

Д. О. Евтихов

УПРУГОПЛАСТИЧЕСКАЯ ГРАНИЦА СКРУЧИВАЕМОГО СТЕРЖНЯ, АРМИРОВАННОГО ВОЛОКНАМИ

Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика.

М. Ф. Решетнева, Красноярск, Россия

Аннотация. Рассмотрена задача о кручении упругопластического стержня, армированного упругими волокнами. Для решения задачи используются законы сохранения. Разработана программа для ЭВМ для нахождения упругопластической границы. Приведены результаты работы программы для стержней с прямоугольным поперечным сечением, армированными одним, двумя и пятью волокнами, различного радиуса и расположенные различным образом. Расчеты производились на персональном компьютере, время расчетов представленных в статье упругопластических границ 3-5 минут.

Ключевые слова: Упругопластическая граница, задача кручения упругого стержня, стержень армированный волокнами, законы сохранения.

Евтихов Денис Олегович, аспирант кафедры информационных экономических систем; e-mail: evtikhov_do@sibsau.ru; AuthorID: 1036711

для цитирования: Евтихов Д. О. Упругопластическая граница скручиваемого стержня, армированного волокнами // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2024. № 4(62). С. 53-61. DOI: 10.37972/chgpu.2024.62.4.004 EDN: SANGJY

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0).

D. O. Evtikhov

THE ELASTIC-PLASTIC BOUNDARY OF A TORSIONAL ROD, FIBER REINFORCED

Reshetnev Siberian State University of Science and Technology, Krasnoyarsk, Russia

Abstract. The problem of torsion of an elastoplastic rod reinforced with elastic fibers is considered. Conservation laws are used to solve the problem. A computer program has been developed to find the elastoplastic boundary. The results of the program for rods with rectangular cross-section reinforced with one, two and five fibers of different radii and arranged in different ways are presented. Calculations were performed on a personal computer, the calculation time of the elastic-plastic boundaries presented in the article is 3-5 minutes.

Keywords: Elastic-plastic boundary, the problem of torsion of an elastic rod, a fiber-reinforced rod, conservation laws.

Denis O. Evtikhov, Scientific Researcher; e-mail: evtikhov_do@sibsau.ru; AuthorID: 1036711

to cite this article: *Evtikhov D. O.* The elastic-plastic boundary of a torsional rod, fiber reinforced // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2024. No 4(62). p. 53-61. DOI: 10.37972/chgpu.2024.62.4.004 EDN: SANGJY

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение. Нахождение упругопластической границы в скручиваемых стержнях, необходимо для нахождения предела прочности изделия или для его упрочнения при помощи пластических деформаций. При этом важно, чтобы пластическому деформированию подвергались только близкие к внешней поверхности слои материала, и чтобы в процессе деформирования не произошло разрушение упрочняемого изделия и не ухудшились его эксплуатационные характеристики. При этом в настоящее время использованию композитных материалов уделяется все больше внимания. В [1] Приводятся первые результаты исследования принципиально нового композита, производимого методами порошковой металлургии с использованием в качестве исходных компонентов углеволокна и чистого железа, показано, что величины прочности при изгибе и растяжении могут превышать 2000 и 1000 МПа. В [2] рассматривается применение структурно-функционального анализа в качестве основного инструмента для проектирования структуры силовых элементов конструкций из композиционных материалов. Сформированные структуры обеспечивают удельную несущую способность композитных конструкций, близкую к максимальной. В [3] Рассматривается упругое деформирование композита, состоящей из двух пластин, связанных адгезионным слоем в состоянии плоской деформации. В [4] проведены исследования стойкости формируемого композитного материала при высокоскоростном соударении. В [5] рассмотрена задача о напряженном состоянии композиционного бруса с упругопластической матрицей и упругими волокнами, расположенными вдоль оси бруса.

Перечисленные проблемы приводят к задаче нахождения упругопластической границы скручиваемого стержня, армируемого упругими волокнами [6]. До работ авторов [7–9] не было представлено эффективного метода, который позволял бы решать эту задачу. Использование законов сохранения для решения дифференциальных уравнений позволило получить аналитические формулы для нахождения упругопластической границы стержней.

