

И. В. Меньшова

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ ФАЙЛОНА – РИБЬЕРА В ДВУМЕРНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Институт теории прогноза землетрясений и математической геофизики Российской академии наук, г. Москва

Аннотация. Приводятся периодические решения (в тригонометрических рядах) красовых задач теории упругости для полуполосы в случае симметричной и обратно-симметричной деформаций. Решения даются для двух возможных типов продолжений в полуплоскость: 1) на продольных сторонах полуполосы заданы нулевые поперечные перемещения и касательные напряжения; 2) на продольных сторонах полуполосы равны нулю продольные перемещения и нормальные напряжения. Используются два подхода: традиционный способ решения задачи в перемещениях и решение на основе метода начальных функций (в частности, обратный метод). В том случае, когда на торце полуполосы заданы сосредоточенные нагрузки, представимые дельта-функцией (нормальная сосредоточенная сила, сосредоточенная касательная нагрузка) или ее первой производной (сосредоточенный изгибающий момент, сосредоточенный диполь), ряды можно свернуть в замкнутые выражения. Подробно рассмотрены некоторые особенности построения решений.

Ключевые слова: краевая задача, периодические решения Файлона – Рибьера, полуполоса, метод начальных функций, обратный метод.

УДК: 539.3

Актуальность исследуемой проблемы. Решения в тригонометрических рядах (Файлона – Рибьера), в силу своей простоты, доступности и наглядности, приобрели необыкновенную популярность. Вместе с тем, трудно указать источник, в котором бы эти решения были рассмотрены с необходимой полнотой. Кроме того, несмотря на кажущуюся простоту, построение решений иногда связано с определенными трудностями, некоторые из которых отражены в работе. В статье наряду с классическим подходом к построению решений показывается, как те же проблемы могут быть достаточно просто и эффективно решены с помощью метода начальных функций.

1. Введение. Решения даются в полуполосе $\{\Pi^+ : x \geq 0; |y| \leq 1\}$ для двух типов граничных условий на продольных сторонах полуполосы $y = \pm 1$:

$$v(x, \pm 1) = \tau_{xy}(x, \pm 1) = 0 \quad (1.1)$$

и

$$u(x, \pm 1) = \sigma_y(x, \pm 1) = 0. \quad (1.2)$$

Поступила 10.03.2015

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 13-08-00118, 15-41-02644).

Здесь u, v — соответственно продольное (в направлении оси x) и поперечное (в направлении оси y) перемещения. Для каждого из граничных условий (1.1), (1.2) рассмотрены симметричная и обратно симметричная задачи: итого четыре задачи для полуполосы с заданными на ее торце нормальными и касательными напряжениями.

В действительности, правильнее говорить о периодическом решении краевой задачи в полуплоскости, когда граничные условия (1.1) или (1.2) являются условиями периодичности решения. В этом случае в угловых точках полуполосы $\{x = 0, y = \pm 1\}$ известны значения не только определенных там функций, но и всех их производных по y , т. е. угловые точки входят в решение вместе с y -окрестностью. При решении краевой задачи в полуполосе, как таковой, (например, первой основной задачи теории упругости) для обеспечения единственности решения в угловых точках полуполосы должны быть заданы некоторые дополнительные условия [1]. Эти условия определяются, в частности, тем, как решение из правой полуполосы Π^+ продолжается в левую полуполосу $\{\Pi^- : x \leq 0; |y| \leq 1\}$: с какими граничными условиями на продольных сторонах полуполосы Π^- [2]. Можно показать, что в классических решениях Файлена — Рибьера неявно предполагается, что тип граничных условий при продолжении решения из полуполосы Π^+ в полуполосу Π^- не меняется.

Решения Файлена — Рибьера могут служить удобным средством проверки новых решений в полуполосе со свободными, защемленными, подкрепленными ребрами жесткости продольными сторонами, т. е. в тех случаях, когда решение краевой задачи представляется в виде разложений по функциям Фадля — Папковича [3].

Обычная схема решения периодической краевой задачи в полуполосе состоит в следующем. С помощью известных зависимостей закона Гука между напряжениями и перемещениями для плоского напряженного состояния

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{2}{1-\nu} \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \nu \frac{\partial V}{\partial y} \right); \\ \sigma_y = \frac{2}{1-\nu} \left(\frac{\partial V}{\partial y} + \nu \frac{\partial U}{\partial x} \right); \\ \tau_{xy} = \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \end{cases} \quad (1.3)$$

запишем уравнения равновесия

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad (1.4)$$

в таком виде

$$\begin{cases} \frac{2}{1-\nu} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = 0; \\ \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + \frac{2}{1-\nu} \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0, \end{cases} \quad (1.5)$$

где $U = Gu$, $V = Gv$, G — модуль упругости при сдвиге, ν — коэффициент Пуассона.

Вводя функцию перемещений $F(x, y)$ по формулам:

$$\begin{aligned} U &= -\frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}, \\ V &= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \end{aligned} \quad (1.6)$$

и подставляя (1.6) в (1.5), тождественно удовлетворим первому уравнению системы (1.5), а из второго получим бигармоническое уравнение для функции $F(x, y)$:

$$\frac{\partial^4 F}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} = 0. \quad (1.7)$$

Зависимости для напряжений через функцию перемещений найдем согласно (1.6) и (1.3):

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right), \\ \sigma_y &= \frac{\partial}{\partial y} \left((2+\nu) \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right), \\ \tau_{xy} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right). \end{aligned} \quad (1.8)$$

Если же разрешающую функцию $F(x, y)$ ввести по формулам:

$$\begin{aligned} U(x, y) &= \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}; \\ V(x, y) &= -\frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}, \end{aligned} \quad (1.9)$$

то тождественно удовлетворится второе уравнение системы (1.5), а из первого получим бигармоническое уравнение (1.7). В этом случае формулы для напряжений будут иметь вид:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial}{\partial x} \left((2+\nu) \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right), \\ \sigma_y &= -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right), \\ \tau_{xy} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right). \end{aligned} \quad (1.10)$$

Разыскивая решение уравнения (1.7) в виде

$$F(x, y) = \phi(y) e^{\lambda x}, \quad (1.11)$$

получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\phi^{IV}(y) + 2\lambda^2 \phi''(y) + \lambda^4 \phi(y) = 0. \quad (1.12)$$

Соответствующее характеристическое уравнение имеет два двукратных корня $\pm i\lambda$, которым отвечает функция

$$\phi(y) = (C_1 + C_2 y) \sin \lambda y + (C_3 + C_4 y) \cos \lambda y, \quad (1.13)$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 — произвольные постоянные.

Для удобства разделим задачу на симметричную и обратно симметричную.

2. Симметричная задача (симметричное продолжение в правую полуплоскость). Будем считать, что деформация полуполосы симметрична относительно оси x . Схема

приложения нормальной и касательной нагрузок на торце полуполосы, а также способ продолжения решения во всю правую полуплоскость показаны на рис. 1.

Рассмотрим два варианта построения решения: 1) когда функция перемещений вводится по формулам (1.6) и 2) когда функция перемещений вводится формулами (1.9). В силу симметрии задачи, $V(x, y)$, $\tau_{xy}(x, y)$ — нечетные, а $\sigma_x(x, y)$, $\sigma_y(x, y)$, $U(x, y)$ — четные функции по переменной y . Поэтому в первом случае $\phi(y)$ в формуле (1.11) должна быть нечетной функцией, а во втором — чистной. Следовательно, в первом случае

$$F(x, y) = (C_1 \sin \lambda y + C_4 y \cos \lambda y) e^{\lambda x}, \quad (2.1)$$

а во втором

$$F(x, y) = (C_3 \cos \lambda y + C_2 y \sin \lambda y) e^{\lambda x}. \quad (2.2)$$

Удовлетворяя граничным условиям (1.1) с помощью формул (1.6), (1.8), получим систему из двух линейных однородных алгебраических уравнений относительно неизвестных C_1, C_4 :

$$\begin{cases} C_1(1 + \nu)\lambda^2 \sin \lambda + C_4\lambda((1 + \nu)\lambda \cos \lambda - 2(1 - \nu) \sin \lambda) = 0; \\ C_1(1 + \nu)\lambda^3 \sin \lambda + C_4\lambda^3((1 + \nu)\lambda \cos \lambda + 2\nu \sin \lambda) = 0. \end{cases} \quad (2.3)$$

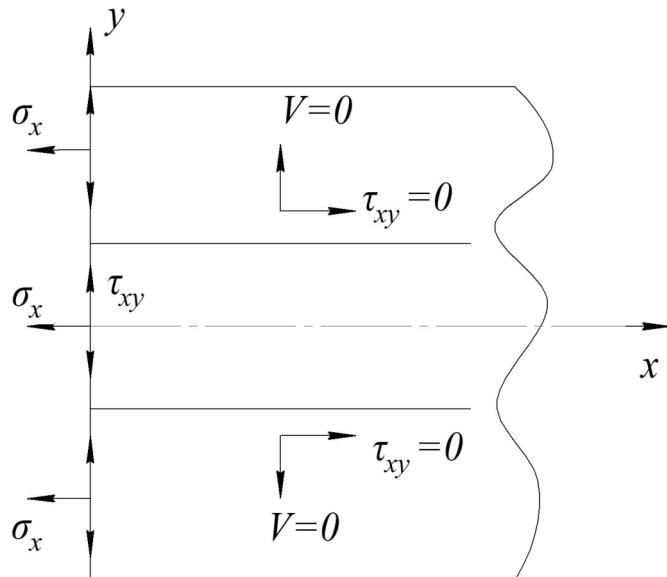


Рис. 1. Симметричная деформация полуполосы:
схема приложения внешней нагрузки и способ
продолжения решения в правую полуплоскость

Приравнивая к нулю определитель системы (2.3), придем к характеристическому уравнению

$$\lambda^4 \sin^2 \lambda = 0, \quad (2.4)$$

которое имеет шесть нулевых корней и бесконечное множество корней $\pm k\pi$ ($k = 1, 2, \dots$) кратности 2.

