

Д. К. Андрейченко, Е. Ю. Крылова

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ПОДВЕСА

*Саратовский национальный исследовательский государственный университет
имени Н.Г. Чернышевского, Саратов, Россия*

Аннотация. На основе уточненной математической модели исследована устойчивость цилиндрического гидродинамического подвеса с полным учетом зависимости профиля распределения скоростей жидкости от радиальной координаты в поддерживающем слое. Подвес с легким внутренним телом устойчив в большом диапазоне изменения относительного эксцентриситета, и при изменении перегрузок на величину порядка десятка ускорений свободного падения переходит из одного равновесного состояния в другое. Подвес с тяжелым внутренним телом неустойчив. Применение уточненной математической модели приводит к большому запасу устойчивости подвеса.

Ключевые слова: цилиндрический гидродинамический подвес, вязкая несжимаемая жидкость, комбинированные динамические системы, частотный критерий устойчивости, краевые задачи.

Андрейченко Дмитрий Константинович, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математического обеспечения вычислительных комплексов и информационных систем; e-mail: andreichenkodk@gmail.com; <https://orcid.org/0000-0003-0525-984X>; AuthorID: 63805

Крылова Екатерина Юрьевна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической теории упругости и биомеханики; e-mail: kat.krylova@bk.ru; <https://orcid.org/0000-0002-7593-0320>; AuthorID: 722982

для цитирования: Андрейченко Д. К., Крылова Е. Ю. Об устойчивости цилиндрического гидродинамического подвеса // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2024. № 4(62). С. 76–88. DOI: 10.37972/chgpu.2024.62.4.006 EDN: SZINGB

Статья опубликована на условиях лицензии *Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)*.

D. K. Andreichenko, E. Yu. Krylova

ON THE STABILITY OF A CYLINDRICAL HYDRODYNAMIC SUSPENSION

I. Saratov State University, Saratov, Russia

Abstract. On the basis of a refined mathematical model, the stability of a cylindrical hydrodynamic suspension is investigated with full consideration of the dependence of the velocity distribution profile of the liquid on the radial coordinate in the supporting layer. A suspension with a light internal body is stable over a large range of changes in relative eccentricity, and when overloads change by an amount of about a dozen accelerations of free fall, it moves from one equilibrium state to another. A suspension with a heavy inner body is unstable. The use of a refined mathematical model leads to a greater margin of stability of the suspension.

Keywords: cylindrical hydrodynamic suspension, viscous incompressible fluid, combined dynamic systems, frequency stability criterion, boundary value problems.

Dmitry K. Andreichenko, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor; e-mail: andreichenkodk@gmail.com;

<https://orcid.org/0000-0003-0525-984X>; AuthorID: 6506669322

Ekaterina Yu. Krylova, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor; e-mail: mail2@mail.ru;

<https://orcid.org/0000-0002-7593-0320>; AuthorID: 722982

to cite this article: *Andreichenko D. K., Krylova E. Yu.* On the stability of a cylindrical hydrodynamic suspension // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2024. No 4(62). p. 76–88. DOI: 10.37972/chgpu.2024.62.4.006 EDN: SZINGB

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение. В системах инерциальной навигации [1] широко используются гироскопы с цилиндрическим гидродинамическим подвесом [2]. Ранее на основе осреднения скорости вязкой несжимаемой жидкости по сечению поддерживающего слоя был сделан вывод о том, что при умеренных значениях колебательного числа Рейнольдса подвес с легким внутренним телом устойчив в окрестности центрального положения, а подвес с тяжелым внутренним телом неустойчив [3]. Исследование влияния на устойчивость подвеса относительного эксцентриситета расположения внутреннего и внешнего тел, колебательного числа Рейнольдса и других факторов выполнено в [4], что потребовало полного учета зависимости профиля распределения скорости частиц жидкости от радиальной координаты и привлечения частотных методов исследования устойчивости [5], развитых для комбинированных динамических систем [6]. В математических моделях гидродинамических подвесов выполняется ряд упрощений уравнений гидродинамики, связанных с малостью относительной толщины поддерживающего слоя, однако обоснованность подобных упрощений требует дополнительного исследования. В данной работе устойчивость цилиндрического подвеса исследуется на основе уточненной модели, которая, в отличие от [4], более полно учитывает влияние сил вязкого трения в поддерживающем слое.

