{3131} = \underset{\mathfrak{a}}{\mathscr{H}}_{2323} = \underset{\mathfrak{a}}{\mathscr{H}}_{3232} = \underset{\mathfrak{a}}{c}.
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Оставшиеся 60 компонент в каждом из определяющих тензоров, не указанные в (4), будут равны нулю.

Полуизотропное микрополярное тело назовем ультрагемитропным, если компоненты его определяющих тензоров вообще не изменяются ни при каких преобразованиях трехмерного Евклидова пространства, т.е. являются тензорами с постоянными компонентами [10–12]. Учитывая представление для тензоров четвертого ранга с постоянными компонентами [10], определяющие тензоры можно представить в виде

$$
\underset{\mathfrak{c}}{\mathrm{H}}_{islm} = \underset{\mathfrak{c}}{a} \delta_{is} \delta_{lm} + \underset{\mathfrak{c}}{c} \delta_{im} \delta_{ls} \quad (\mathfrak{c} = 1, 2, 3),
\tag{5}
$$

т.е.

$$
\underset{\mathfrak{c}}{b} = 0 \quad (\mathfrak{c} = 1, 2, 3).
\tag{6}
$$

Определяющие тензоры ультрагемитропного упругого тела имеют ровно 15 ненулевых компонент:

$$
\begin{aligned}
&\underset{\mathfrak{a}}{\mathscr{H}}_{1111} = \underset{\mathfrak{a}}{\mathscr{H}}_{2222} = \underset{\mathfrak{a}}{\mathscr{H}}_{3333} = \underset{\mathfrak{a}}{a} + \underset{\mathfrak{a}}{c}, \\
&\underset{\mathfrak{a}}{\mathscr{H}}_{1122} = \underset{\mathfrak{a}}{\mathscr{H}}_{2211} = \underset{\mathfrak{a}}{\mathscr{H}}_{1133} = \underset{\mathfrak{a}}{\mathscr{H}}_{3311} = \underset{\mathfrak{a}}{\mathscr{H}}_{2233} = \underset{\mathfrak{a}}{\mathscr{H}}_{3322} = \underset{\mathfrak{a}}{a}, \\
&\underset{\mathfrak{a}}{\mathscr{H}}_{1212} = \underset{\mathfrak{a}}{\mathscr{H}}_{2121} = \underset{\mathfrak{a}}{\mathscr{H}}_{1313} = \underset{\mathfrak{a}}{\mathscr{H}}_{3131} = \underset{\mathfrak{a}}{\mathscr{H}}_{2323} = \underset{\mathfrak{a}}{\mathscr{H}}_{3232} = \underset{\mathfrak{a}}{c}.
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Оставшиеся 66 компонент в каждом из определяющих тензоров равны нулю.

пары тензорных индексов (is, lm)	11	22	33	12	13	23	21	31	32
матричные индексы (K, N)	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Таблица 1. Соответствие пар тензорных и матричных индексов.

Изотропное микрополярное упругое тело назовем ультраизотропным, если компоненты двух его определяющих тензоров вообще не изменяются ни при каких преобразованиях трехмерного Евклидова пространства, т.е. являются тензорами с постоянными компонентами.

Учитывая представление для тензоров четвертого ранга с постоянными компонентами [10], для определяющих тензоров четвертого ранга имеем

$$\underset{\mathfrak{c}}{\mathrm{H}}_{islm} = \underset{\mathfrak{c}}{a}\delta_{is}\delta_{lm} + \underset{\mathfrak{c}}{c}\delta_{im}\delta_{ls} \quad (\mathfrak{c} = 1, 2), \tag{8}$$

или

$$\underset{\mathfrak{c}}{\mathrm{H}}_{islm} = \underset{\mathfrak{c}}{a}\,\delta_{is}\delta_{lm} - \frac{1}{2}\underset{\mathfrak{c}}{c}\,(\delta_{il}\delta_{sm} - \delta_{im}\delta_{sl}) + \frac{1}{2}\underset{\mathfrak{c}}{c}\,(\delta_{il}\delta_{sm} + \delta_{im}\delta_{sl}) \quad (\mathfrak{c} = 1, 2). \tag{9}$$

3. Фигуры Ная для ультрагемитропного и ультраизотропного тел. Для компактности записи тензорных уравнений иногда выгодно использовать матричные обозначения [13, pp. 113–115], которые позволяют представить компоненты тензора четвертого ранга элементами матрицы, уменьшив количество индексов с 4 до 2, а тензоры второго ранга — векторами. Однако, необходимо помнить, что двухиндексные экстенсивы, соответствующие тензорам четвертого ранга, не преобразуются по тензорным правилам.