Выразим из первого уравнения системы (2.3) C_4 через C_1 и подставим в выражение (1.13), полагая $C_2 = C_3 = 0$,

$$\phi(y) = C_1 \left\{ \sin \lambda y - \frac{(1+\nu)\lambda^2 \sin \lambda}{\lambda((1+\nu)\lambda \cos \lambda - 2(1-\nu) \sin \lambda)} y \cos \lambda y \right\}. \quad (2.5)$$

Полагая $\lambda = q_k = -k\pi$, получим соответствующее числам q_k выражение для собственных функций краевой задачи, которое можно записать так: $\phi_k(y) = C_k \sin q_k y$. А принимая в (2.5) $\lambda \rightarrow 0$, получим значение собственной функции, отвечающей корню $\lambda = 0$: $\phi_0(y) = 0$. Тогда, в силу двукратности чисел q_k , функция $F(x, y)$ принимает вид:

$$F(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} (A_k + B_k x) \sin q_k y e^{q_k x}. \quad (2.6)$$

Подставляя ее в формулы (1.6) и (1.8), найдем выражения для перемещений и напряжений. Заметим, что функция (2.6) не содержит той части решения, которая отвечает нулевым корням характеристического уравнения (2.4). Следовательно, оно не будет и в формулах для перемещений и напряжений в полуполосе:

$$\begin{aligned} U(x, y) &= -\frac{1+\nu}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (A_k q_k + B_k (1 + q_k x)) q_k \cos q_k y e^{q_k x}, \\ V(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \frac{1+\nu}{2} q_k + B_k (2 + \frac{1+\nu}{2} q_k x) \right) q_k \sin q_k y e^{q_k x}, \\ \sigma_x(x, y) &= -\sum_{k=1}^{\infty} (A_k (1+\nu) q_k + B_k (2 + (1+\nu) q_k x)) q_k^2 \cos q_k y e^{q_k x}, \\ \sigma_y(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} (A_k (1+\nu) q_k + B_k (2(2+\nu) + (1+\nu) q_k x)) q_k^2 \cos q_k y e^{q_k x}, \\ \tau_{xy}(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} (A_k (1+\nu) q_k + B_k (3+\nu + (1+\nu) q_k x)) q_k^2 \sin q_k y e^{q_k x}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Воспользуемся теперь представлением (2.2) для функции $F(x, y)$. Выразив перемещения и напряжения через $F(x, y)$ по формулам (1.9), (1.10) и удовлетворяя граничным условиям (1.1), получим следующую систему из двух однородных уравнений относительно C_2, C_3 :

$$\begin{cases} C_2(\sin \lambda + \lambda \cos \lambda) \lambda - C_3 \lambda^2 \sin \lambda = 0; \\ C_2 ((\nu - 3) \lambda^2 \sin \lambda + (\nu - 1) \lambda^3 \cos \lambda) + C_3 (1 - \nu) \lambda^3 \sin \lambda = 0. \end{cases} \quad (2.8)$$

Характеристическое уравнение системы (2.8) совпадает с характеристическим уравнением системы (2.4).

Выразив из первого уравнения (2.8) C_2 через C_3 и подставив в формулу (1.3), полагая $C_1 = C_4 = 0$, получим

$$\phi(y) = C_3 \left\{ \frac{\lambda \sin \lambda}{\sin \lambda + \lambda \cos \lambda} y \sin \lambda y + \cos \lambda y \right\}. \quad (2.9)$$

При $\lambda = q_k$ собственные функции, соответствующие этим числам, можно представить как $\phi_k(y) = C_k \cos q_k y$. А при $\lambda = 0$ $\phi_0(y) = C_3$. Учитывая двукратность чисел q_k и шестикратность нулевого корня, функцию $F(x, y)$ запишем так:

$$F(x, y) = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + fx^5 + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k^* + B_k^* x) \cos q_k y e^{q_k x}. \quad (2.10)$$

Полиномиальная часть функции (2.10) будет удовлетворять бигармоническому уравнению (1.7), если только $e = f = 0$. Подставляя (2.10) в формулы (1.9), (1.10), найдем формулы для перемещений и напряжений:

$$\begin{aligned} U(x, y) &= (1 - \nu)(c + 3dx) - \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k^* \frac{1 + \nu}{2} q_k + B_k^*(\nu - 1 + \frac{1 + \nu}{2} q_k x) \right) q_k \cos q_k y e^{q_k x}, \\ V(x, y) &= \frac{1 + \nu}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (A_k^* q_k + B_k^*(1 + q_k x)) q_k \sin q_k y e^{q_k x}, \\ \sigma_x(x, y) &= 6d - \sum_{k=1}^{\infty} (A_k^*(1 + \nu) q_k + B_k^*(\nu - 1 + (1 + \nu) q_k x)) q_k^2 \cos q_k y e^{q_k x}, \\ \sigma_y(x, y) &= \nu 6d + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k^*(1 + \nu) q_k + B_k^*(1 + 3\nu + (1 + \nu) q_k x)) q_k^2 \cos q_k y e^{q_k x}, \\ \tau_{xy}(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} (A_k^*(1 + \nu) q_k + B_k^*(2\nu + (1 + \nu) q_k x)) q_k^2 \sin q_k y e^{q_k x}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Если в формулах (2.11) принять $B_k^* = B_k$, $A_k^* = A_k + \frac{3 - \nu}{1 + \nu} \frac{B_k}{q_k}$, то они совпадут с соответствующими формулами (2.7), за исключением элементарного (полиномиального) репенсия, которое в (2.7) не содержится. Вводя новые обозначения $(1 - \nu)c = B_0$ (жесткое смещение), $6d = A_0$, придем к следующим формулам для напряжений и перемещений:

$$\begin{aligned} U(x, y) &= B_0 + \frac{1 - \nu}{2} A_0 x - \frac{1 + \nu}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (A_k q_k + B_k(1 + q_k x)) q_k \cos q_k y e^{q_k x}, \\ V(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \frac{1 + \nu}{2} q_k + B_k(2 + \frac{1 + \nu}{2} q_k x) \right) q_k \sin q_k y e^{q_k x}, \\ \sigma_x(x, y) &= A_0 - \sum_{k=1}^{\infty} (A_k(1 + \nu) q_k + B_k(2 + (1 + \nu) q_k x)) q_k^2 \cos q_k y e^{q_k x}, \\ \sigma_y(x, y) &= \nu A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k(1 + \nu) q_k + B_k(2(2 + \nu) + (1 + \nu) q_k x)) q_k^2 \cos q_k y e^{q_k x}, \\ \tau_{xy}(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} (A_k(1 + \nu) q_k + B_k(3 + \nu + (1 + \nu) q_k x)) q_k^2 \sin q_k y e^{q_k x}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Пусть на торце полуполосы заданы касательное $\tau(y)$ и нормальное $\sigma(y)$ напряжения:

$$\sigma_x(0, y) = \sigma(y), \quad \tau_{xy}(0, y) = \tau(y). \quad (2.13)$$

Удовлетворяя с помощью (2.12) граничным условиям (2.13), приходим к задаче определения неизвестных коэффициентов A_0 , A_k и B_k из разложений:

$$\begin{cases} A_0 - \sum_{k=1}^{\infty} (A_k(1 + \nu) q_k + 2B_k) q_k^2 \cos q_k y = \sigma(y); \\ \sum_{k=1}^{\infty} (A_k(1 + \nu) q_k + B_k(3 + \nu)) q_k^2 \sin q_k y = \tau(y). \end{cases} \quad (2.14)$$

Пользуясь свойством ортогональности тригонометрических систем функций $\{\cos \lambda_k y\}_{k=0}^{\infty}$ и $\{\sin \lambda_k y\}_{k=1}^{\infty}$ [4], найдем

$$A_0 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \sigma(y) dy, \quad (2.15)$$

а для определения коэффициентов A_k и B_k получим систему из двух линейных уравнений

$$\begin{cases} \sigma_k = -(1 + \nu)A_k q_k^3 - 2B_k q_k^2; \\ \tau_k = (1 + \nu)A_k q_k^3 + (3 + \nu)B_k q_k^2. \end{cases} \quad (2.16)$$

Откуда

$$A_k = -\frac{(\nu + 3)\sigma_k + 2\tau_k}{(1 + \nu)^2 q_k^3}, \quad B_k = \frac{\sigma_k + \tau_k}{(1 + \nu)q_k^2}. \quad (2.17)$$

$$\sigma_k = \int_{-1}^1 \sigma(y) \cos q_k y dy, \quad \tau_k = \int_{-1}^1 \tau(y) \sin q_k y dy. \quad (2.18)$$

Рассмотрим два примера.

Пример 1. На торце полуполосы касательные напряжения равны нулю, а нормальные представлены сосредоточенной силой, действующей вдоль оси симметрии полуполосы. Будем считать, что интенсивность сосредоточенной силы равна P . Тогда граничные условия на торце полуполосы имеют вид:

$$\sigma_x(0, y) = P\delta(y), \quad \tau_{xy}(0, y) = 0, \quad (2.19)$$

где $\delta(y)$ — это дельта-функция.

Числа

$$\sigma_k = \int_{-1}^1 P\delta(y) \cos q_k y dy = P, \quad \tau_k = 0. \quad (2.20)$$

В силу (2.15) и (2.17):

$$A_0 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 P\delta(y) dy = \frac{1}{2}P, \quad A_k = -\frac{(3 + \nu)P}{(1 + \nu)^2 q_k^3}, \quad B_k = \frac{P}{(1 + \nu)q_k^2}. \quad (2.21)$$

Окончательные формулы для перемещений и напряжений имеют вид:

$$\begin{aligned} U(x, y) &= B_0 + \frac{(1 - \nu)P}{4}x + \frac{P}{1 + \nu} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{q_k} - \frac{1 + \nu}{2}x \right) \cos q_k y e^{q_k x}, \\ V(x, y) &= \frac{P}{2(1 + \nu)} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1 - \nu}{q_k} + (1 + \nu)x \right) \sin q_k y e^{q_k x}, \\ \sigma_x(x, y) &= \frac{1}{2}P + P \sum_{k=1}^{\infty} (1 - q_k x) \cos q_k y e^{q_k x}, \\ \sigma_y(x, y) &= \frac{\nu}{2}P + P \sum_{k=1}^{\infty} (1 + q_k x) \cos q_k y e^{q_k x}, \\ \tau_{xy}(x, y) &= Px \sum_{k=1}^{\infty} q_k \sin q_k y e^{q_k x}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Ряды (2.22) можно свернуть, воспользовавшись [5]. В результате получим:

$$\begin{aligned}
 U(x, y) &= B_0 + \frac{2-\nu}{4}Px - \frac{P}{2(1+\nu)} \left(x + \frac{1}{\pi} \ln(2(ch\pi x - \cos \pi y)) \right) + \frac{Px}{4} \frac{sh\pi x}{ch\pi x - \cos \pi y}, \\
 V(x, y) &= -\frac{1-\nu}{2(1+\nu)} \frac{P}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\sin \pi y}{\cos \pi y - e^{-\pi x}} - Px \frac{\sin \pi y}{\cos \pi y - ch\pi x}, \\
 \sigma_x(x, y) &= \frac{1}{2}P - \frac{1}{2}P \left(\frac{-1 + ch\pi x \cos \pi y}{(ch\pi x - \cos \pi y)^2} \pi x + \frac{sh\pi x}{ch\pi x - \cos \pi y} + 1 \right), \\
 \sigma_y(x, y) &= \frac{1}{2}\nu P - \frac{1}{2}P \left(\frac{1 - ch\pi x \cos \pi y}{(ch\pi x - \cos \pi y)^2} \pi x + \frac{sh\pi x}{ch\pi x - \cos \pi y} + 1 \right), \\
 \tau_{xy}(x, y) &= -\frac{1}{2}P \frac{\sin \pi y sh\pi x}{(\cos \pi y - ch\pi x)^2} \pi x.
 \end{aligned} \tag{2.23}$$

На рис. 2 для иллюстрации приведены графики распределения нормальных напряжений $\sigma_x(x, y)$ в сечении полуполосы $x = 0.1$ (кривые практически не различимы), вычисленные по формулам (2.22) (сплошная кривая) и (2.23) (пунктир).