Постановка задачи. Рассмотрим упругопластический стержень, армированный упругими волокнами, см. рисунок 1.

Пусть $u = \tau_{xz}$, $v = \tau_{yz}$ - единственные ненулевые компоненты тензора напряжений. В упругой зоне они удовлетворяют уравнениям:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= u_x + v_y = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} &= u_y + v_x = a, \\ a &= -2G\theta, \end{aligned} \quad (1)$$

в пластической зоне:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= u_x + v_y = 0, \\ \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 &= u^2 + v^2 = k_s^2, \end{aligned} \quad (2)$$

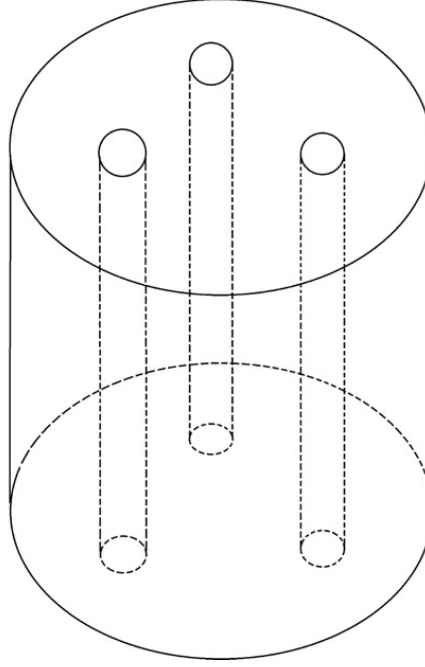


Рис. 1. Скручиваемый стержень, армированный волокнами

индексы внизу обозначают производную по соответствующей переменной.

Рассмотрим поперечное сечение скручиваемого стержня рисунок 2. Где L – боковая поверхность стержня, которая находится в пластичном состоянии, тогда на ней выполняется условия:

$$\begin{cases} un_1 + vn_2 = 0 \\ u^2 + v^2 = k_s^2 \end{cases} \quad (3)$$

k_s - предел текучести в матрице, k_B - в волокне, $k_B > k_s$. n_1, n_2 - компоненты внешнего вектора нормали к боковой поверхности.

На границе волокон $L_i = (x - x_{A_i})^2 + (y - y_{A_i})^2 = R_{A_i}^2$ и матрицы выполняется условие [10]:

$$\begin{cases} un_1 + vn_2 = \tau \\ u^2 + v^2 = k_s^2 \end{cases} \quad (4)$$

отсюда получаем:

$$u = \tau n_1 \mp n_2 \sqrt{k_s^2 - \tau^2}, v = \tau n_2 \pm n_1 \sqrt{k_s^2 - \tau^2},$$

$$x = x_{A_i} + R_{L_i} n_1, y = y_{A_i} + R_{L_i} n_2,$$

τ - заданное касательное напряжение, R_{L_i} - радиус i -ого волокна.

Запишем (1) в виде:

$$F_1 = u_x + v_y = 0, F_2 = u_y - v_x - a = 0. \quad (5)$$

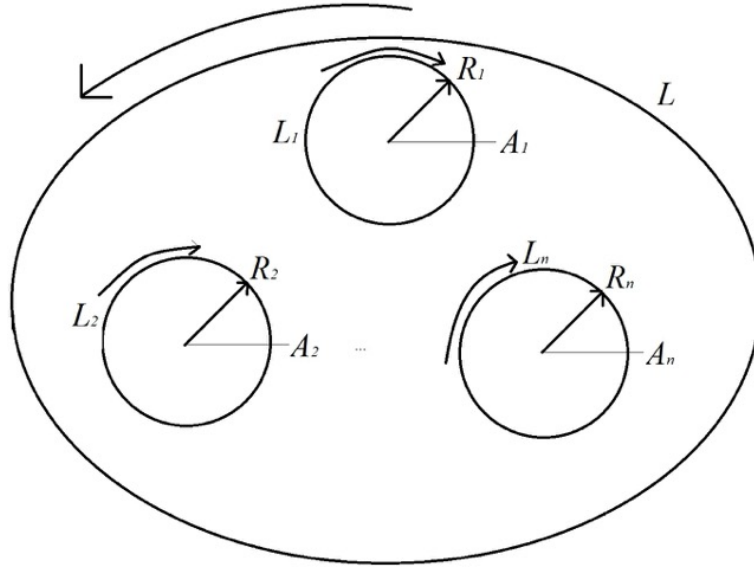


Рис. 2. Поперечное сечение скручиваемого стержня, армированного упругими волокнами. Стрелками указано направление обхода контуров при вычислении интеграла.

Закон сохранения для системы (5) запишем в виде [7]:

$$\partial_x A + \partial_y B = \Delta_1 F_1 + \Delta_2 F_2 = 0, \quad (6)$$

здесь Δ_1, Δ_2 некоторые линейные дифференциальные операторы.

Пусть $A = \alpha^1 u + \beta^1 v + \gamma^1, B = \alpha^2 u + \beta^2 v + \gamma^2$, тогда из (6) получаем:

$$\alpha_x^1 + \alpha^1 u_x + \beta_x^1 v + \beta^1 v_x + \gamma^1 + \alpha_y^2 u + \alpha^2 u_y + \beta_y^2 v + \beta^2 v_y + \gamma^2 = \omega_1(u_x + v_y - a) + \omega(u_y - v_x). \quad (7)$$

α, β и γ функции только от x, y .

Из (7) следует:

$$\begin{aligned} \alpha^1 &= \beta^2, \beta^1 = -\alpha^2, \gamma_x^1 + \gamma_y^2 = -a\alpha^1, \\ &\begin{cases} \alpha_x^1 - \beta_y^1 = 0, \\ \beta_x^1 + \alpha_y^1 = 0, \\ \gamma_x^1 + \gamma_y^2 = -\alpha^1 a, \end{cases} \quad (8) \\ A &= \alpha^1 u + \beta^1 v + \gamma^1, B = -\beta^1 u + \alpha^1 v + \gamma^2. \end{aligned}$$

Рассмотрим два решения системы уравнений (8) имеющие особенность в точке (x_0, y_0) , первое решение возьмем в виде:

$$\begin{aligned}\alpha^1 &= \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \\ \beta^1 &= -\frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \\ \gamma_x^1 + \gamma_y^2 &= -a\alpha^1,\end{aligned}\tag{9}$$

где $\gamma^2 = 0, \gamma^1 = -a \arctg \frac{y-y_0}{x-x_0}$.

Второе решение возьмем в виде:

$$\begin{aligned}\alpha^3 &= \frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \\ \beta^3 &= \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \\ \gamma_x^3 + \gamma_y^4 &= -a\alpha^3,\end{aligned}\tag{10}$$

где $\gamma^3 = 0, \gamma^4 = -\frac{a}{2} \ln((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2)$.

Из закона сохранения (6) следует:

$$\iint_S (A_x + B_y) dx dy = \left(\oint_L + \sum_{i=1}^n \oint_{L_i} \right) = 0,\tag{11}$$

где S – поперечное сечение, L – граница S , L_i – граница i -ого волокна.

Тогда из (11) получаем для первого решения:

$$2\pi u(x_0, y_0) = -\tau_{xz}(x_0, y_0) 2\pi = - \left(\oint_L + \sum_{i=1}^n \oint_{L_i} \right),\tag{12}$$

для второго решения:

$$2\pi v(x_0, y_0) = -\tau_{yz}(x_0, y_0) 2\pi = - \left(\oint_L + \sum_{i=1}^n \oint_{L_i} \right).\tag{13}$$

Более подробно подобные вычисления рассматриваются в [8].