Преобразование определяющих тензоров $\underset{\mathfrak{a}}{\mathscr{H}}_{islm}$ $(\mathfrak{a} = 1, 2, 3)$ в (2) к виду двумерных матриц будем производить заменой индексов согласно таблице 1.

Определяющая матрица $\underset{\mathfrak{a}}{\mathscr{H}}_{KN}$ при учете (3) принимает вид

$$\underset{\mathfrak{a}}{\mathscr{H}}_{KN} = \begin{bmatrix}
\underset{\mathfrak{a}}{a}+\underset{\mathfrak{a}}{b}+\underset{\mathfrak{a}}{c} & \underset{\mathfrak{a}}{a} & \underset{\mathfrak{a}}{a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\underset{\mathfrak{a}}{a} & \underset{\mathfrak{a}}{a}+\underset{\mathfrak{a}}{b}+\underset{\mathfrak{a}}{c} & \underset{\mathfrak{a}}{a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\underset{\mathfrak{a}}{a} & \underset{\mathfrak{a}}{a} & \underset{\mathfrak{a}}{a}+\underset{\mathfrak{a}}{b}+\underset{\mathfrak{a}}{c} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \underset{\mathfrak{a}}{c} & 0 & 0 & \underset{\mathfrak{a}}{b} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \underset{\mathfrak{a}}{c} & 0 & 0 & \underset{\mathfrak{a}}{b} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \underset{\mathfrak{a}}{c} & 0 & 0 & \underset{\mathfrak{a}}{b} \\
0 & 0 & 0 & \underset{\mathfrak{a}}{b} & 0 & 0 & \underset{\mathfrak{a}}{c} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \underset{\mathfrak{a}}{b} & 0 & 0 & \underset{\mathfrak{a}}{c} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \underset{\mathfrak{a}}{b} & 0 & 0 & \underset{\mathfrak{a}}{c}
\end{bmatrix}. \tag{10}$$

Заметим, что матрица $\underset{\mathfrak{a}}{\mathscr{H}}_{KN}$ симметрична относительно главной диагонали. Результат построения фигуры Ная для определяющего гемитропного тензора представлен на рис. 1.

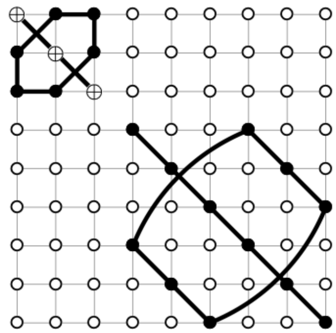

Рис. 1. Двумерная фигура Ная матрицы определяющего тензора $\underset{\mathfrak{a}}{\mathscr{H}}_{KN}$ гемитропного микрополярного упругого тела. ∘ — нулевые компоненты, • — компоненты отличные от нуля, $\oplus = (\underset{\mathfrak{a}}{\mathscr{H}}_{12} + \underset{\mathfrak{a}}{\mathscr{H}}_{44} + \underset{\mathfrak{a}}{\mathscr{H}}_{47})$, жирными отрезками и дугами соединены равные компоненты.

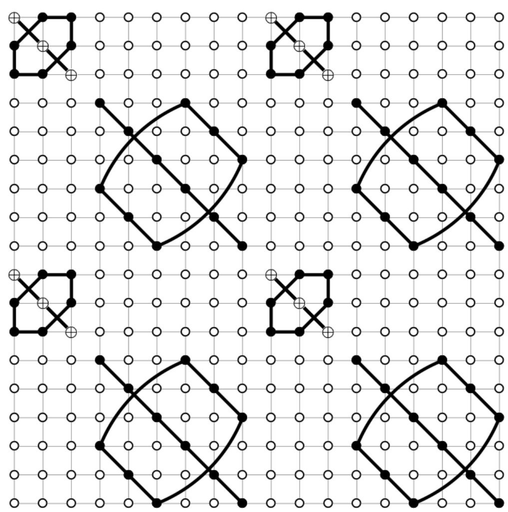

Рис. 2. Двумерная фигура Ная гемитропного микрополярного упругого тела. ∘ — нулевые компоненты, • — компоненты отличные от нуля, $\oplus = (\underset{\mathfrak{a}}{\mathscr{H}}_{12} + \underset{\mathfrak{a}}{\mathscr{H}}_{44} + \underset{\mathfrak{a}}{\mathscr{H}}_{47})$, жирными отрезками и дугами соединены равные компоненты.