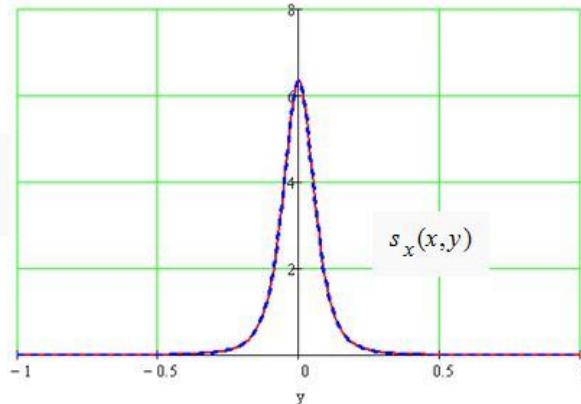


Рис. 2

Пример 2. На торце полуполосы нормальные напряжения равны нулю, а касательные представлены сосредоточенным диполем интенсивности Q , приложенным в начале координат:

$$\sigma_x(0, y) = 0, \quad \tau_{xy}(0, y) = Q\delta'(y). \tag{2.24}$$

В этом случае

$$\sigma_k = 0, \quad \tau_k = \int_{-1}^1 Q\delta'(y) \sin q_k y dy = -Qq_k. \tag{2.25}$$

Тогда

$$A_0 = 0, \quad A_k = \frac{2Q}{(1+\nu)^2 q_k^2}, \quad B_k = -\frac{Q}{(1+\nu)q_k}. \tag{2.26}$$

Формулы для перемещений и напряжений будут следующими:

$$\begin{aligned}
U(x, y) &= B_0 - \frac{Q}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1-\nu}{1+\nu} - q_k x \right) \cos q_k y e^{q_k x}, \\
V(x, y) &= -Q \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1+\nu} + \frac{1}{2} q_k x \right) \sin q_k y e^{q_k x}, \\
\sigma_x(x, y) &= Q \sum_{k=1}^{\infty} q_k^2 x \cos q_k y e^{q_k x}, \\
\sigma_y(x, y) &= -Q \sum_{k=1}^{\infty} (2 + q_k x) q_k \cos q_k y e^{q_k x}, \\
\tau_{xy}(x, y) &= -Q \sum_{k=1}^{\infty} (1 + q_k x) q_k \sin q_k y e^{q_k x}.
\end{aligned} \tag{2.27}$$

Пользуясь [5] и просуммировав полученные ряды, получим:

$$\begin{aligned}
U(x, y) &= B_0 + \frac{Q}{4} \left[\frac{1-\nu}{1+\nu} \left(\frac{sh\pi x}{ch\pi x - \cos\pi y} + 1 \right) - \pi x \frac{1 - ch\pi x \cos\pi y}{(ch\pi x - \cos\pi y)^2} \right], \\
V(x, y) &= \frac{Q}{2} \left[\frac{1}{1+\nu} \frac{\sin\pi y}{\cos\pi y - ch\pi x} + \frac{\pi x}{2} \frac{sh\pi x \sin\pi y}{(\cos\pi y - ch\pi x)^2} \right], \\
\sigma_x(x, y) &= \frac{Q}{2} x \frac{\pi^2 sh\pi x (\cos^2\pi y + ch\pi x \cos\pi y - 2)}{(ch\pi x - \cos\pi y)^3}, \\
\sigma_y(x, y) &= \frac{Q}{2} \left(2\pi \frac{1 - ch\pi x \cos\pi y}{(ch\pi x - \cos\pi y)^2} - \pi^2 x \frac{sh\pi x (\cos^2\pi y + ch\pi x \cos\pi y - 2)}{(\cos\pi y - ch\pi x)^3} \right), \\
\tau_{xy}(x, y) &= \frac{Q}{2} \pi \sin\pi y \left[\frac{sh\pi x}{(\cos\pi y - ch\pi x)^2} + \pi x \frac{ch^2\pi x + \cos\pi y ch\pi x - 2}{(\cos\pi y - ch\pi x)^3} \right].
\end{aligned} \tag{2.28}$$

На рис. 3 показаны практически не различимые графики распределения нормальных напряжений $\sigma_x(x, y)$ в сечении полуполосы $x = 0.1$, вычисленные по формулам (2.27) (сплошная кривая) и (2.28) (пунктир).

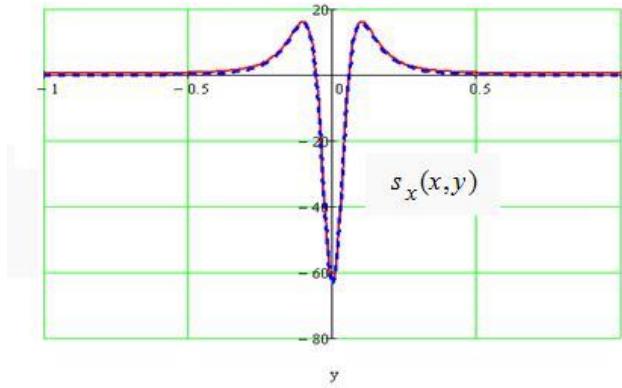


Рис. 3

3. Обратно симметричная задача (обратно симметричное продолжение в полу平面). Рассмотрим обратно симметричную деформацию полуполосы при тех же граничных условиях (1.1) на ее продольных сторонах. Схема приложения нормальной и касательной нагрузок на торце полуполосы, а также способ продолжения решения во всю правую полуплоскость показаны на рис. 4

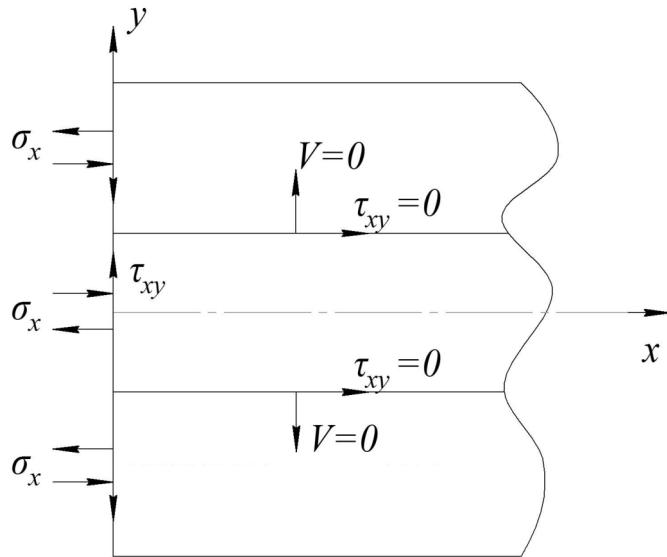


Рис. 4. Обратно симметричная деформация полуполосы:
схема приложения внешней нагрузки и способ
продолжения решения в правую полуплоскость

Как и в случае симметричной задачи для полуполосы, рассмотрим два варианта построения решения: 1) когда функция перемещений вводится по формулам (1.6) и 2) когда функция перемещений вводится формулами (1.9). По симметрии задачи, $V(x, y)$, $\tau_{xy}(x, y)$ — четные, а $\sigma_x(x, y)$, $\sigma_y(x, y)$, $U(x, y)$ — нечетные функции относительно y . Поэтому в первом случае $\phi(y)$ в формуле (1.11) должна быть четной функцией, а во втором — нечетной. Следовательно, в первом случае

$$F(x, y) = (C_2 y \sin \lambda y + C_3 \cos \lambda y) e^{\lambda x}, \quad (3.1)$$

а во втором

$$F(x, y) = (C_3 \cos \lambda y + C_2 y \sin \lambda y) e^{\lambda x}. \quad (3.2)$$

Удовлетворяя граничным условиям (1.1) с помощью формул (1.6), (1.8), получим систему из двух линейных однородных алгебраических уравнений относительно неизвестных C_2 , C_3 :

$$\begin{cases} C_2 \left(\frac{1+\nu}{2} \lambda^2 \sin \lambda + (1-\nu) \lambda \cos \lambda \right) + C_3 \frac{1+\nu}{2} \lambda^2 \cos \lambda = 0; \\ C_2 ((1+\nu) \lambda^3 \sin \lambda - 2\nu \lambda^2 \cos \lambda) + C_3 (1+\nu) \lambda^3 \cos \lambda = 0. \end{cases} \quad (3.3)$$

Приравнивая к нулю ее определитель, приходим к характеристическому уравнению краевой задачи

$$\lambda^4 \cos^2 \lambda = 0, \quad (3.4)$$

которое имеет четыре нулевых корня и бесконечное множество корней вида $\pm(2k-1)\pi/2$, $k = 1, 2, \dots$, кратности 2.

Выразим из первого уравнения системы (3.3) C_2 через C_3 и подставим в выражение (3.1) для функции $\phi(y)$:

$$\phi(y) = \frac{-(1+\nu)\lambda y \cos \lambda \sin \lambda y + ((1+\nu)\lambda \sin \lambda + 2(1-\nu) \cos \lambda) \cos \lambda y}{(1+\nu)\lambda \sin \lambda + 2(1-\nu) \cos \lambda} C_3. \quad (3.5)$$

Полагая здесь вначале $\lambda = 0$ и затем $\lambda = \pm(2k-1)\pi/2$, найдем вид собственных функций, отвечающих корням уравнения (3.4). Их можно представить так: $\phi_0(y) = C_0$, $\phi_k(y) = C_k \cos \lambda_k y$, $\lambda_k = -(2k-1)\pi/2$, $k = 1, 2, \dots$. Тогда функция $F(x, y)$ принимает вид

$$F(x, y) = a + bx + cx^2 + dx^3 + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k + B_k x) \cos \lambda_k y e^{\lambda_k x}. \quad (3.6)$$

Подставляя (3.6) в формулы (1.6), (1.8) и проверяя выполнение граничных условий (1.1), получим:

$$\begin{aligned} U(x, y) &= \frac{1+\nu}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \lambda_k + B_k (1 + \lambda_k x)) \lambda_k \sin \lambda_k y e^{\lambda_k x}, \\ V(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \frac{1+\nu}{2} \lambda_k + B_k \left(2 + \frac{1+\nu}{2} \lambda_k x \right) \right) \lambda_k \cos \lambda_k y e^{\lambda_k x}, \\ \sigma_x(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} (A_k (1+\nu) \lambda_k + B_k (2 + (1+\nu) \lambda_k x)) \lambda_k^2 \sin \lambda_k y e^{\lambda_k x}, \\ \sigma_y(x, y) &= - \sum_{k=1}^{\infty} (A_k (1+\nu) \lambda_k + B_k (2(2+\nu) + (1+\nu) \lambda_k x)) \lambda_k^2 \sin \lambda_k y e^{\lambda_k x}, \\ \tau_{xy}(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} (A_k (1+\nu) \lambda_k + B_k (3 + \nu + (1+\nu) \lambda_k x)) \lambda_k^2 \cos \lambda_k y e^{\lambda_k x}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Воспользуемся теперь представлением (3.2) для функции перемещений и формулами (1.9), (1.10) для перемещений и напряжений. Из граничных условий (1.1) получим систему алгебраических однородных уравнений относительно C_1, C_4

$$\begin{cases} C_1 \lambda^2 \cos \lambda + C_4 \lambda (\cos \lambda - \lambda \sin \lambda) = 0; \\ C_1 (1+\nu) \lambda^3 \cos \lambda + C_4 \lambda^2 ((3+\nu) \cos \lambda - (1+\nu) \lambda \sin \lambda) = 0 \end{cases} \quad (3.8)$$