Формулы (12) и (13) позволяют построить упругопластическую границу для скручиваемого стержня, армируемого волокнами. Точки поперечного сечения, в которых выполняется условие $u^2 + v^2 \leq k_s^2$ принадлежат упругой области, остальные – пластической.

С использованием этих формул нами была разработана программа для ЭВМ в среде Maple. На рисунках 3, 4 представлены результаты расчета упругопластической границы стержня $2h \times 2l$, прямоугольного поперечного сечения, армируемого упругими волокнами, где $l=6, h=3$, значения крутящего параметра $a=0.2$, местоположение центра волокна и его радиус указан в подписи к рисунку. Светлые области упругие, Темные пластичные.

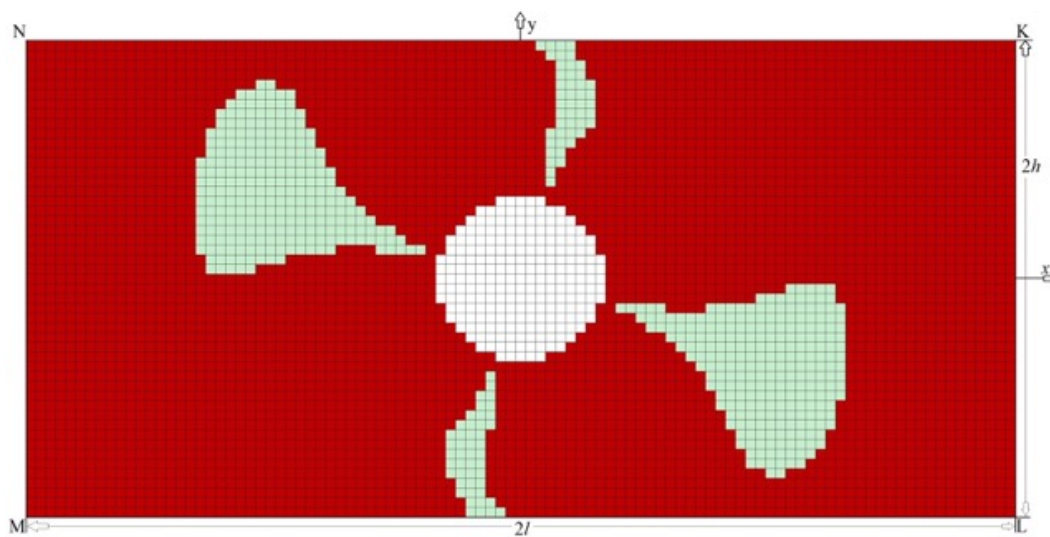


Рис. 3. Упругопластическая граница, $x_{A_1} = 0, y_{A_1} = 0, R_{L_1} = 1$.