Двумерная фигура Ная для гемитропного микрополярного упругого тела может быть получена путем объединения элементарных фигур для определяющих матриц (см. рис. 1). На рис. 2 представлена фигура Ная для определяющих уравнений гемитропного микрополярного упругого тела. Пересечение жирных линий на рис. 4 не говорит о связи соответсвующих компонент определяющих матриц.

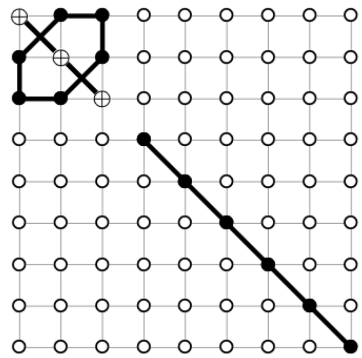

Рис. 3. Двумерная фигура Ная орпеделяющей матрицы $\underset{\mathfrak{a}}{\mathscr{H}}_{KN}$ ультрагемитропного/ультраизотропного микрополярного упругого тела. $\circ$ — нулевые компоненты, $\bullet$ — компоненты отличные от нуля, $\oplus = (\underset{\mathfrak{a}}{\mathscr{H}}_{12} + \underset{\mathfrak{a}}{\mathscr{H}}_{44} + \underset{\mathfrak{a}}{\mathscr{H}}_{47})$, жирными отрезками и дугами соединены равные компоненты.

Определяющая ультрагемитропная/ультраизотропная матрица $\underset{\mathfrak{a}}{\mathscr{H}}_{KN}$ при учете (3) принимает вид

$$\underset{\mathfrak{a}}{\mathscr{H}}_{KN} = \begin{bmatrix} \underset{\mathfrak{a}}{a} + \underset{\mathfrak{a}}{c} & \underset{\mathfrak{a}}{a} & \underset{\mathfrak{a}}{a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \underset{\mathfrak{a}}{a} & \underset{\mathfrak{a}}{a} + \underset{\mathfrak{a}}{c} & \underset{\mathfrak{a}}{a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \underset{\mathfrak{a}}{a} & \underset{\mathfrak{a}}{a} & \underset{\mathfrak{a}}{a} + \underset{\mathfrak{a}}{c} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \underset{\mathfrak{a}}{c} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \underset{\mathfrak{a}}{c} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \underset{\mathfrak{a}}{c} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \underset{\mathfrak{a}}{c} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \underset{\mathfrak{a}}{c} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \underset{\mathfrak{a}}{c} \end{bmatrix}. \tag{11}$$

Фигура Ная для определяющей ультрагемитропной/ультраизотропной матрицы представлена на рис. 3. Двумерные фигуры Ная для ультрагемитропного и ультраизотропного микрополярного упругого тела получаются путем объединения элементарных фигур для определяющих ультрагемитропных и ультраизотропных матриц и показаны на рис. 4 и 5 соответственно.

4. Заключение В работе обсуждаются и строятся двумерные фигуры Ная, адаптированная к представлению асимметричных определяющих тензоров.

(1) Общая анизотропная форма микрополярного упругого потенциала напряжений редуцируется к гемитропной форме, а затем к ультрагемитропной и, окончательно, к ультраизотропной.