с тем же характеристическим уравнением (3.4). Выразим из первого уравнения системы (3.8) C_4 через C_1 и подставим в (3.2). Тогда получим следующее выражение для функции $\phi(y)$:

$$\phi(y) = \left\{ \sin \lambda y + \frac{\lambda^2 \cos \lambda}{\lambda^2 \sin \lambda - \lambda \cos \lambda} y \cos \lambda y \right\} C_1. \quad (3.9)$$

Принимая здесь $\lambda = 0$, найдем собственную функцию, отвечающую нулевым корням характеристического уравнения, $\phi_0(y) = 0$, а при $\lambda = \lambda_k$ — собственные функции, соответствующие корням λ_k , $\phi_k(y) = C_k \sin \lambda_k y$. Тогда функция $F(x, y)$ принимает вид

$$F(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} (A_k^* + B_k^* x) \sin \lambda_k y e^{\lambda_k x}. \quad (3.10)$$

Тогда можно сделать вывод, что в окончательных решениях краевой задачи элементарное решение будет отсутствовать. Используя свойство ортогональности тригонометрических систем функций, имеем:

$$A_k = \frac{(n+3)s_k - 2t_k}{(1+n)^2 l_k^3}, \quad B_k = \frac{-s_k + t_k}{(1+n)^2 l_k^2}.$$

Подставляя эти формулы в (3.7), найдем окончательные выражения для напряжений и перемещений, являющиеся решением краевой задачи.

Рассмотрим два примера.

Пример 3. Пусть на торце полуполосы касательные напряжения равны нулю, а нормальные представлены сосредоточенным моментом интенсивности M . Тогда граничные условия на торце полуполосы имеют вид:

$$\sigma_x(0, y) = M\delta'(y), \quad \tau_{xy}(0, y) = 0. \quad (3.11)$$

Удовлетворяя граничным условиям (3.11) и пользуясь свойством ортогональности тригонометрических рядов, для каждого номера $k \geq 1$ получим систему из двух алгебраических уравнений для определения коэффициентов разложений A_k, B_k

$$\begin{cases} \sigma_k = (1+\nu)A_k\lambda_k^3 + 2B_k\lambda_k^2; \\ \tau_k = (1+\nu)A_k\lambda_k^3 + (3+\nu)B_k\lambda_k^2, \end{cases} \quad (3.12)$$

где числа

$$\sigma_k = \int_{-1}^1 M\delta'(y) \sin \lambda_k y dy = -M\lambda_k, \quad \tau_k = 0. \quad (3.13)$$

Вставляя найденные значения для A_k, B_k в формулы (3.7), получим

$$\begin{aligned} U(x, y) &= -\frac{M}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{1+\nu} - \lambda_k x \right) \sin \lambda_k y e^{\lambda_k x}, \\ V(x, y) &= \frac{M}{2(1+\nu)} \sum_{k=1}^{\infty} (1-\nu + (1+\nu)\lambda_k x) \cos \lambda_k y e^{\lambda_k x}, \\ \sigma_x(x, y) &= -M \sum_{k=1}^{\infty} (1 - \lambda_k x) \lambda_k \sin \lambda_k y e^{\lambda_k x}, \\ \sigma_y(x, y) &= -M \sum_{k=1}^{\infty} (1 + \lambda_k x) \lambda_k \sin \lambda_k y e^{\lambda_k x}, \\ \tau_{xy}(x, y) &= Mx \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 \cos \lambda_k y e^{\lambda_k x}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Эти ряды можно свернуть:

$$\begin{aligned} U(x, y) &= M \left[-\frac{1}{1+\nu} \frac{ch \frac{\pi}{2} x}{ch \pi x - \cos \pi y} + \frac{1}{4} \pi x \frac{sh \frac{\pi}{2} x (ch \pi x - \cos \pi y) - 2ch \frac{\pi}{2} x sh \pi x}{(ch \pi x - \cos \pi y)^2} \right] \sin \frac{\pi}{2} y, \\ V(x, y) &= -\frac{M}{2} \left[\frac{1-\nu}{1+\nu} \frac{sh \frac{\pi}{2} x}{ch \pi x - \cos \pi y} + \frac{1}{2} \pi x \frac{ch \frac{\pi}{2} x (ch \pi x - \cos \pi y) - 2sh \frac{\pi}{2} x sh \pi x}{(ch \pi x - \cos \pi y)^2} \right] \cos \frac{\pi}{2} y, \\ \sigma_x(x, y) &= -\frac{3}{2} My - M \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} y \left\{ \frac{sh \frac{\pi}{2} x (ch \pi x - \cos \pi y) - 2ch \frac{\pi}{2} x sh \pi x}{(ch \pi x - \cos \pi y)^2} - \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -x \frac{\pi}{2} \frac{ch \frac{\pi}{2} x (ch \pi x - \cos \pi y)^2 - 4 ch \frac{3\pi}{2} x (ch \pi x - \cos \pi y) + 8 sh^2 \pi x ch \frac{\pi}{2} x}{(ch \pi x - \cos \pi y)^3} \Bigg\} . \\
\sigma_y(x, y) = & -\frac{3}{2} \nu M y - M \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} y \left\{ \frac{sh \frac{\pi}{2} x (ch \pi x - \cos \pi y) - 2 ch \frac{\pi}{2} x sh \pi x}{(ch \pi x - \cos \pi y)^2} + \right. \\
& \left. + x \frac{\pi}{2} \frac{ch \frac{\pi}{2} x (ch \pi x - \cos \pi y)^2 - 4 ch \frac{3\pi}{2} x (ch \pi x - \cos \pi y) + 8 sh^2 \pi x ch \frac{\pi}{2} x}{(ch \pi x - \cos \pi y)^3} \right\} . \\
\tau_{xy}(x, y) = & M \left(\frac{\pi}{2} \right)^2 \cos \frac{\pi}{2} y sh \frac{\pi}{2} x \frac{(3 ch \pi x + \cos \pi y)(ch \pi x - \cos \pi y) + 8 ch^2 \frac{\pi}{2} x (ch \pi x - \cos \pi y - 4 sh^2 \frac{\pi}{2} x)}{(ch \pi x - \cos \pi y)^3} x .
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Пример 4. На торце полуполосы нормальны напряжения равны нулю, а касательные представлены сосредоточенной перерезывающей силой интенсивности Q , т. е.

$$\sigma_x(0, y) = 0, \quad \tau_{xy}(0, y) = Q \delta(y). \tag{3.16}$$

На этот раз

$$\sigma_k = 0, \quad \tau_k = \int_{-1}^1 Q \delta(y) \cos \lambda_k y dy = Q, \tag{3.17}$$

а формулы для перемещений и напряжений имеют вид:

$$\begin{aligned}
U(x, y) = & \frac{Q}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\nu - 1}{(1 + \nu) \lambda_k} + x \right) \sin \lambda_k y e^{\lambda_k x}, \\
V(x, y) = & \frac{Q}{1 + \nu} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_k} + \frac{1 + \nu}{2} x \right) \cos \lambda_k y e^{\lambda_k x}, \\
\sigma_x(x, y) = & Q \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k x \sin \lambda_k y e^{\lambda_k x}, \\
\sigma_y(x, y) = & -Q \sum_{k=1}^{\infty} (2 + \lambda_k x) \sin \lambda_k y e^{\lambda_k x}, \\
\tau_{xy}(x, y) = & Q \sum_{k=1}^{\infty} (1 + \lambda_k x) \cos \lambda_k y e^{\lambda_k x}.
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Или, в свернутом виде:

$$\begin{aligned}
U(x, y) = & \frac{Q}{2} \left[\frac{1 - \nu}{\pi(1 + \nu)} arctg \frac{\sin \frac{\pi}{2} y}{sh \frac{\pi}{2} x} + x \frac{\sin \frac{\pi}{2} y ch \frac{\pi}{2} x}{ch \pi x - \cos \pi y} \right], \\
V(x, y) = & \frac{Q}{1 + \nu} \left[\frac{1}{2\pi} \ln \frac{ch \frac{\pi}{2} x + \cos \frac{\pi}{2} y}{ch \frac{\pi}{2} x - \cos \frac{\pi}{2} y} - x \frac{1 + \nu}{2} \frac{\cos \frac{\pi}{2} y sh \frac{\pi}{2} x}{ch \pi x - \cos \pi y} \right],
\end{aligned}$$

$$\sigma_x(x, y) = Q \frac{\pi}{2} x \sin \frac{\pi}{2} y \frac{sh \frac{\pi}{2} x(ch\pi x - \cos \pi y) - 2ch \frac{\pi}{2} x sh \pi x}{(ch\pi x - \cos \pi y)^2}, \quad (3.19)$$

$$\sigma_y(x, y) = -Q \left(2 \frac{\sin \frac{\pi}{2} y ch \frac{\pi}{2} x}{ch\pi x - \cos \pi y} + \frac{\pi}{2} x \sin \frac{\pi}{2} y \frac{sh \frac{\pi}{2} x(ch\pi x - \cos \pi y) - 2ch \frac{\pi}{2} x sh \pi x}{(ch\pi x - \cos \pi y)^2} \right),$$

$$\tau_{xy}(x, y) = -Q \left[\frac{\cos \frac{\pi}{2} y sh \frac{\pi}{2} x}{ch\pi x - \cos \pi y} + \frac{\pi}{2} x \cos \frac{\pi}{2} y \frac{ch \frac{\pi}{2} x(ch\pi x - \cos \pi y) - 2sh \frac{\pi}{2} x sh \pi x}{(ch\pi x - \cos \pi y)^2} \right].$$

4. Симметричная задача (обратно симметричное продолжение в правую полуплоскость). Пусть теперь на длинных сторонах полуполосы $y = \pm 1$ равны нулю нормальные напряжения σ_y и продольные перемещения u , т. е. выполняются условия (1.2).

Будем считать, что па торце полуполосы приложены нормальные и касательные напряжения, соответственно, четная и нечетная функции. Тогда деформация полуполосы симметрична относительно оси x , и поэтому $V(x, y)$, $\tau_{xy}(x, y)$ — нечетные, а $\sigma_x(x, y)$, $\sigma_y(x, y)$, $U(x, y)$ — четные функции по y . Схема приложения внешней нагрузки на торце полуполосы и схема продолжения решения в правую полуплоскость так, что выполняются условия периодичности (1.2), показаны на рис. 5.