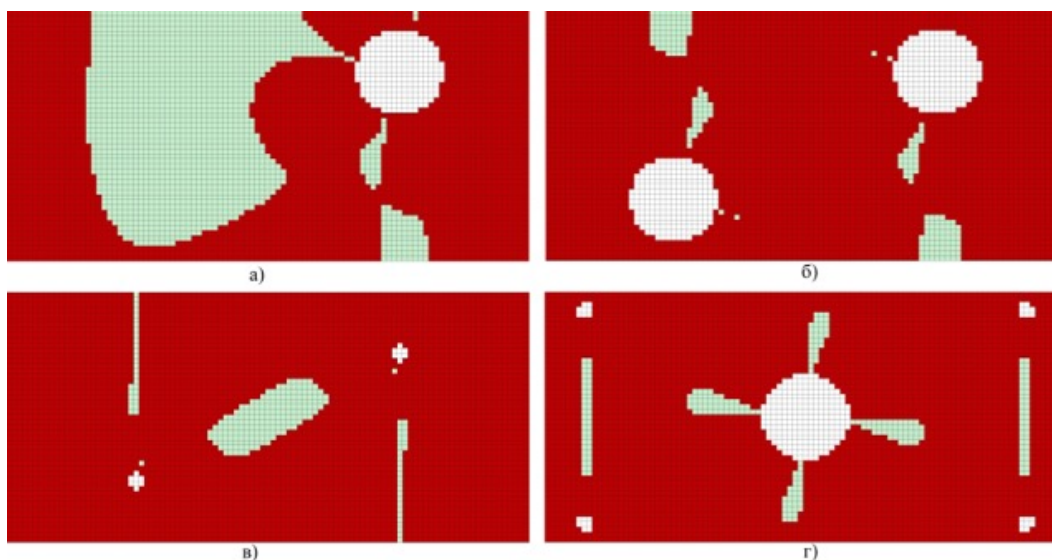


Рис. 4. Упругопластическая граница: а) $x_{A_1} = 3, y_{A_1} = 1.5, R_{L_1} = 1$;
 б) $x_{A_1} = 3, y_{A_1} = 1.5, x_{A_2} = -3, y_{A_2} = -1.5, R_{L_1} = 1, R_{L_2} = 1$;
 в) $x_{A_1} = 3, y_{A_1} = 1.5, x_{A_2} = -3, y_{A_2} = -1.5, R_{L_1} = 0.2, R_{L_2} = 0.2$;
 г) $x_{A_1} = 0, y_{A_1} = 0, x_{A_2} = -3, y_{A_2} = -1.5, x_{A_3} = 3, y_{A_3} = 1.5, x_{A_4} = -3, y_{A_4} = 1.5, x_{A_5} = 3, y_{A_5} = 1.5, R_{L_1} = 1, R_{L_2} = 0.2, R_{L_3} = 0.2, R_{L_4} = 0.2, R_{L_5} = 0.2$.

Заклучение. Рассмотрена задача о кручении упругопластического стержня, армированного упругими волокнами. Для решения задачи используются законы сохранения. Разработана программа для ЭВМ для нахождения

упругопластической границы. Приведены результаты работы программы для стержней с прямоугольным поперечным сечением, армированными одним, двумя и пятью волокнами, различного радиуса и расположенные различным образом. Расчеты производились на персональном компьютере, время расчетов представленных в статье упругопластических границ 3-5 минут.

Выражаю благодарность научному руководителю, профессору Сенашову С. И. за постановку задачи и внимание к работе.

ДОПОЛНИТЕЛЬНО

Вклад авторов. 100%.

Конфликт интересов. Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

Источник финансирования. Авторы заявляют об отсутствии внешнего финансирования при проведении исследования.

ADDITIONAL INFORMATION

Authors' contribution. 100%.

Competing interests. The authors declare that they have no competing interests.

Funding. This study was not supported by any external sources of funding.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Саркисян Н. С., Саркисян А. О., Колчин А. А. и др. Композитная сталь // Композиты и наноструктуры. 2024. Т. 16, № 3. С. 202–207. EDN: EAQPSQ. DOI: 10.36236/1999-7590-2024-16-3-202-207.
- [2] Соловьев П. В., Первушин Ю. С., Жернаков В. С., Ахмедьянов А. В. Структурно-функциональный анализ как основа проектирования структуры массоэффективных силовых элементов конструкций из композиционных материалов // Композиты и наноструктуры. 2023. Т. 15, № 4. С. 237–246. EDN: FASWSZ. DOI: 10.36236/1999-7590-2023-15-4-237-246.
- [3] Богачева В. Э., Глаголев Л. В. Разрыв по моде I адгезионного слоя с учетом диагональных компонент тензора напряжений // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2022. № 4(54). С. 47–56. EDN: ULGOYA. DOI: 10.37972/chgru.2022.54.4.005.
- [4] Гольшев А. А., Долгова С. Д. Влияние керамического волокна SiC в металло-матричном композите на его стойкость при высокоскоростном нагружении // Прикладная механика и техническая физика. 2022. Т. 63, № 6(376). С. 145–149. EDN: PUGZHK. DOI: 10.15372/PMTF20220616.
- [5] Сенашов С. И., Савостьянова И. Л., Яхно А. Н. Изгиб композитного бруса // Сибирский аэрокосмический журнал. 2024. Т. 25, № 1. С. 25–32. EDN: RRHQRV. DOI: 10.31772/2712-8970-2024-25-1-25-32.
- [6] Аннин Б. Д., Черепанов Г. П. Упруго-пластическая задача. Новосибирск : Наука, 1983. С. 126.
- [7] Киряков П. П., Сенашов С. И., Яхно А. Н. Приложение симметрий и законов сохранения к решению дифференциальных уравнений. Новосибирск : Изд-во СО РАН, 2001. С. 192.
- [8] Senashov S. I., Yakhno A. Conservation laws, hodograph transformation and boundary value problems of plane plasticity // Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications. 2012. Vol. 8. P. 071. EDN: RGOBNN. DOI: 10.3842/SIGMA.2012.071.