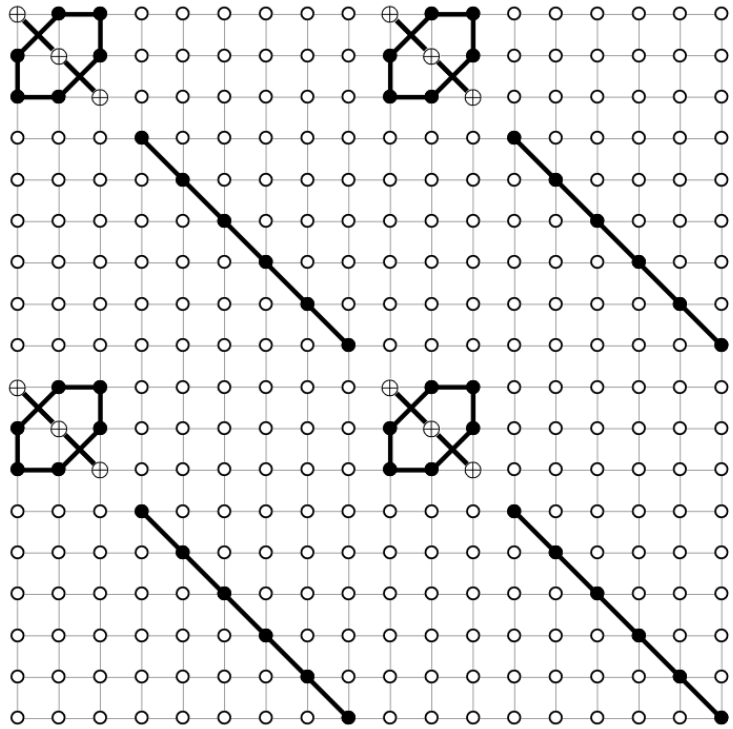

Рис. 4. Двумерная фигура Ная ультрагемитропного микрополярного упругого тела. $\circ$ — нулевые компоненты, $\bullet$ — компоненты отличные от нуля, $\oplus = (\underset{\mathfrak{a}}{\mathscr{H}}_{12} + \underset{\mathfrak{a}}{\mathscr{H}}_{44} + \underset{\mathfrak{a}}{\mathscr{H}}_{47})$, жирными отрезками и дугами соединены равные компоненты.

(2) Построены двумерные фигуры Ная для асимметричных определяющих тензоров и тензоров гемитропного, ультрагемитропного и ультраизотропного упругого микрополярного тела.
(3) Получены фигуры Ная, графически представляющие гемитропное, ультрагемитропное и ультраизотропное микрополярное упругое тело и связями между компонентами асимметричных определяющих тензоров.

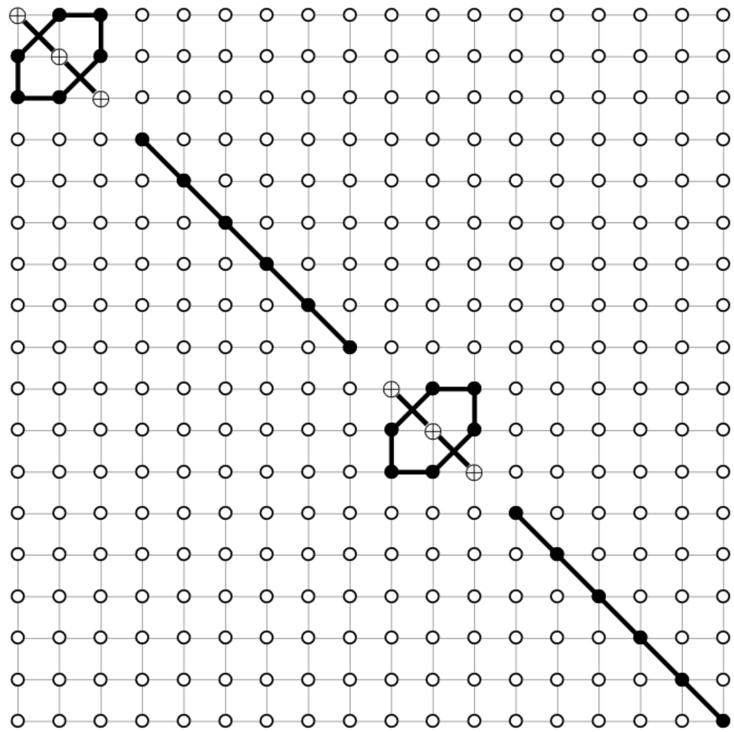

Рис. 5. Двумерная фигура Ная ультраизотропного микрополярного упругого тела. $\circ$ — нулевые компоненты, $\bullet$ — компоненты отличные от нуля, $\oplus = (\underset{\mathfrak{a}}{\mathscr{H}}_{12} + \underset{\mathfrak{a}}{\mathscr{H}}_{44} + \underset{\mathfrak{a}}{\mathscr{H}}_{47})$, жирными отрезками и дугами соединены равные компоненты.