1. Модель подвеса. Внешний цилиндр радиуса R_1 (рис. 1) движется поступательно с абсолютным ускорением \mathbf{a} и вращается с постоянной угловой скоростью ω_1 , приводит в движение вязкую несжимаемую жидкость между цилиндрами и через нее – внутренний цилиндр радиуса R_2 , вращающийся с угловой скоростью ω_2 . Требуется обеспечить устойчивость внутреннего цилиндра. Длина цилиндра значительно больше радиуса R_2 . Свяжем с центрами внешнего и внутреннего цилиндров поступательно движущиеся системы координат $O_1\xi_1\xi_2$ и $O_2x_1x_2$. Центр внутреннего цилиндра смещен относительно центра внешнего цилиндра на величину $\mathbf{y} = (y_1, y_2)^T$, заданную проекциями на оси $O_2x_1x_2$. С $O_2x_1x_2$ связана цилиндрическая система координат (r, φ) , где $x_1 = r \cos \varphi$, $x_2 = r \sin \varphi$, $\mathbf{e}_r = (\cos \varphi, \sin \varphi)^T$, $\mathbf{e}_\varphi = (-\sin \varphi, \cos \varphi)^T$, \mathbf{e}_z – единичный вектор, нормальный к плоскости $O_2x_1x_2$. Пусть t – время, m , J – погонные масса и момент инерции внутреннего тела, \mathbf{N} , \mathbf{G} – сила и момент сил, действующие со стороны жидкости на внутреннее тело, $\mathbf{V} = \mathbf{V}(r, \varphi, t) = V_r \mathbf{e}_r + V_\varphi \mathbf{e}_\varphi$ и $p = p(r, \varphi, t)$ – скорость и давление в жидкости, ν , ρ – ее кинематическая вязкость и плотность, \mathbf{g} – ускорение свободного падения, толщина цилиндрического зазора $h(\varphi, t) = (R_1^2 - (\mathbf{y} \cdot \mathbf{e}_\varphi)^2)^{1/2} - R_2 - \mathbf{y} \cdot \mathbf{e}_r$. Уравнения движения подвеса суть

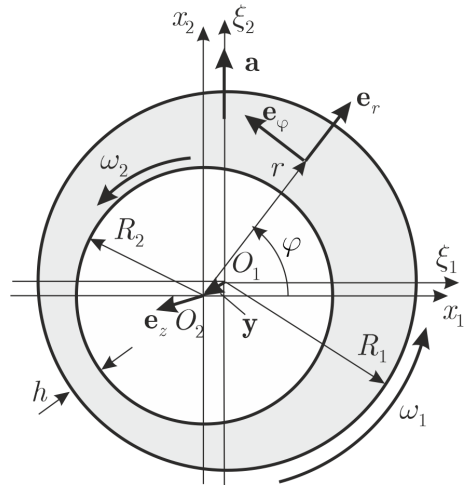


Рис. 1. Расчетная схема подвеса

$$\begin{aligned}
 m\ddot{\mathbf{y}} &= m(\mathbf{g} - \mathbf{a}) + \mathbf{N}, \quad J\dot{\omega}_2 = G, \quad (\dot{}) = d()/dt \\
 \partial \mathbf{V} / \partial t + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} &= -\rho^{-1} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{V} + \mathbf{g} - \mathbf{a} - \ddot{\mathbf{y}}, \quad \nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \\
 V_r|_{r=R_2} &= 0, \quad V_\varphi|_{r=R_2} = \omega_2 R_2 \\
 V_r|_{r=R_2+h} &= -\dot{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{e}_r - \omega_1 \mathbf{y} \cdot \mathbf{e}_\varphi, \quad V_\varphi|_{r=R_2+h} = -\dot{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{e}_\varphi + \omega_1 (R_2 + h + \mathbf{y} \cdot \mathbf{e}_r) \\
 \mathbf{N} &= R_2 \int_0^{2\pi} d\varphi \left(\rho \nu \frac{\partial V_\varphi}{\partial r} \Big|_{r=R_2} - \frac{\partial p}{\partial \varphi} \Big|_{r=R_2} \right) \mathbf{e}_\varphi, \quad G = \rho \nu R_2^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\partial V_\varphi}{\partial r} \Big|_{r=R_2} - 2\pi \rho \nu R_2^2 \omega_2
 \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь операции векторного анализа в цилиндрической системе координат

$$\begin{aligned}
 \nabla U &= \frac{\partial U}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi, \quad \nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \right), \quad \nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r} - \right. \\
 &\left. - \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} \right) \mathbf{e}_z, \quad \nabla^2 \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) + \left(\mathbf{e}_\varphi \frac{\partial}{\partial r} - \mathbf{e}_r \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \left[\frac{1}{r} \left(\frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} \right) \right] \\
 (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{A} &= \nabla(\mathbf{A}^2/2) - \mathbf{A} \times [\nabla \times \mathbf{A}]
 \end{aligned}$$

Пусть $\mathbf{V} = \omega_1 \mathbf{e}_z \times \mathbf{r} + \mathbf{v}(r, \varphi, t)$, $\mathbf{r} = (x_1, x_2)^T = r \mathbf{e}_r$, $\mathbf{v} = v_r \mathbf{e}_r + v_\varphi \mathbf{e}_\varphi$, $\delta = R_1 - R_2$, $\beta = \delta/R_2 \ll 1$, $\rho_2 = m/(\pi R_2^2)$ – приведенная плотность внутреннего цилиндра, $\gamma = g/(R_2 \omega_1^2)$. При приведении (1) к безразмерным переменным полагаем: $t = t^*/\omega_1$, $r = R_2(1 + \beta\xi)$, $\mathbf{y} = \delta \mathbf{y}^*$, $h = \delta h^*$, $\omega_1 - \omega_2 = \omega_1 \omega^*$, $v_\varphi = \omega_1 R_2 v_\varphi^*$, $v_r = \beta \omega_1 R_2 v_r^*$, $p = \rho \omega_1^2 R_2^2 p^*$, $\mathbf{g} = g \mathbf{g}^*$, $\mathbf{a} = g \mathbf{a}^*$, $\mathbf{N} = -\pi R_2^2 \rho (\mathbf{g} - \mathbf{a} - \ddot{\mathbf{y}}) + \rho \omega_1^2 R_2^3 \mathbf{N}^*$, $G = \rho \nu \omega_1 R_2^3 G^*/\delta$, $J = m R_2^2 J^*$, $\sigma = \omega_1 \delta^2 / \nu$ – колебательное число Рейнольдса [4]. В результате получено (символ «*» над безразмерными переменными далее опущен, отброшен ряд слагаемых порядка малости β^2 и выше)