- [9] Сенашов С. И., Черепанова О. Н., Кондрин А. А. Об упругопластическом кручении стержня // Вестник Сибирского государственного аэрокосмического университета им. академика М. Ф. Решетнева. 2013. № 3(49). С. 100–103. EDN: RFWONN.
- [10] Работнов Ю. Н. Механика деформируемого твердого тела. Москва : Наука, 1988. С. 712.

REFERENCES

- [1] Sarkisyan N. S., Sarkisyan A. O., Kolchin A. A. et al. Composite steel // Composites and nanostructures. 2024. Vol. 16, no. 3. P. 202–207. EDN: EAQPSQ. DOI: 10.36236/1999-7590-2024-16-3-202-207. in Russian.
- [2] Solovyov P. V., Pervushin Yu. S., Zhernakov V. S., Akhmedianov A. V. Structural and functional analysis as the basis for designing the structure of the mass of effective power elements of structures made of composite materials // Composites and nanostructures. 2023. Vol. 15, no. 4. P. 237–246. EDN: FASWSZ. DOI: 10.36236/1999-7590-2023-15-4-237-246. in Russian.
- [3] Bogacheva V. E., Glagolev L. V. Rupture according to the mode I of the adhesive layer taking into account the diagonal components of the stress tensor // Bulletin of the Chuvash State Pedagogical University named after I. Ya. Yakovleva. Series: Mechanics of the limit state. 2022. no. 4(54). P. 47–56. EDN: ULGOYA. DOI: 10.37972/chgpu.2022.54.4.005. in Russian.
- [4] Golyshev A. A., Dolgova C. D. Influence of ceramic SiC fiber in a metal matrix composite on its resistance under high-speed loading // Applied mechanics and technical physics. 2022. Vol. 63, no. 6(376). P. 145–149. EDN: PUGZHK. DOI: 10.15372/PMTF20220616. in Russian.
- [5] Senashov S. I., Sevastyanova I. L., Yakhno A. N. Bending of composite timber // Siberian Aerospace Journal. 2024. Vol. 25, no. 1. P. 25–32. EDN: RRHQRY. DOI: 10.31772/2712-8970-2024-25-1-25-32. in Russian.
- [6] Annin B. D., Cherepanov G. P. Elastic-plastic problem. Novosibirsk : Nauka, 1983. P. 126. in Russian.
- [7] Kiryakov P. P., Senashov S. I., Yakhno A. N. Application of symmetries and conservation laws to the solution of differential equations. Novosibirsk : Publishing House of the SB RAS, 2001. P. 192. in Russian.
- [8] Senashov S. I., Yakhno A. Conservation laws, hodograph transformation and boundary value problems of plane plasticity // Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications. 2012. Vol. 8. P. 071. EDN: RGOBNN. DOI: 10.3842/SIGMA.2012.071.
- [9] Senashov S. I., Cherepanova O. N., Kondrin A. A. On elastic-plastic torsion of a rod // Bulletin of the Siberian State Aerospace University named after academician M. F. Reshetnev. 2013. no. 3(49). P. 100–103. EDN: RFWONN. in Russian.
- [10] Rabotnov Yu. N. Mechanics of a deformable solid. Moscow : Nauka, 1988. P. 712. in Russian.