ДОПОЛНИТЕЛЬНО

Вклад авторов. Все авторы подтверждают соответствие своего авторства международным критериям ICMJE (все авторы внесли существенный вклад в разработку концепции, проведение исследования и подготовку статьи, прочли и одобрили финальную версию перед публикацией).
Конфликт интересов. Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.
Источник финансирования. Работа выполнена по теме государственного задания (№ госрегистрации 124012500437-9).

ADDITIONAL INFORMATION

Authors' contribution. All authors confirm that their authorship meets the international ICMJE criteria (all authors have made a significant contribution to the development of the concept, research and preparation of the article, read and approved the final version before publication).
Competing interests. The authors declare that they have no competing interests.
Funding. The study was carried out on the topic of a state assignment (state registration number 124012500437-9).

ЛИТЕРАТУРА

[1] DeValk Tyler, Hestetune Jonah, Lakes Roderic S. Nonclassical thermal twist of the chiral gyroid lattice // Phys. Status Solidi (B). 2022. Vol. 259, no. 12. P. 2200338. doi:10.1002/pssb.202200338.

[2] Aouadi Moncef, Ciarletta Michele, Tibullo Vincenzo. Analytical aspects in strain gradient theory for chiral Cosserat thermoelastic materials within three Green-Naghdi models // Journal of Thermal Stresses. 2019. Vol. 42, no. 6. P. 681–697. doi:10.1080/01495739.2019.1571974.

[3] Lakes Roderic. Composites and metamaterials. Singapore : World Scientific, 2020.

[4] Cosserat E., Cosserat F. Théorie des corps déformables. Paris : A. Hermann et fils, 1909.

[5] Nowacki W. Theory of Asymmetric Elasticity. Oxford, New York, Toronto, Sydney, Paris, Frankfurt : Pergamon Press, 1986. viii+383 p.

[6] Altenbach H., Maugin G. A., Erofeev V. (eds.). Mechanics of generalized continua. Berlin : Springer, 2011. Vol. 7. XX+352 p. DOI: 10.1007/978-3-642-19219-7.

[7] Maugin G. A. Non-classical continuum mechanics. Singapore : Springer Verlag, 2017. XVII+259 p. DOI: 10.1007/978-981-10-2434-4.

[8] Neuber H. Über Probleme der Spannungskonzentration im Cosserat-Körper // Acta Mechanica. 1966. Vol. 2. P. 48–69. DOI: 10.1007/BF01176729.

[9] Jeffreys H. Cartesian Tensors. Cambridge : Cambridge University Press, 1931. 101 p.

[10] Гуревич Г. Б. Основы теории алгебраических инвариантов. М., Л. : ГИТТЛ, 1948. 408 с. [Gurevich G. B. Foundations of the theory of algebraic invariants. Gröningen, P. Noordhoff, 1964. 429 p.].

[11] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Ковариантно постоянные тензоры в пространствах Евклида. Элементы теории // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. ИЯ Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2022. № 2(52). С. 106–115. DOI: 10.37972/chgpu.2022.52.2.012.

[12] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Ковариантно постоянные тензоры в пространствах Евклида. Приложения к механике континуума // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. ИЯ Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2022. № 2(52). С. 118–127. DOI: 10.37972/chgpu.2022.52.2.013.

[13] Nye J. F. Physical Properties of Crystals, their representation by tensors and matrices. Oxford : Clarendon Press, 1957. 322+xv p.

[14] Wooster W. A. Experimental Crystal Physics. Oxford : Clarendon Press, 1957. 116+vi p.

[15] Voigt W. Lehrbuch der Kristallphysik (mit Ausschluß der Kristalloptik). Fachmedien, Wiesbaden : Springer, 1966. 116+vi p.

[16] Standards on Piezoelectric Crystals // Proceedings of the I.R.E. New York : IRE, 1960. P. 18.

[17] Zheng Q. S., Spencer A. J. M. On the canonical representations for Kronecker powers of orthogonal tensors with application to material symmetry problems // Int. J. Engng Sci. 2021. Vol. 31, no. 4. P. 617–635.