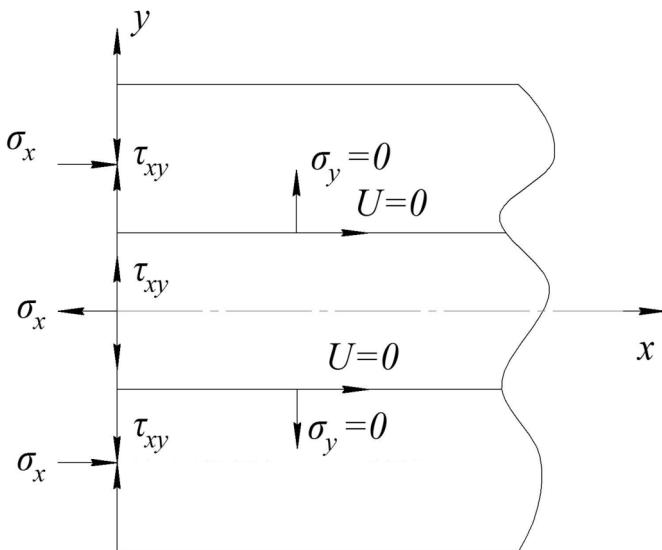


Рис. 5. Симметричная деформация полуполосы:
схема приложения внешней нагрузки и способ
продолжения решения в правую полуплоскость

Следовательно, в том случае, когда функция $F(x, y)$ (1.11) связана с перемещениями и напряжениями формул (1.6), (1.8), $\phi(y)$ должна быть нечетной функцией, т. е. $F(x, y)$ нужно взять в виде (1.14), а если функция напряжений вводится по формулам (1.9), (1.10), то ее следует взять в виде (2.2).

Удовлетворив граничным условиям на продольных сторонах полуполосы (1.2), получим систему однородных линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов C_1 и C_4 . Приравнивая к нулю ее определитель, получим характеристическое уравнение (3.4).

Окончательные выражения для перемещений и напряжений имеют вид:

$$\begin{aligned} U(x, y) &= -\frac{1+\nu}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \lambda_k + B_k(1 + \lambda_k x)) \lambda_k \cos \lambda_k y e^{\lambda_k x}, \\ V(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \frac{1+\nu}{2} \lambda_k + B_k \left(1 + \frac{1+\nu}{2} \lambda_k x \right) \right) \lambda_k \sin \lambda_k y e^{\lambda_k x}, \\ \sigma_x(x, y) &= -\sum_{k=1}^{\infty} (A_k(1+\nu)\lambda_k + B_k(2 + (1+\nu)\lambda_k x)) \lambda_k^2 \cos \lambda_k y e^{\lambda_k x}, \\ \sigma_y(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} (A_k(1+\nu)\lambda_k + B_k(2(2+\nu) + (1+\nu)\lambda_k x)) \lambda_k^2 \cos \lambda_k y e^{\lambda_k x}, \\ \tau_{xy}(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} (A_k(1+\nu)\lambda_k + B_k(3 + \nu + (1+\nu)\lambda_k x)) \lambda_k^2 \sin \lambda_k y e^{\lambda_k x}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Такие же формулы получим и в том случае, когда функция перемещений берется в виде (2.2), а перемещения и напряжения находятся по формулам (1.9), (1.10).

Пример 5. Пусть на торце полуполосы касательные напряжения равны нулю, а нормальные напряжения представлены сосредоточенной силой, действующей вдоль оси симметрии полуполосы. Интенсивность силы равна P . Тогда граничные условия на торце полуполосы имеют вид:

$$\sigma_x(0, y) = P\delta(y), \quad \tau_{xy}(0, y) = 0. \quad (4.2)$$

Удовлетворяя с помощью формул (4.1) граничным условиям (4.2) и пользуясь свойством ортогональности тригонометрических рядов, найдем

$$A_k = -\frac{(3+\nu)P}{(1+\nu)^2 \lambda_k^3}, \quad B_k = \frac{P}{(1+\nu)\lambda_k^2}. \quad (4.3)$$

Формулы (4.1) принимают такой вид:

$$\begin{aligned} U(x, y) &= \frac{P}{1+\nu} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_k} - \frac{1+\nu}{2} x \right) \cos \lambda_k y e^{\lambda_k x}, \\ V(x, y) &= \frac{P}{2(1+\nu)} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1-\nu}{\lambda_k} + (1+\nu)x \right) \sin \lambda_k y e^{\lambda_k x}, \\ \sigma_x(x, y) &= P \sum_{k=1}^{\infty} (1 - \lambda_k x) \cos \lambda_k y e^{\lambda_k x}, \\ \sigma_y(x, y) &= P \sum_{k=1}^{\infty} (1 + \lambda_k x) \cos \lambda_k y e^{\lambda_k x}, \\ \tau_{xy}(x, y) &= Px \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \sin \lambda_k y e^{\lambda_k x}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Сворачивая ряды, получим:

$$\begin{aligned}
U(x, y) &= \frac{P}{1+\nu} \left[\frac{1}{2\pi} \ln \frac{ch \frac{\pi}{2}x + \cos \frac{\pi}{2}y}{ch \frac{\pi}{2}x - \cos \frac{\pi}{2}y} + x \frac{1+\nu}{2} \frac{\cos \frac{\pi}{2}y sh \frac{\pi}{2}x}{ch \pi x - \cos \pi y} \right], \\
V(x, y) &= \frac{P}{2} \left[-\frac{1-\nu}{\pi(1+\nu)} arctg \frac{\sin \frac{\pi}{2}y}{sh \frac{\pi}{2}x} + x \frac{\sin \frac{\pi}{2}y ch \frac{\pi}{2}x}{ch \pi x - \cos \pi y} \right], \\
\sigma_x(x, y) &= -P \left(\frac{\cos \frac{\pi}{2}y sh \frac{\pi}{2}x}{ch \pi x - \cos \pi y} - \frac{\pi}{2}x \cos \frac{\pi}{2}y \frac{ch \frac{\pi}{2}x(ch \pi x - \cos \pi y) - 2sh \frac{\pi}{2}x sh \pi x}{(ch \pi x - \cos \pi y)^2} \right), \\
\sigma_y(x, y) &= -P \left(\frac{\cos \frac{\pi}{2}y sh \frac{\pi}{2}x}{ch \pi x - \cos \pi y} + \frac{\pi}{2}x \cos \frac{\pi}{2}y \frac{ch \frac{\pi}{2}x(ch \pi x - \cos \pi y) - 2sh \frac{\pi}{2}x sh \pi x}{(ch \pi x - \cos \pi y)^2} \right), \\
\tau_{xy}(x, y) &= -P \frac{\pi}{2} x sh \frac{\pi}{2}x \sin \frac{\pi}{2}y \frac{2ch^2 \frac{\pi}{2}x + 1 + \cos \pi y}{(ch \pi x - \cos \pi y)^2}.
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Пример 6. Нормальные напряжения на торце полуполосы равны нулю, а касательные представлены сосредоточенным диполем интенсивности Q , приложенным в начале координат:

$$\sigma_x(0, y) = 0, \quad \tau_{xy}(0, y) = Q\delta'(y). \tag{4.6}$$

В этом случае

$$A_k = \frac{2Q}{(1+\nu)^2 \lambda_k^2}, \quad B_k = -\frac{Q}{(1+\nu) \lambda_k}. \tag{4.7}$$

А формулы для напряжений и перемещений принимают вид:

$$\begin{aligned}
U(x, y) &= -\frac{Q}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1-\nu}{1+\nu} - \lambda_k x \right) \cos \lambda_k y e^{\lambda_k x}, \\
V(x, y) &= -Q \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1+\nu} + \frac{1}{2} \lambda_k x \right) \sin \lambda_k y e^{\lambda_k x}, \\
\sigma_x(x, y) &= Q \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 x \cos \lambda_k y e^{\lambda_k x}, \\
\sigma_y(x, y) &= -Q \sum_{k=1}^{\infty} (2 + \lambda_k x) \lambda_k \cos \lambda_k y e^{\lambda_k x}, \\
\tau_{xy}(x, y) &= -Q \sum_{k=1}^{\infty} (1 + \lambda_k x) \lambda_k \sin \lambda_k y e^{\lambda_k x},
\end{aligned} \tag{4.8}$$

или в свернутом виде:

$$\begin{aligned}
U(x, y) &= \frac{Q}{2} \left[\frac{1-\nu}{1+\nu} \frac{sh \frac{\pi}{2}x}{ch \pi x - \cos \pi y} - \frac{\pi}{2} x \frac{ch \frac{\pi}{2}x(ch \pi x - \cos \pi y) - 2sh \frac{\pi}{2}x sh \pi x}{(ch \pi x - \cos \pi y)^2} \right] \cos \frac{\pi}{2}y, \\
V(x, y) &= -Q \left[\frac{1}{1+\nu} \frac{ch \frac{\pi}{2}x}{ch \pi x - \cos \pi y} + \frac{\pi}{4} x \frac{sh \frac{\pi}{2}x(ch \pi x - \cos \pi y) - 2ch \frac{\pi}{2}x sh \pi x}{(ch \pi x - \cos \pi y)^2} \right] \sin \frac{\pi}{2}y,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_x(x, y) &= Qx \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \cos \frac{\pi}{2}y \operatorname{sh} \frac{\pi}{2}x \cdot \\
 &\cdot \frac{(3ch\pi x + \cos \pi y)(ch\pi x - \cos \pi y) + 8ch^2 \frac{\pi}{2}x(ch\pi x - \cos \pi y - 4sh^2 \frac{\pi}{2}x)}{(ch\pi x - \cos \pi y)^3}, \\
 \sigma_y(x, y) &= Q \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2}y \left\{ 2 \frac{ch \frac{\pi}{2}x(ch\pi x - \cos \pi y) - 2sh \frac{\pi}{2}x \operatorname{sh} \pi x}{(ch\pi x - \cos \pi y)^2} - \right. \\
 &- x \frac{\pi}{2} sh \frac{\pi}{2}x \frac{(3ch\pi x + \cos \pi y)(ch\pi x - \cos \pi y) + 8ch^2 \frac{\pi}{2}x(ch\pi x - \cos \pi y - 4sh^2 \frac{\pi}{2}x)}{(ch\pi x - \cos \pi y)^3} \Bigg\}, \\
 \tau_{xy}(x, y) &= -Q \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2}y \left\{ \frac{sh \frac{\pi}{2}x(ch\pi x - \cos \pi y) - 2ch \frac{\pi}{2}x \operatorname{sh} \pi x}{(ch\pi x - \cos \pi y)^2} + \right. \\
 &+ x \frac{\pi}{2} \frac{ch \frac{\pi}{2}x(ch\pi x - \cos \pi y)^2 - 4ch \frac{3\pi}{2}x(ch\pi x - \cos \pi y) + 8sh^2 \pi x ch \frac{\pi}{2}x}{(ch\pi x - \cos \pi y)^3} \Bigg\}.
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

5. Обратно симметричная задача (обратно симметричное продолжение в правую полуплоскость). Графические условия для полуполосы и способ продолжения репещения в правую полуплоскость показаны ниже на рис. 6.