$$\pi \beta \left(\frac{\rho_2}{\rho} - 1 \right) \ddot{\mathbf{y}} = \pi \left(\frac{\rho_2}{\rho} - 1 \right) \gamma (\mathbf{g} - \mathbf{a}) + \mathbf{N}, \quad \pi \frac{\rho_2}{\rho} J \dot{\omega} = -\frac{\beta}{\sigma} G, \quad \mathbf{g} = (0, -1)^T \tag{2}$$

$$h(\varphi, t) = 1 - \mathbf{y} \cdot \mathbf{e}_r - \beta (\mathbf{y} \cdot \mathbf{e}_\varphi)^2 / 2 \tag{3}$$

$$v_r = -(1 - \beta\xi) \int_0^\xi \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} d\xi, \quad \frac{\partial}{\partial \varphi} \int_0^h v_\varphi d\xi = \frac{\partial}{\partial \varphi} [(1 + \beta h)(\mathbf{y} \cdot \mathbf{e}_r - \dot{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{e}_\varphi)] \tag{4}$$

$$p = p|_{\xi=0} + \beta \int_0^\xi (v_\varphi^2 + 2v_\varphi) d\xi \tag{5}$$

$$\frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + [1 + (1 - \beta\xi)v_\varphi] \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial \xi} + \beta v_r (2 + v_\varphi) = \tag{6}$$

$$= -(1 - \beta\xi) \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \frac{1}{\sigma} \left(\frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial \xi^2} + \beta \frac{\partial v_\varphi}{\partial \xi} + \beta^2 \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial \varphi^2} \right)$$

$$v_\varphi|_{\xi=0} = -\omega, \quad v_\varphi|_{\xi=h} = \beta (\mathbf{y} \cdot \mathbf{e}_r - \dot{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{e}_\varphi) \tag{7}$$

$$\mathbf{N} = \int_0^{2\pi} \left(\frac{\beta}{\sigma} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} - \frac{\partial p}{\partial \varphi} \Big|_{\xi=0} \right) \mathbf{e}_\varphi d\varphi, \quad G = 2\pi \beta \omega + \int_0^{2\pi} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} d\varphi \tag{8}$$

Начальные условия при $t = 0$ для (2)-(8) соответствуют равновесному состоянию и находятся решением уравнений, в которых $\dot{(\)} = 0$, $\partial(\)/\partial t = 0$. В «укороченном» уравнении Навье-Стокса (6) более полно учитывается влияние сил вязкого трения по сравнению с [4]. Математическая модель (2)-(8) содержит связанную систему обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных, и является комбинированной динамической системой [6] с входными функциями $\mathbf{a}(t) = (a_1(t), a_2(t))^T$ и выходными функциями $y_1(t), y_2(t), \omega(t)$. Используя (5), приводим (6) к виду

$$\begin{aligned} \partial v_\varphi / \partial t &= \mathbb{F}[\mathbf{v}] - (1 - \beta\xi)\Pi(\varphi, t), \quad \Pi = \partial p|_{\xi=0} / \partial \varphi, \quad \int_0^{2\pi} \Pi d\varphi = 0 \\ \mathbb{F}[\mathbf{v}] &= -[1 + (1 - \beta\xi)v_\varphi] \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} - v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial \xi} + \beta U + \frac{1}{\sigma} \left(\frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial \xi^2} + \beta \frac{\partial v_\varphi}{\partial \xi} + \beta^2 \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial \varphi^2} \right) \quad (9) \\ U &= (1 - \beta\xi) \left(v_\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \int_0^\xi v_\varphi d\xi - \frac{\partial}{\partial \varphi} \int_0^\xi v_\varphi^2 d\xi \right) \end{aligned}$$

Дифференцируя по времени второе уравнение (4) и используя (8), находим

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \left[h \left(1 - \frac{1}{2} \beta h \right) \Pi + \frac{1 + \beta h}{\pi \beta} \left(\frac{\rho_2}{\rho} - 1 \right)^{-1} \mathbf{e}_\varphi \cdot \int_0^{2\pi} \Pi \mathbf{e}_\varphi d\varphi \right] = \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \Phi &= \int_0^h \mathbb{F}[\mathbf{v}] d\xi + \frac{1 + \beta h}{\pi \sigma} \left(\frac{\rho_2}{\rho} - 1 \right)^{-1} \mathbf{e}_\varphi \cdot \int_0^{2\pi} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} \mathbf{e}_\varphi d\varphi - \\ &\quad - (1 + \beta h) (\dot{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{e}_r - \gamma(\mathbf{g} - \mathbf{a}) \cdot \mathbf{e}_\varphi / \beta) \end{aligned} \quad (11)$$