[18] Krylova E. Yu, Murashkin E. V., Radaev Y. N. The Nye cells and figures for athermic hemitropic, isotropic, and ultraisotropic micropolar elastic solids // Mechanics of Solids. 2024. Vol. 59, no. 3. P. 1311–1320. DOI: 10.1134/s0025654424603719.

[19] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Двумерные фигуры Ная для гемитропных микрополярных упругих тел // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, № 1. С. 109–122. DOI: 10.18500/1816-9791-2024-24-1-109-122.

[20] Крылова Е. Ю., Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Переходные микрополярные модели анизотропной упругости // Вычислительные технологии и прикладная математика : материалы III науч. конф. с междунар. участием г. Комсомольск-на-Амуре 7–11 октября

2024. Комсомольский-на-Амуре государственный университет Комсомольск-на-Амуре, 2024. С. 226–229.
[21] Murashkin E. V., Radayev Y. N. Two-dimensional Nye figures for some micropolar elastic solids // Mechanics of Solids. 2023. Vol. 58, no. 6. P. 2254–2268. DOI: 10.3103/S0025654423700243.
[22] Радаев Ю. Н. Правило множителей в ковариантных формулировках микрополярных теорий механики континуума // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2018. Т. 22. С. 504–517. DOI: 10.14498/vsgtu1635.
[23] Радаев Ю.Н., Мурашкин Е.В. Псевдотензорная формулировка механики гемитропных микрополярных сред // Проблемы прочности и пластичности. 2020. Vol. 82, no. 4. P. 399–412. DOI: 10.32326/1814-9146-2020-82-4-399-412.
[24] Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On a micropolar theory of growing solids // Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences. 2020. Vol. 24, no. 3. P. 424–444. DOI: 10.14498/vsgtu1792.
[25] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. К теории линейных гемитропных микрополярных сред // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. ИЯ Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2020. № 4. С. 16–24. DOI: 10.37972/chgpu.2020.89.81.031.
[26] Murashkin E. V., Radaev Y. N. Coupled Thermoelasticity of Hemitropic Media. Pseudotensor Formulation // Mechanics of Solids. 2023. Vol. 58, no. 3. P. 802–813. DOI: 10.3103/s0025654423700127.
[27] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. К поливариантности основных уравнений связанной термоупругости микрополярного тела // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния. 2023. № 3(57). С. 112–128. DOI: 10.37972/chgpu.2023.57.3.010.
[28] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Мультивесовая термомеханика гемитропных микрополярных тел // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния. 2023. № 4(58). С. 86–120. DOI: 10.37972/chgpu.2023.58.4.010.
[29] Murashkin E. V., Radayev Y. N. On Algebraic Triple Weights Formulation of Micropolar Thermoelasticity // Mechanics of Solids. 2024. Vol. 59, no. 1. P. 555–580. DOI: 10.1134/s0025654424700274.
[30] Ковалев В. А., Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Математическая теория связанных плоских гармонических термоупругих волн в микрополярных континуумах первого типа // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Математика. Механика. Информатика. 2014. Vol. 14, no. 1. P. 77–87. DOI: 10.18500/1816-9791-2014-14-1-77-87.
[31] Kovalev V. A., Murashkin E. V., Radayev Y. N. On weak discontinuities and jump equations on wave surfaces in micropolar thermoelastic continua // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2015. Vol. 15, no. 1. P. 79–89. DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-1-79-89.
[32] Murashkin E. V., Radayev Y. N. On a classification of weak discontinuities in micropolar thermoelasticity // Materials Physics and Mechanics. 2015. Vol. 23, no. 1. P. 10–13. DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-1-79-89.
[33] Murashkin E. V., Stadnik N. E. Compatibility conditions in continua with microstrusture // MATEC Web of Conferences. 2017. Vol. 95. P. 12001. DOI: 10.1051/matecconf/20179512001.
[34] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Прямые, инверсные и зеркальные волновые моды связанных волн перемещений и микровращений в гемитропных микрополярных средах // Вестник Чувашского государственного педагогического университета

им. И. Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния. 2021. № 2(48). С. 115–127. DOI: 10.37972/chgpu.2021.48.2.014.