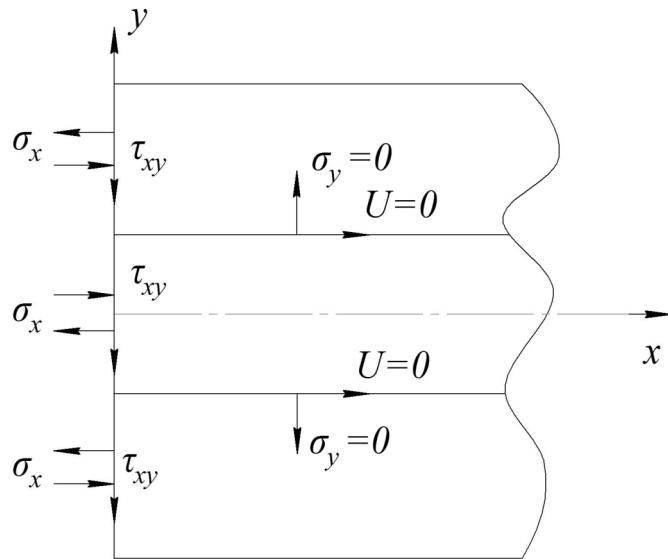


Рис. 6. Обратно симметричная деформация полуполосы:
схема приложения внешней нагрузки и способ
продолжения репещения в правую полуплоскость

Приведем окончательное решение задачи. Заметим, что если функцию перемещений (1.11) вводить по формулам (1.9), то полиномиальная часть решения в приводимых ниже формулах теряется:

$$\begin{aligned} U(x, y) &= \frac{1+\nu}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (A_k q_k + B_k(1+q_k x)) q_k \sin q_k y e^{q_k x}, \\ V(x, y) &= A_0 x + B_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \frac{1+\nu}{2} q_k + B_k \left(2 + \frac{1+\nu}{2} q_k x \right) \right) q_k \cos q_k y e^{q_k x}, \\ \sigma_x(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} (A_k(1+\nu)q_k + B_k(2+(1+\nu)q_k x)) q_k^2 \sin q_k y e^{q_k x}, \\ \sigma_y(x, y) &= - \sum_{k=1}^{\infty} (A_k(1+\nu)q_k + B_k(2(2+\nu)+(1+\nu)q_k x)) q_k^2 \sin q_k y e^{q_k x}, \\ \tau_{xy}(x, y) &= A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k(1+\nu)q_k + B_k(3+\nu+(1+\nu)q_k x)) q_k^2 \cos q_k y e^{q_k x}. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Пример 7. Пусть на торце полуpolloсы касательные напряжения равны нулю, а нормальные напряжения представлены сосредоточенным моментом интенсивности M . Тогда граничные условия на торце полуpolloсы имеют вид:

$$\sigma_x(0, y) = M \delta'(y), \quad \tau_{xy}(0, y) = 0. \quad (5.2)$$

Удовлетворяя граничным условиям на торце полуpolloсы и пользуясь свойством ортогональности на отрезке $[-1, 1]$ тригонометрических систем функций, найдем

$$A_0 = 0, \quad A_k = -\frac{(3+\nu)M}{(1+\nu)^2 q_k^2}, \quad B_k = \frac{M}{(1+\nu)q_k}. \quad (5.3)$$

Окончательные формулы имеют вид (B_0 — жесткое смещение):

$$\begin{aligned} U(x, y) &= -\frac{M}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{1+\nu} - q_k x \right) \sin q_k y e^{q_k x}, \\ V(x, y) &= B_0 + \frac{M}{2(1+\nu)} \sum_{k=1}^{\infty} (1-\nu+(1+\nu)q_k x) \cos q_k y e^{q_k x}, \\ \sigma_x(x, y) &= -M \sum_{k=1}^{\infty} (1-q_k x) q_k \sin q_k y e^{q_k x}, \\ \sigma_y(x, y) &= -M \sum_{k=1}^{\infty} (1+q_k x) q_k \sin q_k y e^{q_k x}, \\ \tau_{xy}(x, y) &= M x \sum_{k=1}^{\infty} q_k^2 \cos q_k y e^{q_k x}. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Сворачивая ряды, получим:

$$\begin{aligned} U(x, y) &= -\frac{M}{4} \left[\frac{2}{1+\nu} \frac{1}{ch\pi x - \cos \pi y} + \pi x \frac{sh\pi x}{(ch\pi x - \cos \pi y)^2} \right] \sin \pi y, \\ V(x, y) &= B_0 - \frac{M}{4} \left[\frac{1-\nu}{1+\nu} \left(\frac{sh\pi x}{ch\pi x - \cos \pi y} + 1 \right) + \pi x \frac{ch\pi x(ch\pi x - \cos \pi y) - sh^2 \pi x}{(ch\pi x - \cos \pi y)^2} \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_x(x, y) &= M \frac{\pi}{2} \sin \pi y \left(\frac{sh\pi x}{(\cos \pi y - ch\pi x)^2} - x\pi \frac{ch\pi x(\cos \pi y - ch\pi x) + 2sh^2\pi x}{(\cos \pi y - ch\pi x)^3} \right), \\ \sigma_y(x, y) &= M \frac{\pi}{2} \sin \pi y \left(\frac{sh\pi x}{(\cos \pi y - ch\pi x)^2} + x\pi \frac{ch\pi x(\cos \pi y - ch\pi x) + 2sh^2\pi x}{(\cos \pi y - ch\pi x)^3} \right). \\ \tau_{xy}(x, y) &= \frac{1}{2} M \pi^2 x sh\pi x \frac{2 - \cos \pi y ch\pi x - \cos^2 \pi y}{(ch\pi x - \cos \pi y)^3}.\end{aligned}\quad (5.5)$$

Пример 8. Пусть на торце полуносы нормальные напряжения равны нулю, а касательные представлены сосредоточенной перезывающей силой интенсивности Q , т. е. при $x = 0$

$$\sigma_x(0, y) = 0, \quad \tau_{xy}(0, y) = Q\delta(y). \quad (5.6)$$

В этом случае

$$A_0 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 Q\delta(y) dy = \frac{1}{2} Q, \quad A_k = -\frac{2Q}{(1+\nu)^2 q_k^3}, \quad B_k = \frac{Q}{(1+\nu)q_k^2}. \quad (5.7)$$

А формулы для перемещений и напряжений имеют вид:

$$\begin{aligned}U(x, y) &= \frac{Q}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\nu - 1}{(1+\nu)q_k} + x \right) \sin q_k y e^{q_k x}, \\ V(x, y) &= \frac{1}{2} Q x + B_0 + \frac{Q}{1+\nu} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{q_k} + \frac{1+\nu}{2} x \right) \cos q_k y e^{q_k x}, \\ \sigma_x(x, y) &= Q \sum_{k=1}^{\infty} q_k x \sin q_k y e^{q_k x}, \\ \sigma_y(x, y) &= -Q \sum_{k=1}^{\infty} (2 + q_k x) \sin q_k y e^{q_k x}, \\ \tau_{xy}(x, y) &= \frac{1}{2} Q + Q \sum_{k=1}^{\infty} (1 + q_k x) \cos q_k y e^{q_k x}.\end{aligned}\quad (5.8)$$

В свернутом виде эти формулы выглядят так:

$$\begin{aligned}U(x, y) &= \frac{Q}{2} \left[\frac{1-\nu}{\pi(1+\nu)} \operatorname{arctg} \frac{\sin \pi y}{\cos \pi y - e^{-\pi x}} - \frac{x}{2} \frac{\sin \pi y}{\cos \pi y - ch\pi x} \right], \\ V(x, y) &= B_0 - \frac{Q}{4} \left[\frac{1-\nu}{\nu+1} x + \frac{2}{\pi(\nu+1)} \ln (2(ch\pi x - \cos \pi y)) + x \frac{sh\pi x}{ch\pi x - \cos \pi y} \right], \\ \sigma_x(x, y) &= -Q \frac{\pi}{2} x \sin \pi y \frac{sh\pi x}{(\cos \pi y - ch\pi x)^2}, \\ \sigma_y(x, y) &= -Q \left(\frac{1}{\cos \pi y - ch\pi x} + \frac{\pi}{2} x \frac{sh\pi x}{(\cos \pi y - ch\pi x)^2} \right) \sin \pi y, \\ \tau_{xy}(x, y) &= -\frac{Q}{2} \left(\frac{sh\pi x}{ch\pi x - \cos \pi y} + 1 + \pi x \frac{1 - ch\pi x \cos \pi y}{(ch\pi x - \cos \pi y)^2} \right).\end{aligned}\quad (5.9)$$

6. Использование метода начальных функций при определении элементарных решений. Как можно было заметить, смотря по тому, каким образом вводится функция перемещений: с помощью формул (1.6) или же на основании (1.9), полиномиальная часть решения может быть потеряна. Метод начальных функций (МНФ) [6] позволяет упростить

построение элементарного решения, однако и в этом случае его можно потерять. Построим элементарное решение для всех четырех рассмотренных выше задач, пользуясь МНФ.

6.1. Симметричная задача (симметричное продолжение в правую полуплоскость). Обозначим, как это принято в МНФ, $U(x, y) = Gu(x, y)$, $V(x, y) = Gv(x, y)$, $Y(x, y) = \sigma_y(x, y)$, $X(x, y) = \tau_{xy}(x, y)$, $\alpha = \frac{\partial}{\partial x}$, G — модуль сдвига. Граничные условия (1.1), записанные по МНФ, имеют вид

$$\begin{cases} L_{VU}(\alpha, 1)U_0(x) + L_{VY}(\alpha, 1)Y_0(x) = 0, \\ L_{XU}(\alpha, 1)U_0(x) + L_{XY}(\alpha, 1)Y_0(x) = 0. \end{cases} \quad (6.1)$$

Здесь $L_{VU}(1)$ и т. д. — дифференциальные операторы МНФ, определенные при $y = 1$, $U_0(x)$, $V_0(x)$ — начальные функции [6].