При неограниченном возрастании угловой скорости подвеса $\sigma \rightarrow \infty$, и $\chi = (\rho_2/\rho - 1)\gamma\sigma^{-2} = \text{const} = \underline{\underline{O}}(1)$. Выполнилось асимптотическое интегрирование уравнений равновесного состояния ($\dot{(\)} = 0$, $\partial(\)/\partial t = 0$). Аналогично [4], подвес быстро центрируется в равновесном состоянии при увеличении σ : $\mathbf{y} = \sigma^{-2}\mathbf{y}_0 + \sigma^{-5/2}\mathbf{y}_1 + \dots$, $\omega = \sigma^{-7/2}\sqrt{2}(1 + 3\beta/2)\mathbf{y}_0^2/4 + \dots$, $\sigma \rightarrow \infty$, $\mathbf{y}_0 = (y_{0,1}, y_{0,2})^T = -(1 - 3\beta/2)\chi(\mathbf{g} - \mathbf{a})$, $\mathbf{y}_1 = (y_{1,1}, y_{1,2})^T$, $y_{1,1} + iy_{1,2} = -2\sqrt{i}(y_{0,1} + iy_{0,2})$, $i = \sqrt{-1}$.

2. Моделирование переходных процессов. Выполняется отображение занятой поддерживающим слоем области с подвижной границей на область с неподвижной границей переходом к новой независимой переменной $x = \xi/h(\varphi, t)$. При этом (4), (7)-(9), (11) преобразуются к виду

$$v_r = (1 - \beta hx) \left[\frac{\partial h}{\partial \varphi} x v_\varphi - \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(h \int_0^x v_\varphi dx \right) \right] \quad (12)$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \left[h \int_0^1 v_\varphi dx \right] = \frac{\partial}{\partial \varphi} [(1 + \beta h)(\mathbf{y} \cdot \mathbf{e}_r - \dot{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{e}_\varphi)] \quad (13)$$

$$\frac{\partial v_\varphi}{\partial t} = \frac{x}{h} \frac{\partial h}{\partial t} \frac{\partial v_\varphi}{\partial x} - (1 - \beta hx)\Pi + \mathbb{F}[\mathbf{v}], \quad \Pi = \Pi(\varphi, t), \quad \int_0^{2\pi} \Pi d\varphi = 0 \quad (14)$$

$$\mathbb{F}[\mathbf{v}] = \beta(1 - \beta hx) \left[v_\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(h \int_0^x v_\varphi dx \right) - \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(h \int_0^x v_\varphi^2 dx \right) \right] - [1 + (1 - \beta hx)v_\varphi] \cdot \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{x}{h} \frac{\partial h}{\partial \varphi} \frac{\partial v_\varphi}{\partial x} \right) - \frac{v_r}{h} \frac{\partial v_\varphi}{\partial x} + \frac{1}{\sigma} \left[\frac{1}{h^2} \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial x^2} + \frac{\beta}{h} \frac{\partial v_\varphi}{\partial x} + \beta^2 \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{x}{h} \frac{\partial h}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 v_\varphi \right]$$

$$v_\varphi|_{x=0} = -\omega, \quad v_\varphi|_{x=1} = \beta(\mathbf{y} \cdot \mathbf{e}_r - \dot{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{e}_\varphi) \quad (15)$$

$$\mathbf{N} = \int_0^{2\pi} \left(\frac{\beta}{\sigma h} \frac{\partial v_\varphi}{\partial x} \Big|_{x=0} - \Pi \right) \mathbf{e}_\varphi d\varphi, \quad G = 2\pi\beta\omega + \int_0^{2\pi} \frac{\partial v_\varphi}{\partial x} \Big|_{x=0} \frac{d\varphi}{h} \quad (16)$$

$$\Phi = h \int_0^1 \mathbb{F}[\mathbf{v}] dx + \frac{1 + \beta h}{\pi\sigma} \left(\frac{\rho_2}{\rho} - 1 \right)^{-1} \mathbf{e}_\varphi \cdot \int_0^{2\pi} \frac{\partial v_\varphi}{\partial x} \Big|_{x=0} \mathbf{e}_\varphi \frac{d\varphi}{h} - (1 + \beta h)(\dot{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{e}_r - \gamma(\mathbf{g} - \mathbf{a}) \cdot \mathbf{e}_\varphi / \beta) \quad (17)$$

Пусть $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$. Полагаем

$$v_\varphi(x, \varphi, t) \approx \sum_{n=0}^{N_x+2} \sum_{k=-N_\varphi}^{N_\varphi} v_{\varphi nk}(t) T_n(2x-1) e^{ik\varphi}, \quad v_{\varphi n, -k} = \bar{v}_{\varphi nk}, \quad N_x \geq 7\sigma^{1/4}/2$$

$$\Pi(\varphi, t) \approx \sum_{k=1}^{N_\varphi} (p_k(t) e^{ik\varphi} + p_{-k}(t) e^{-ik\varphi}), \quad p_{-k} = \bar{p}_k \quad (18)$$