[35] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Термические и атермические плоские гармонические волны в ацентрическом изотропном теле // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния. 2023. № 2(56). С. 99–107. DOI: 10.37972/chgpu.2023.56.2.010.

[36] Murashkin E. V., Radayev Y. N. Heat transfer in anisotropic micropolar solids // Mechanics of Solids. 2023. Vol. 58, no. 9. P. 3111–3119. DOI: 10.3103/S0025654423700255.

REFERENCES

[1] DeValk Tyler, Hestetune Jonah, Lakes Roderic S. Nonclassical thermal twist of the chiral gyroid lattice // Phys. Status Solidi (B). 2022. Vol. 259, no. 12. P. 2200338. doi:10.1002/pssb.202200338.

[2] Aouadi Moncef, Ciarletta Michele, Tibullo Vincenzo. Analytical aspects in strain gradient theory for chiral Cosserat thermoelastic materials within three Green-Naghdi models // Journal of Thermal Stresses. 2019. Vol. 42, no. 6. P. 681–697. doi:10.1080/01495739.2019.1571974.

[3] Lakes Roderic. Composites and metamaterials. Singapore : World Scientific, 2020.

[4] Cosserat E., Cosserat F. Théorie des corps déformables. Paris : A. Hermann et fils, 1909.

[5] Nowacki W. Theory of Asymmetric Elasticity. Oxford, New York, Toronto, Sydney, Paris, Frankfurt : Pergamon Press, 1986. viii+383 p.

[6] Altenbach H., Maugin G. A., Erofeev V. (eds.). Mechanics of generalized continua. Berlin : Springer, 2011. Vol. 7. XX+352 p. DOI: 10.1007/978-3-642-19219-7.

[7] Maugin G. A. Non-classical continuum mechanics. Singapore : Springer Verlag, 2017. XVII+259 p. DOI: 10.1007/978-981-10-2434-4.

[8] Neuber H. Über Probleme der Spannungskonzentration im Cosserat-Körper // Acta Mechanica. 1966. Vol. 2. P. 48–69. DOI: 10.1007/BF01176729.

[9] Gurevich G. B. Fundamentals of the Theory of Algebraic Invariants. Moscow : GITTL, 1948. 408 p.

[10] Jeffreys H. Cartesian Tensors. Cambridge : Cambridge University Press, 1931. 101 p.

[11] Murashkin E. V., Radayev Yu. N. Covariantly Constant Tensors in Euclidean Spaces. Elements of Theory // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. IYa Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya. 2022. no. 2(52). P. 106–115. DOI: 10.37972/chgpu.2022.52.2.012.

[12] Murashkin E. V., Radayev Yu. N. Covariantly Constant Tensors in Euclidean Spaces. Applications to Continuum Mechanics // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. IYa Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya. 2022. no. 2(52). P. 118–127. DOI: 10.37972/chgpu.2022.52.2.013.

[13] Nye J. F. Physical Properties of Crystals, their representation by tensors and matrices. Oxford : Clarendon Press, 1957. 322+xv p.

[14] Wooster W. A. Experimental Crystal Physics. Oxford : Clarendon Press, 1957. 116+vi p.

[15] Voigt W. Lehrbuch der Kristallphysik (mit Ausschluß der Kristalloptik). Fachmedien, Wiesbaden : Springer, 1966. 116+vi p.

[16] Standards on Piezoelectric Crystals // Proceedings of the I.R.E. New York : IRE, 1960. P. 18.

[17] Zheng Q. S., Spencer A. J. M. On the canonical representations for Kronecker powers of orthogonal tensors with application to material symmetry problems // Int. J. Engng Sci. 2021. Vol. 31, no. 4. P. 617–635.

[18] Krylova E. Yu, Murashkin E. V., Radaev Y. N. The Nye cells and figures for athermic hemitropic, isotropic, and ultraisotropic micropolar elastic solids // Mechanics of Solids. 2024. Vol. 59, no. 3. P. 1311–1320. DOI: 10.1134/s0025654424603719.