В выражениях для дифференциальных операторов бесконечного порядка (6.1) ограничимся только первыми членами разложений в ряд Тейлора по степеням α :

$$L_{VU}(\alpha, 1) = -\nu\alpha + \dots, \quad L_{XU}(\alpha, 1) = -2(1 + \nu)\alpha^2 + \dots, \quad (6.2)$$

$$L_{VY}(\alpha, 1) = \frac{1 - \nu}{2} + \dots, \quad L_{XY}(\alpha, 1) = -\nu\alpha + \dots$$

Введем разрешающую функцию $\Phi(x)$ по формулам:

$$U_0(x) = -L_{VY}(\alpha, 1)\Phi(x), \quad Y_0(x) = L_{VU}(\alpha, 1)\Phi(x). \quad (6.3)$$

Тогда первое уравнение системы (6.1) удовлетворится тождественно, а из второго получим обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\nu^2\alpha^2\Phi(x) = 0, \quad (6.4)$$

решение которого

$$\Phi(x) = a + bx. \quad (6.5)$$

А начальные функции (6.3)

$$U_0(x) = -\frac{1 - \nu}{2}(a + bx), \quad Y_0(x) = -\nu b. \quad (6.6)$$

Полиномиальную часть решения найдем по общим зависимостям МНФ:

$$\begin{aligned} U(x, y) &= L_{UU}(\alpha, y)U_0(x) + L_{UY}(\alpha, y)Y_0(x), \\ V(x, y) &= L_{VU}(\alpha, y)U_0(x) + L_{VY}(\alpha, y)Y_0(x), \\ \sigma_x(x, y) &= A_U(\alpha, y)U_0(x) + A_Y(\alpha, y)Y_0(x), \\ Y(x, y) &= L_{YU}(\alpha, y)U_0(x) + L_{YY}(\alpha, y)Y_0(x), \\ X(x, y) &= L_{XU}(\alpha, y)U_0(x) + L_{XY}(\alpha, y)Y_0(x), \end{aligned} \quad (6.7)$$

оставляя в выражениях для операторов только первые члены разложений по степеням α :

$$L_{UU}(\alpha, y) = 1 - \dots, \quad L_{VU}(\alpha, y) = -\nu\alpha y + \dots, \quad L_{YU}(\alpha, y) = (1 + \nu)\alpha^3 y^2 + \dots,$$

$$L_{UY}(\alpha, y) = -\frac{1 + \nu}{4}\alpha y^2 + \dots, \quad L_{VY}(\alpha, y) = \frac{1 - \nu}{2}y + \dots, \quad L_{YY}(\alpha, y) = 1 + \dots, \quad (6.8)$$

$$L_{XU}(\alpha, y) = -2(1 + \nu)\alpha^2 y + \dots, \quad L_{XY}(\alpha, y) = -\nu\alpha y + \dots,$$

$$A_U(\alpha, y) = 2(1 + \nu)\alpha \dots, \quad A_Y(\alpha, y) = \nu + \dots$$

Тогда получим

$$U(x, y) = -\frac{1 - \nu}{2}(a + bx), \quad V(x, y) = 0,$$

$$\sigma_x(x, y) = -b, \quad Y(x, y) = -\nu b, \quad X(x, y) = 0. \quad (6.9)$$

Если же разрешающую функцию $\Phi(x)$ ввести по формулам

$$U_0 = -L_{XY}(\alpha, 1)\Phi(x), \quad Y_0 = L_{XU}(\alpha, 1)\Phi(x), \quad (6.10)$$

то второе уравнение (6.1) удовлетворится тождественно, а из первого уравнения получим уравнение (6.4). В этом случае начальные функции равны

$$U_0 = \nu b, \quad Y_0 = 0, \quad (6.11)$$

и полиномиальная часть решения теряется.

6.2. Обратно симметрическая задача (обратно симметричное продолжение в правую полуплоскость). В случае обратно симметричной деформации полуполосы граничные условия (1.1), записанные по МНФ, принимают вид:

$$\begin{cases} L_{VV}(\alpha, 1)V_0(x) + L_{VX}(\alpha, 1)X_0(x) = 0; \\ L_{XV}(\alpha, 1)V_0(x) + L_{XX}(\alpha, 1)X_0(x) = 0, \end{cases} \quad (6.12)$$

где

$$L_{VV}(\alpha, 1) = 1 + \dots, \quad L_{VX}(\alpha, 1) = -\alpha + \dots, \quad (6.13)$$

$$L_{XV}(\alpha, 1) = (1 + \nu)\alpha^3 + \dots, \quad L_{XX}(\alpha, 1) = 1 - \dots$$

Подставляя (6.13) в (6.12), можно заметить, что определитель этой системы не имеет нулевых корней. Поэтому элементарного решения не будет.

6.3. Симметрическая задача (обратно симметричное продолжение в правую полуплоскость). Записанные по МНФ граничные условия (1.2) имеют вид

$$\begin{cases} L_{UU}(\alpha, 1)U_0(x) + L_{UY}(\alpha, 1)Y_0(x) = 0; \\ L_{YU}(\alpha, 1)U_0(x) + L_{YY}(\alpha, 1)Y_0(x) = 0, \end{cases} \quad (6.14)$$

где

$$L_{UU}(\alpha, 1) = 1 - \dots, \quad L_{UY}(\alpha, 1) = -\frac{1}{4}(1 + \nu)\alpha^2 y + \dots, \quad (6.15)$$

$$L_{YU}(\alpha, 1) = (1 + \nu)\alpha^3 y^2 - \dots, \quad L_{YY}(\alpha, 1) = 1 + \dots$$

Тогда можно заметить, что определитель системы (6.14) не будет иметь нулевых корней, поэтому элементарного решения не будет.

6.4. Обратно симметрическая задача (симметричное продолжение в правую полуплоскость). Граничные условия (1.2) в форме МНФ будут такими

$$\begin{cases} L_{UV}(\alpha, 1)V_0(x) + L_{UX}(\alpha, 1)X_0(x) = 0; \\ L_{YV}(\alpha, 1)V_0(x) + L_{YX}(\alpha, 1)X_0(x) = 0, \end{cases} \quad (6.16)$$

причем

$$\begin{aligned} L_{UV}(\alpha, 1) &= -\alpha + \dots, \quad L_{UX}(\alpha, 1) = 1 - \dots, \\ L_{YV}(\alpha, 1) &= -\frac{1+\nu}{3}\alpha^4 + \dots, \quad L_{YX}(\alpha, 1) = -\alpha + \dots \end{aligned} \quad (6.17)$$

Введем разрешающую функцию $\Phi(x)$ по формулам:

$$V_0(x) = -L_{UX}(\alpha, 1)\Phi(x), \quad X_0(x) = L_{UV}(\alpha, 1)\Phi(x). \quad (6.18)$$

Тогда второе уравнение системы (6.16) удовлетворится тождественно, а из первого получим обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка

$$-\alpha^2\Phi(x) = 0, \quad (6.19)$$

решение которого представляется функцией (6.5). Найдем начальные функции

$$V_0(x) = -(a + bx), \quad X_0(x) = -b, \quad (6.20)$$

а затем элементарное решение по формулам:

$$\begin{aligned} U(x, y) &= L_{UV}(\alpha, y)V_0(x) + L_{UX}(\alpha, y)X_0(x), \\ V(x, y) &= L_{YV}(\alpha, y)V_0(x) + L_{YX}(\alpha, y)X_0(x), \\ \sigma_x(x, y) &= A_V(\alpha, y)V_0(x) + A_X(\alpha, y)X_0(x), \\ Y(x, y) &= L_{YY}(\alpha, y)V_0(x) + L_{YX}(\alpha, y)X_0(x), \\ X(x, y) &= L_{XY}(\alpha, y)V_0(x) + L_{XX}(\alpha, y)X_0(x). \end{aligned} \quad (6.21)$$

Тогда получим

$$\begin{aligned} U(x, y) &= 0, \quad V(x, y) = -(a + bx), \quad \sigma_x(x, y) = 0, \\ Y(x, y) &= 0, \quad X(x, y) = -b. \end{aligned} \quad (6.22)$$

Если же разрешающую функцию $\Phi(x)$ вводить по формулам

$$V_0(x) = -L_{YX}(\alpha, 1)\Phi(x), \quad X_0(1) = L_{YV}(\alpha, 1)\Phi(x), \quad (6.23)$$

то первое уравнение системы (6.16) удовлетворится тождественно, а из второго вновь получим обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка (6.19), но начальные функции теперь будут равны

$$V_0(x) = -b, \quad X_0(x) = 0. \quad (6.24)$$

Подставляя их в общие зависимости МНФ (6.21), получим пульевое элементарное решение.

7. Обратный метод в периодической задаче для прямоугольника. Решения в тригонометрических рядах удобно строить с помощью МНФ обратным методом [6]. Покажем, как это делается на одном примере. Рассмотрим задачу равновесия для прямоугольной пластины $\{|x| \leq l, |y| \leq h\}$ шириной $2h$, длиной $2l$. Предположим, что на ее краях выполняются следующие граничные условия:

– на торцах:

$$u(\pm l, y) = \tau_{xy}(\pm l, y) = 0, \quad (7.1)$$

– на продольных сторонах:

$$\sigma_y(x, \pm h) = \sigma_y(x), \quad \tau_{xy}(x, \pm h) = 0. \quad (7.2)$$

Рассматривая симметричную относительно осей x, y деформацию прямоугольника, следует считать, что начальные функции

$$V_0(x) = X_0(x) = 0. \quad (7.3)$$

Решение задачи будем искать в виде тригонометрических рядов, задаваясь начальными функциями в форме следующих рядов:

$$Y_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n^0 \cos \frac{n\pi}{l} x, \quad U_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n^0 \sin \frac{n\pi}{l} x. \quad (7.4)$$

$Y_n^0, U_n^0, n = 0, 1, 2\dots$ — неизвестные коэффициенты разложений. Подставляя зависимости (7.4) в формулы (6.7), получим:

$$\begin{aligned} U &= \sum_{n=1}^{\infty} (K_{UU}^n(y)U_n^0 + K_{UY}^n(y)Y_n^0) \sin \frac{n\pi}{l} x; \\ V &= V_0 + \frac{1-\nu}{2} Y_0^0 y + \sum_{n=1}^{\infty} (K_{VU}^n(y)U_n^0 + K_{VY}^n(y)Y_n^0) \cos \frac{n\pi}{l} x; \\ Y &= Y_0^0 + \sum_{n=1}^{\infty} (K_{YU}^n(y)U_n^0 + K_{YY}^n(y)Y_n^0) \cos \frac{n\pi}{l} x; \\ X &= \sum_{n=1}^{\infty} (K_{XU}^n(y)U_n^0 + K_{XY}^n(y)Y_n^0) \sin \frac{n\pi}{l} x; \\ \sigma_x &= \nu Y_0^0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_U^n(y)U_n^0 + A_Y^n(y)Y_n^0) \cos \frac{n\pi}{l} x. \end{aligned} \quad (7.5)$$

Здесь

$$\begin{aligned} K_{UU}^n &= K_{XX}^n = ch \frac{n\pi}{l} y + \frac{1+\nu}{2} \frac{n\pi}{l} y sh \frac{n\pi}{l} y; \\ K_{UV}^n &= -K_{YX}^n = \frac{1}{2} \left[(1-\nu) sh \frac{n\pi}{l} y + (1+\nu) \frac{n\pi}{l} y ch \frac{n\pi}{l} y \right]; \\ K_{UY}^n &= -K_{VX}^n = \frac{1+\nu}{4} y sh \frac{n\pi}{l} y; \\ K_{UX}^n &= \frac{1}{4} \left[\frac{(3-\nu)l}{n\pi} sh \frac{n\pi}{l} y + (1+\nu) y ch \frac{n\pi}{l} y \right]; \\ K_{VU}^n &= -K_{XY}^n = \frac{1}{2} \left[(1-\nu) sh \frac{n\pi}{l} y - (1+\nu) \frac{n\pi}{l} y ch \frac{n\pi}{l} y \right]; \\ K_{VV}^n &= K_{YY}^n = ch \frac{n\pi}{l} y - \frac{1+\nu}{2} \frac{n\pi}{l} y sh \frac{n\pi}{l} y; \\ K_{VY}^n &= \frac{1}{4} \left[\frac{(3-\nu)l}{n\pi} sh \frac{n\pi}{l} y - (1+\nu) y ch \frac{n\pi}{l} y \right]; \\ K_{YU}^n &= -K_{XV}^n = -(1+\nu) \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 y sh \frac{n\pi}{l} y; \\ K_{YV}^n &= (1+\nu) \frac{n\pi}{l} \left(sh \frac{n\pi}{l} y - \frac{n\pi}{l} y ch \frac{n\pi}{l} y \right); \\ K_{XU}^n &= (1+\nu) \frac{n\pi}{l} \left(sh \frac{n\pi}{l} y + \frac{n\pi}{l} y ch \frac{n\pi}{l} y \right); \\ A_U^n &= (1+\nu) \frac{n\pi}{l} \left(2ch \frac{n\pi}{l} y + \frac{n\pi}{l} y sh \frac{n\pi}{l} y \right); \\ A_V^n &= (1+\nu) \frac{n\pi}{l} \left(sh \frac{n\pi}{l} y + \frac{n\pi}{l} y ch \frac{n\pi}{l} y \right); \end{aligned} \quad (7.6)$$

$$A_Y^n = \nu ch \frac{n\pi}{l} y + \frac{1+\nu}{2} \frac{n\pi}{l} y sh \frac{n\pi}{l} y;$$

$$A_X^n = \frac{1}{2} \left[(3+\nu) sh \frac{n\pi}{l} y + (1+\nu) \frac{n\pi}{l} y ch \frac{n\pi}{l} y \right].$$