и применяем к (10), (13) и (14) проекционный метод Галеркина [7] в форме

$$\int_0^{2\pi} d\varphi e^{ik\varphi} \left[h(1 - \beta h/2)\Pi + \frac{(1 + \beta h)\rho}{\pi\beta(\rho_2 - \rho)} \mathbf{e}_\varphi \cdot \int_0^{2\pi} \Pi \mathbf{e}_\varphi d\varphi \right] = \int_0^{2\pi} d\varphi e^{ik\varphi} \Phi, \quad (19)$$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi e^{ik\varphi} h \int_0^1 v_\varphi dx = \int_0^{2\pi} d\varphi e^{ik\varphi} (1 + \beta h)(\mathbf{y} \cdot \mathbf{e}_r - \dot{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{e}_\varphi), \quad k = \pm 1, \dots, \pm N_\varphi \quad (20)$$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi e^{ik\varphi} \int_0^1 dx T_n(2x-1) \frac{\partial v_\varphi}{\partial t} = \int_0^{2\pi} d\varphi e^{ik\varphi} \int_0^1 dx T_n(2x-1) \left[\frac{x}{h} \frac{\partial h}{\partial t} \frac{\partial v_\varphi}{\partial x} - (1 - \beta hx)\Pi(\varphi, t) + \mathbb{F}[\mathbf{v}] \right], \quad n = \overline{0, N_x}, \quad k = \overline{-N_\varphi, N_\varphi} \quad (21)$$

С учетом (18), уравнения (2), (3), (10), (15), (16), (19)-(2) представляют собой в неявной форме систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{F}(t, \mathbf{Y}), \quad \mathbf{Y} = (y_1, y_2, \omega, \dot{y}_1, \dot{y}_2, v_{\varphi n_0}, \text{Re } v_{\varphi \nu k}, \text{Im } v_{\varphi \nu k})^T$$

$$n = \overline{0, N_x}, \quad \nu = \overline{1, N_x}, \quad k = \overline{1, N_\varphi} \quad (22)$$

которая, после приведения к нормальной форме (23), интегрируется численно ФДН-методом [8]. Соответствующие равновесному состоянию начальные условия $\mathbf{Y}|_{t=0} = \mathbf{Y}_0$ находятся численно из условия $\mathbf{F}(-0, \mathbf{Y}_0) = 0$.

3. Моделирование устойчивости. Пусть величины $\mathbf{y}_0, \omega_0, h_0, v_r^{(0)}, v_\varphi^{(0)}$, Π_0, \mathbf{N}_0, G_0 соответствуют состоянию равновесия. Полагаем $\mathbf{a}(t) = \mathbf{a}_0 + \varepsilon \mathbf{a}_1(t) + \dots$, $\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}_0 + \varepsilon \mathbf{y}(t) + \dots$, $\omega(t) = \omega_0 + \varepsilon \omega_1(t) + \dots$, $h(\varphi, t) = h_0(\varphi) + \varepsilon h_1(\varphi, t) + \dots$, $v_r(\xi, \varphi, t) = v_r^{(0)}(\xi, \varphi) + \varepsilon v_r^{(1)}(\xi, \varphi, t) + \dots$, $v_\varphi(\xi, \varphi, t) = v_\varphi^{(0)}(\xi, \varphi) + \varepsilon v_\varphi^{(1)}(\xi, \varphi, t) + \dots$, $\Pi(\varphi, t) = \Pi_0(\varphi) + \varepsilon \Pi_1(\varphi, t) + \dots$, $\mathbf{N}(t) = \mathbf{N}_0 + \varepsilon \mathbf{N}_1(t) + \dots$, $G(t) = G_0 + \varepsilon G_1(t) + \dots$,

$\varepsilon \rightarrow 0$. Из (2)-(8) следуют линейные уравнения возмущенного движения, решением которых являются $\mathbf{y}_1, \omega_1, h_1, v_r^{(1)}, v_\varphi^{(1)}, \Pi_1, N_1, G_1$ (на подвижной границе выполняется снесение граничных условий на невозмущенную стенку [9]):

$$\begin{aligned} \pi\beta(\rho_2/\rho - 1)\ddot{\mathbf{y}} &= -\pi(\rho_2/\rho - 1)\gamma\mathbf{a} + \mathbf{N}, \quad \pi\rho_2 J\dot{\omega}/\rho = -\beta G/\sigma \\ h &= -\mathbf{y} \cdot \mathbf{e}_r - \beta(\mathbf{y}_0 \cdot \mathbf{e}_\varphi) \cdot (\mathbf{y} \cdot \mathbf{e}_\varphi) \\ v_r &= -(1 - \beta\xi) \int_0^\xi \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} d\xi, \quad \frac{\partial}{\partial \varphi} \int_0^h v_\varphi d\xi = \frac{\partial}{\partial \varphi} [(1 + \beta h_0)(\mathbf{y} \cdot \mathbf{e}_r - \dot{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{e}_\varphi)] \\ \partial v_\varphi / \partial t &= -(1 - \beta\xi) \Pi + \mathbb{L}[\mathbf{v}], \quad \Pi = \Pi(\varphi, t), \quad \int_0^{2\pi} \Pi d\varphi = 0 \quad (23) \\ \mathbb{L}[\mathbf{v}] &= -[1 + (1 - \beta\xi)v_\varphi^{(0)}] \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} - (1 - \beta\xi) \frac{\partial v_\varphi^{(0)}}{\partial \varphi} v_\varphi - v_r^{(0)} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \xi} - \frac{\partial v_\varphi^{(0)}}{\partial \xi} v_r + \frac{1}{\sigma} \left[\frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial \xi^2} + \right. \\ &+ \beta \frac{\partial v_\varphi}{\partial \xi} + \beta^2 \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial \varphi^2} \left. \right] + (\beta - \beta^2 \xi) \left[v_\varphi^{(0)} \frac{\partial}{\partial \varphi} \int_0^\xi v_\varphi d\xi + v_\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \int_0^\xi v_\varphi^{(0)} d\xi - 2 \int_0^\xi v_\varphi^{(0)} v_\varphi d\xi \right] \\ v_\varphi|_{\xi=0} &= -\omega, \quad v_\varphi|_{\xi=h_0} = \beta(\mathbf{y} \cdot \mathbf{e}_r - \dot{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{e}_\varphi) - h(\partial v_\varphi^{(0)} / \partial \xi)|_{\xi=h_0} \\ \mathbf{N} &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{\beta}{\sigma} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} - \Pi \right) \mathbf{e}_\varphi d\varphi, \quad G = 2\pi\beta\omega + \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\partial v_\varphi}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} \\ \mathbf{y}|_{t=0} &= \dot{\mathbf{y}}|_{t=0} = \omega|_{t=0} = v_\varphi|_{t=0} = 0 \end{aligned}$$