[19] Murashkin E. V., Radaev Y. N. Two-dimensional Nye figures for hemitropic micropolar elastic solids // Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics. 2024. Vol. 24, no. 1. P. 109–122. DOI: 10.18500/1816-9791-2024-24-1-109-122.
[20] Krylova E. Yu., Murashkin E. V., Radaev Y. N. Transient micropolar models of anisotropic elasticity // Computational technologies and applied mathematics: Proc. III scientific. conf. with international. participation, Komsomolsk-on-Amur, October 7–11, 2024. KnAGU, 2024. P. 226–229.
[21] Murashkin E. V., Radayev Y. N. Two-dimensional Nye figures for some micropolar elastic solids // Mechanics of Solids. 2023. Vol. 58, no. 6. P. 2254–2268. DOI: 10.3103/S0025654423700243.
[22] Radaev Y. N. The multiplier rule in covariant formulations of micropolar theories of continuum mechanics // Vestn. Sam. gos. tekhn. un-ta. Ser. Fiz.-mat. nauki. 2018. Vol. 22. P. 504–517. DOI: 10.14498/vsgtu1635.
[23] Radaev Y. N., Murashkin E. V. Pseudotensor formulation of the mechanics of hemitropic micropolar media // Problems of strength and ductility. 2020. Vol. 82, no. 4. P. 399–412. DOI: 10.32326/1814-9146-2020-82-4-399-412.
[24] Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On a micropolar theory of growing solids // Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences. 2020. Vol. 24, no. 3. P. 424–444. DOI: 10.14498/vsgtu1792.
[25] Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On theory of linear hemitropic micropolar media // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. IYa Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya. 2020. no. 4. P. 16–24. DOI: 10.37972/chgpu.2020.89.81.031.
[26] Murashkin E. V., Radaev Y. N. Coupled Thermoelasticity of Hemitropic Media. Pseudotensor Formulation // Mechanics of Solids. 2023. Vol. 58, no. 3. P. 802–813. DOI: 10.3103/s0025654423700127.
[27] Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On the polyvariance of the basic equations of coupled thermoelasticity of a micropolar solid // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. IYa Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya. 2023. no. 3(57). P. 112–128. DOI: 10.37972/chgpu.2023.57.3.010.
[28] Murashkin E. V., Radayev Yu. N. Multiweight thermomechanics of hemitropic micropolar solids // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. IYa Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya. 2023. no. 4(58). P. 86–120. DOI: 10.37972/chgpu.2023.58.4.010.
[29] Murashkin E. V., Radayev Y. N. Heat transfer in anisotropic micropolar solids // Mechanics of Solids. 2023. Vol. 58, no. 9. P. 3111–3119. DOI: 10.3103/S0025654423700255.
[30] Murashkin E. V., Radayev Y. N. On Algebraic Triple Weights Formulation of Micropolar Thermoelasticity // Mechanics of Solids. 2024. Vol. 59, no. 1. P. 555–580. DOI: 10.1134/s0025654424700274.
[31] Kovalev V. A., Murashkin E. V., Radaev Yu. N. Mathematical theory of coupled plane harmonic thermoelastic waves in micropolar continua of the first type // Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya Matematika. Mekhanika. Informatika. 2014. Vol. 14, no. 1. P. 77–87. DOI: 10.18500/1816-9791-2014-14-1-77-87.
[32] Kovalev V. A., Murashkin E. V., Radayev Y. N. On weak discontinuities and jump equations on wave surfaces in micropolar thermoelastic continua // Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya Matematika. Mekhanika. Informatika. 2015. Vol. 15, no. 1. P. 79–89. DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-1-79-89.
[33] Murashkin E. V., Radayev Y. N. On a classification of weak discontinuities in micropolar thermoelasticity // Materials Physics and Mechanics. 2015. Vol. 23, no. 1. P. 10–13. DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-1-79-89.

[34] Murashkin E. V., Stadnik N. E. Compatibility conditions in continua with microstrusture // MATEC Web of Conferences. 2017. Vol. 95. P. 12001. DOI: 10.1051/matecconf/20179512001.

[35] Murashkin E. V., Radayev Yu. N. Direct, inverse and mirror wave modes of coupled waves of displacements and microrotations in hemitropic micropolar media // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. IYa Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya. 2021. no. 2(48). P. 115–127. DOI: 10.37972/chgpu.2021.48.2.014.

[36] Murashkin E. V., Radayev Yu. N. Thermal and athermal plane harmonic waves in an acentric isotropic solid // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. IYa Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya. 2023. no. 2(56). P. 99–107. DOI: 10.37972/chgpu.2023.56.2.010.