Решение (7.5) можно интерпретировать, как решение для бесконечной в направлении оси x полосы, периодически загруженной по продольным краям $y = \pm h$ нормальными или касательными нагрузками, которые симметрично приложены с периодом l . В этом случае полоса разбивается на отдельные пролеты длиной l , причем в каждом из них по симметрии реализуется одно и то же распределение перемещений и напряжений, а на их границах обращаются в нуль нечетные функции перемещений и напряжений, т. е. выполняются условия (7.1).

Коэффициенты Y_0^0 и U_0^0 определим, удовлетворяя граничным условиям на продольных сторонах (7.2):

$$\begin{cases} L_{YU}(\alpha, h) U_0(x) + L_{YY}(\alpha, h) Y_0(x) = \sigma_y(x); \\ L_{XU}(\alpha, h) U_0 + L_{XY}(\alpha, h) Y_0 = 0 \end{cases} \quad (7.7)$$

или

$$\begin{cases} Y_0^0 + \sum_{n=1}^{\infty} (K_{YU}^n(h) U_n^0 + K_{YY}^n(h) Y_n^0) \cos \frac{n\pi}{l} x = \sigma_y(x); \\ \sum_{n=1}^{\infty} (K_{XU}^n(h) U_n^0 + K_{XY}^n(h) Y_n^0) \sin \frac{n\pi}{l} x = 0. \end{cases} \quad (7.8)$$

Пользуясь свойством ортогональности тригонометрических рядов, найдем их. Определим, например, Y_0^0 . Для этого проинтегрируем первое равенство (7.8) от $-l$ до l . Учитывая, что все косинусы ортогональны к 1, получим

$$Y_0^0 = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l \sigma_y(x) dx. \quad (7.9)$$

Прочие коэффициенты U_n^0 и Y_n^0 определяются из системы линейных уравнений

$$\begin{cases} \sigma_n = K_{YU}^n(h) U_n^0 + K_{YY}^n(h) Y_n^0; \\ 0 = K_{XU}^n(h) U_n^0 + K_{XY}^n(h) Y_n^0, \end{cases} \quad (7.10)$$

где

$$\int_{-l}^l \sigma_y(x) \cos \frac{n\pi}{l} x dx = \sigma_n. \quad (7.11)$$

Откуда получаем, что

$$U_n^0 = \frac{\sigma_n K_{XY}^n(h)}{\Delta}, \quad Y_n^0 = -\frac{\sigma_n K_{XU}^n(h)}{\Delta},$$

$$\Delta = -\frac{\nu+1}{2} \frac{n\pi}{l} \left(sh \left(\frac{2n\pi}{l} h \right) + \frac{2n\pi}{l} h \right). \quad (7.12)$$

Пусть, для примера, на продольных сторонах полуполосы касательные напряжения равны нулю, а нормальные напряжения представлены сосредоточенными силами одинаковой интенсивности P , приложенными в точках $x = 0, \pm l, \pm 3l, \dots, y = \pm h$. Тогда

$$\sigma_n = \int_{-1}^1 P \delta(x) \cos \frac{n\pi}{l} x dx = P. \quad (7.13)$$

$$Y_0^0 = \frac{1}{2}P, \quad U_n^0 = \frac{PK_{XY}^n(h)}{\Delta}, \quad Y_n^0 = -\frac{PK_{XU}^n(h)}{\Delta}. \quad (7.14)$$

А формулы для напряжений и перемещений принимают вид $\left(q_n = \frac{n\pi}{l}\right)$:

$$\begin{aligned} U(x, y) &= -P \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(\nu - 1)sh(q_nh) + (\nu + 1)q_nhch(q_nh)]ch(q_ny) - (\nu + 1)q_nysh(q_ny)sh(q_nh)}{(\nu + 1)q_n(sh(2q_nh) + 2q_nh)} \sin q_nx; \\ V(x, y) &= V_0 + \frac{1 - \nu}{4}Py - \\ P \sum_{n=1}^{\infty} &\frac{(\nu + 1)q_nysh(q_nh)ch(q_ny) - (2sh(q_nh) + (\nu + 1)q_nhch(q_nh))sh(q_ny)}{(\nu + 1)q_n(sh(2q_nh) + 2q_nh)} \cos q_nx; \\ Y &= \frac{P}{2} + P \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[sh(q_nh) + q_nhch(q_nh)]ch(q_ny) - q_nysh(q_nh)sh(q_ny)}{ch(q_nh)sh(q_nh) + q_nh} \cos q_nx; \quad (7.15) \\ X &= P \sum_{n=1}^{\infty} \frac{ysh(q_nh)ch(q_ny) - hch(q_nh)sh(q_ny)}{ch(q_nh)sh(q_nh) + q_nh} q_n \sin q_nx; \\ \sigma_x &= \nu \frac{P}{2} + P \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(sh(q_nh) - q_nhch(q_nh))ch(q_ny) + q_nysh(q_nh)sh(q_ny)}{ch(q_nh)sh(q_nh) + q_nh} \cos q_nx. \end{aligned}$$

8. Заключение. Приводятся аналитические решения краевых задач теории упругости для полуполосы и прямоугольника в виде разложений в тригонометрические ряды в случае симметричной и обратно-симметричной деформаций. Рассмотрены классический способ решения в перемещениях и решение с помощью метода начальных функций. В частности, метод начальных функций очень удобен при решении обратным методом. Решения даются для двух типов периодических продолжений в полуплоскость. Все полученные формулы тщательно проверены. Для сосредоточенных нагрузок численно показано совпадение свернутых формул с их представлениями в виде бесконечных рядов.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Шемякин, Е. И. О красивых задачах теории упругости для областей с угловыми точками (плоская деформация) / Е. И. Шемякин // Доклады РАН. – 1996. – Т. 347. – № 3. – С. 342–345.
- [2] Коваленко, М. Д. Разложения по функциям Фадля – Папковича в полосе. Примеры решений в полуполосе / М. Д. Коваленко, С. В. Шибирин // Известия РАН. МТТ. – 1997. – № 1. – С. 56–63.
- [3] Коваленко, М. Д. Разложения по функциям Фадля – Папковича в полосе. Примеры решений в полуполосе / М. Д. Коваленко, И. В. Меньшова, Т. Д. Шуляковская // Известия РАН. МТТ. – 2013. – № 5. – С. 136–158.
- [4] Фихтенгольц, Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления / Г. М. Фихтенгольц. – М. : Физматлит, 2001. – Т. 3. – 662 с.
- [5] Прудников, А. П. Интегралы и ряды. Специальные функции / А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев. – М. : Наука, 1983. – 752 с.
- [6] Власов, В. В. Метод начальных функций в задачах теории упругости и строительной механики / В. В. Власов. – М. : Стройиздат, 1975. – 224 с.

Меньшова Ирина Владимировна,

кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории геодинамики, Институт теории прогноза землетрясений и математической геофизики Российской академии наук, г. Москва

e-mail: menshovairina@yandex.ru

I. V. Menshova

ABOUT PERIODIC SOLUTIONS OF FILON – RIBIERE FOR TWO-DIMENSIONAL PROBLEMS OF ELASTICITY THEORY

Institute of Earthquake Prediction Theory and Mathematical Geophysics, Russian Academy of Sciences

Abstract. The periodic solutions (in the trigonometric series) for the boundary value problems of elasticity theory for the semi strip in the case of symmetric and inversely symmetric deformations are given. The solutions are constructed for two possible types of prolongations in the half-plane: 1) in the longitudinal sides of semi strip transverse displacements and shear stresses are equal to zero; 2) in the longitudinal sides of semi strip longitudinal displacements and normal stresses are equal to zero. Two approaches are considered: traditional method of solving and the solving in terms of initial functions, specifically, inverse method. In the case when on the and face of the semi strip the concentrated loads, represented by delta-functions (normal or tangential concentrated loads) or its first derivative (concentrated bending moment, concentrated shear dipole) are given, the series can be express through elementary functions. Some features of the problems resolving are expanded.

Keywords: boundary value problem, periodic solutions of Faylon – Ribere, semi strip, method of initial functions, inverse method.

REFERENCES

- [1] Shemyakin, E. I. About regional tasks of the theory of elasticity for areas with angular points (flat deformation) / E. I. Shemyakin // Reports of the Russian Academy of Sciences. – 1996. – Vol. 347. – № 3. – P. 342–345. (in Russian)
- [2] Kovalenko, M. D. Decomposition on Fadly – Papkovich's functions in a strip. Examples of decisions in to semi-strip / M. D. Kovalenko, S. V. Shibirin // News of the Russian Academy of Sciences. Mechanics of a solid body. 1997. № 1. P. 56–63. (in Russian)
- [3] Kovalenko, M. D. Decomposition on functions Fadly – Papkovich. Examples of decisions in a semi-strip / M. D. Kovalenko, I. V. Menshova, T. D. Shulyakovskaya // News of the Russian Academy of Sciences. Mechanics of a solid body. – 2013. – № 5. – P. 136–158. (in Russian)
- [4] Fikhtengolts, G. M. Course of differential and integral calculus / G. M. Fikhtengolts. – M. : Fizmatlit, 2001. – Vol. 3. – 662 p. (in Russian)
- [5] Prudnikov, A. P. Integrals and ranks. Special functions / A. P. Prudnikov, Yu. A. Brychkov, O. I. Marichev. – M. : Nauka, 1983. – 752 p. (in Russian)
- [6] Vlasov, V. V. Method of initial functions in theory tasks elasticity and construction mechanics / V. V. Vlasov. – M. : Stroyizdat, 1975. – 224 p. (in Russian)

Menshova, Irina Vladimirovna

PhD, Senior Researcher at the Institute of Earthquake Prediction Theory and Mathematical Geophysics, Russian Academy of Sciences, Moscow