Далее в (23) выполняем одностороннее интегральное преобразование Лапласа $f(t) \rightarrow f(\lambda) = \int_0^\infty f(t)e^{-\lambda t} dt$. Следуя [4], представим изображение реакций слоя вязкой несжимаемой жидкости на возмущенное движение в виде $\mathbf{N}(\lambda) = -N^{(y)}(\lambda)\mathbf{y}(\lambda) - \mathbf{N}^{(\omega)}(\lambda)\omega(\lambda)$, $G(\lambda) = [\mathbf{G}^{(y)}(\lambda)]^T \mathbf{y}(\lambda) + G^{(\omega)}(\lambda)\omega(\lambda)$, $N^{(y)}(\lambda) = [N_{kj}^{(y)}(\lambda)]$, $k, j = 1, 2$, $\mathbf{N}^{(\omega)}(\lambda) = (N_1^{(\omega)}(\lambda), N_2^{(\omega)}(\lambda))^T$, $\mathbf{G}^{(y)}(\lambda) = (G_1^{(y)}(\lambda), G_2^{(y)}(\lambda))^T$. Изображения возмущений входных и выходных функций связаны системой линейных алгебраических уравнений с определителем $D(\lambda)$

$$\begin{aligned} (\pi\beta(\rho_2/\rho - 1)\lambda^2 + N^{(y)}(\lambda))\mathbf{y} + \mathbf{N}^{(\omega)}(\lambda)\omega &= -\pi\gamma(\rho_2/\rho - 1)\mathbf{a} \\ \beta[\mathbf{G}^{(y)}(\lambda)]^T \mathbf{y} / \sigma + (\pi J\lambda/\rho + \beta G^{(\omega)}(\lambda)/\sigma)\omega &= 0 \\ D(\lambda) = \det[D_{kj}(\lambda)], \quad k, j = 1, 2, 3, \quad D_{jj}(\lambda) &= \pi\beta(\rho_2/\rho - 1)\lambda^2 + N_{jj}^{(y)}(\lambda) \quad (24) \\ D_{j3}(\lambda) = N_j^{(\omega)}(\lambda), \quad D_{3j}(\lambda) = \beta G_j^{(y)}(\lambda)/\sigma, \quad j = 1, 2, \quad D_{12}(\lambda) &= N_{12}^{(y)}(\lambda) \\ D_{21}(\lambda) = N_{21}^{(y)}(\lambda), \quad D_{33}(\lambda) = \pi\rho_2 J\lambda/\rho + \beta G^{(\omega)}(\lambda)/\sigma & \end{aligned}$$

При аналитичности в правой комплексной полуплоскости и в окрестности мнимой оси функций $N_{kj}^{(y)}(\lambda), N_j^{(\omega)}(\lambda), G_j^{(y)}(\lambda), G^{(\omega)}(\lambda)$ подвес устойчив [4, 6], если

$$\Delta_{1 \leq \vartheta \leq \infty} \arg D(i\vartheta) = 5\pi/2 \quad (25)$$

и неустойчив в противном случае. Пусть δ_j^k – символ Кронекера. Из (23) следуют линейные краевые задачи для нахождения $N_{kj}^{(y)}(\lambda)$, $N_j^{(\omega)}(\lambda)$, $G_j^{(y)}(\lambda)$, $G^{(\omega)}(\lambda)$

$$\begin{aligned}
 v_r &= -(1 - \beta\xi) \int_0^\xi \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} d\xi, \quad \frac{\partial}{\partial \varphi} \int_0^h v_\varphi d\xi = \frac{\partial}{\partial \varphi} [(1 + \beta h_0)(\mathbf{e}_j^{(2)} \cdot \mathbf{e}_r - \lambda \mathbf{e}_j^{(2)} \cdot \mathbf{e}_\varphi)] \\
 \mathbf{e}_j^{(2)} &= (\delta_j^1, \delta_j^2)^T, \quad \lambda v_\varphi = -(1 - \beta\xi) \Pi + \mathbb{L}[\mathbf{v}], \quad \Pi = \Pi(\varphi), \quad \int_0^{2\pi} \Pi d\varphi = 0, \quad v_\varphi|_{\xi=0} = 0 \\
 v_\varphi|_{\xi=h_0} &= \beta(\mathbf{e}_j^{(2)} \cdot \mathbf{e}_r - \lambda \mathbf{e}_j^{(2)} \cdot \mathbf{e}_\varphi) + (\partial v_\varphi^{(0)} / \partial \xi)|_{\xi=h_0} [\mathbf{e}_j^{(2)} \cdot \mathbf{e}_r + \beta(\mathbf{y}_0 \cdot \mathbf{e}_\varphi) \cdot (\mathbf{e}_j^{(2)} \cdot \mathbf{e}_\varphi)] \\
 (N_{1j}^{(y)}, N_{2j}^{(y)})^T &= \int_0^{2\pi} \left(\Pi - \frac{\beta}{\sigma} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} \right) \mathbf{e}_\varphi d\varphi, \quad G_j^{(y)} = \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\partial v_\varphi}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0}, \quad j = 1, 2 \quad (26)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 v_r &= -(1 - \beta\xi) \int_0^\xi \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} d\xi, \quad \frac{\partial}{\partial \varphi} \int_0^h v_\varphi d\xi = 0, \quad \lambda v_\varphi = -(1 - \beta\xi) \Pi + \mathbb{L}[\mathbf{v}] \\
 \Pi &= \Pi(\varphi), \quad \int_0^{2\pi} \Pi d\varphi = 0, \quad v_\varphi|_{\xi=0} = -1, \quad v_\varphi|_{\xi=h_0} = 0 \quad (27) \\
 \mathbf{N}^{(\omega)} &= \int_0^{2\pi} \left(\Pi - \frac{\beta}{\sigma} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} \right) \mathbf{e}_\varphi d\varphi, \quad G^{(\omega)} = 2\pi\beta + \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\partial v_\varphi}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0}
 \end{aligned}$$

При умеренных и средних значениях λ и $\sigma = \underline{O}(1)$ выполнялось преобразование линейных краевых задач (26), (27) к новой независимой переменной $x = \xi/h_0(\varphi)$. Далее они аналогично (18), (20), (2) проекционным методом Галлеркина сводились к системам линейных алгебраических уравнений и решались численно. Проверка отсутствия полюсов функций $N_{kj}^{(y)}(\lambda)$, $N_j^{(\omega)}(\lambda)$, $G_j^{(y)}(\lambda)$, $k, j = 1, 2$, $G^{(\omega)}(\lambda)$ выполнялась численно на основе принципа аргумента.

При $\lambda \rightarrow \infty$, $\text{Re } \lambda > -\infty$, $\sigma = \underline{O}(1)$ аналогично [4] выполнялось асимптотическое интегрирование краевых задач (26), (27). В результате найдено

$$\begin{aligned} (N_{1j}^{(y)}(\lambda), N_{2j}^{(y)}(\lambda))^T &= \sum_{k=0}^3 \mathbf{A}_k^{(j)} \lambda^{2-k/2} + \underline{O}(1), \quad \Pi(\varphi, \lambda) = \sum_{k=0}^3 \Pi_k(\varphi) \lambda^{2-k/2} + \\ &+ \underline{O}(1), \quad \mathbf{A}_0^{(j)} = \int_0^{2\pi} \Pi_0 \mathbf{e}_\varphi d\varphi, \quad \mathbf{A}_1^{(j)} = \int_0^{2\pi} (\Pi_1 + \beta \sigma^{-1/2} \Pi_0) \mathbf{e}_\varphi d\varphi, \quad \mathbf{A}_2^{(j)} = \int_0^{2\pi} (\Pi_2 + \\ &+ \beta \sigma^{-1/2} \Pi_1 - \beta^2 \sigma^{-1} \Pi_0/2) \mathbf{e}_\varphi d\varphi, \quad \mathbf{A}_3^{(j)} = \int_0^{2\pi} [(\Pi_3 + \beta \sigma^{-1/2} \Pi_2 - \beta^2 \sigma^{-1} \Pi_1/2) \mathbf{e}_\varphi - \\ &- \beta \sigma^{-1/2} (1 - \omega_0) \Pi_0 \mathbf{e}_r/2] d\varphi, \quad G_j^{(y)}(\lambda) = -\frac{5}{8} \int_0^{2\pi} \left. \frac{\partial v_\varphi^{(0)}}{\partial \xi} \right|_{\xi=0} \frac{d\Pi_0}{d\varphi} d\varphi + \underline{O}(\lambda^{-1/2}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pi_0 &= \mathcal{L}[h_0^{-1} (1 - \beta h_0/2)^{-1} (1 + \beta h_0) \mathbf{e}_j^{(2)} \cdot \mathbf{e}_\varphi], \quad \Pi_1 = \sigma^{-1/2} \mathcal{L}[h_0^{-1} (1 - \beta h_0/2)^{-1} \cdot \\ &\cdot ((2 - \beta h_0) \Pi_0 - \beta \mathbf{e}_j^{(2)} \cdot \mathbf{e}_\varphi)], \quad \Pi_2 = \mathcal{L}\{h_0^{-1} (1 - \beta h_0/2)^{-1} [\sigma^{-1/2} (2 - \beta h_0) \Pi_1 + \\ &+ [h_0 - \beta h_0^2/2 + 2(1 + \beta h_0) V_0 - 8\beta V_1 - \beta h_0 \mathbf{y}_0 \cdot \mathbf{e}_r] d\Pi_0/d\varphi - [(1 + 3\beta h_0) \mathbf{y}_0 \cdot \mathbf{e}_\varphi + \\ &+ 4\beta W_1] \Pi_0 - (1 + \beta h_0) \mathbf{e}_j^{(2)} \cdot \mathbf{e}_r\}, \quad \Pi_3 = \mathcal{L}\{h_0^{-1} (1 - \beta h_0/2)^{-1} [\sigma^{-1/2} (2 - \beta h_0) \Pi_2 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ \sigma^{-1/2} [(5/2 + \beta h_0) \omega_0 - 3 - \beta V_0 + 3\beta/2 - 2\beta \mathbf{y}_0 \cdot \mathbf{e}_r] d\Pi_0/d\varphi + \beta \sigma^{-1/2} \mathbf{y}_0 \cdot \mathbf{e}_\varphi \Pi_0/2 + \\ &+ [h_0 - \beta h_0^2/2 + 2(1 + \beta h_0) V_0 - 8\beta V_1 - \beta h_0 \mathbf{y}_0 \cdot \mathbf{e}_r] d\Pi_1/d\varphi - \\ &- [(1 + 3\beta h_0) \mathbf{y}_0 \cdot \mathbf{e}_\varphi + 4\beta W_1(\varphi) + \beta/(2\sigma)] \Pi_1 + \beta \sigma^{-1/2} \mathbf{e}_j^{(2)} \cdot \mathbf{e}_r/2\} \end{aligned}$$

$$V_0(\varphi) = \int_0^{h_0} v_\varphi^{(0)} d\xi, \quad V_1(\varphi) = \int_0^{h_0} \xi v_\varphi^{(0)} d\xi, \quad W_1(\varphi) = \int_0^{h_0} \xi d\xi \partial v_\varphi^{(0)} / \partial \varphi$$

$$\mathbf{N}^{(\omega)}(\lambda) = \mathbf{B} \lambda^{-1} + \underline{O}(\lambda^{-3/2}), \quad G^{(\omega)}(\lambda) = 2\pi(\sigma\lambda)^{1/2} + 3\pi\beta + \pi\beta^2(\sigma\lambda)^{-1/2}/4 + \underline{O}(\lambda^{-1})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f] &= f(\varphi) - \frac{1}{h_0 - \beta h_0^2/2} \left[\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{h_0 - \beta h_0^2/2} \right]^{-1} \int_0^{2\pi} f(\varphi) d\varphi, \quad \mathbf{B} = \frac{1}{8\sigma} \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \\ &\cdot \left[\left[\frac{13}{h_0 - \beta h_0^2/2} - 3\beta \right] \left. \frac{\partial v_\varphi^{(0)}}{\partial \xi} \right|_{\xi=0} \mathbf{e}_r + 13\mathcal{L} \left[\frac{1 - \beta h_0}{(h_0 - \beta h_0^2/2)^2} \frac{dh_0}{d\varphi} \left. \frac{\partial v_\varphi^{(0)}}{\partial \xi} \right|_{\xi=0} \right] \mathbf{e}_\varphi \right] \end{aligned}$$

При эксцентриситете $|\mathbf{y}_0| \ll 1$ в равновесном состоянии (что выполнено при $\sigma \gg 1$), уравнения (26), (27) и уравнения равновесного состояния преобразовывались к деформированной радиальной координате $x = \xi/h_0$, и использовалось прямое асимптотическое разложение $v_\varphi^{(0)} = |\mathbf{y}_0| v_{\varphi,1}^{(0)}(x, \varphi) + |\mathbf{y}_0|^2 v_{\varphi,2}^{(0)}(x, \varphi) + \dots$, $v_r^{(0)} = |\mathbf{y}_0| v_{r,1}^{(0)}(x, \varphi) + |\mathbf{y}_0|^2 v_{r,2}^{(0)}(x, \varphi) + \dots$, $\Pi_0(\varphi) = |\mathbf{y}_0| \Pi_1^{(0)}(\varphi) + |\mathbf{y}_0|^2 \Pi_2^{(0)}(\varphi) + \dots$, $\omega_0 = |\mathbf{y}_0|^2 \omega_2^{(0)} + \dots$, $v_\varphi = v_{\varphi,0}(x, \varphi) + |\mathbf{y}_0| v_{\varphi,1}(x, \varphi) + \dots$, $v_r = v_{r,0}(x, \varphi) + |\mathbf{y}_0| v_{r,1}(x, \varphi) + \dots$,

$\Pi(\varphi) = \Pi_0^{(1)}(\varphi) + |\mathbf{y}_0| \Pi_1^{(1)}(\varphi) + \dots$ В результате получено

$$N_{1,j}^{(y)}(\lambda) = (F^{(+)}(\lambda) - F^{(-)}(\lambda))/(2i), \quad N_{2,j}^{(y)}(\lambda) = (F^{(+)}(\lambda) + F^{(-)}(\lambda))/2, \quad j = 1, 2$$

$$F^{(\pm)}(\lambda) = -\pi(\delta_j^2 \pm i\delta_j^1)(\lambda \pm i) \left\{ (1 + \beta - \beta S_{\pm 1}) w_{\pm 1} \sigma^{-1} [\beta/2 - \beta S_{\pm 1} + \right. \\ \left. - \frac{\sigma(\lambda \pm i)}{w_{\pm 1}} + \frac{2\sigma(\lambda \pm i)s_{\pm 1}}{w_{\pm 1}^2 \operatorname{sh} s_{\pm 1}} \left(\operatorname{ch} s_{\pm 1} - \operatorname{ch} \frac{\beta}{2} \right) \right]^{-1} \left[1 - \frac{\beta}{w_{\pm 1}} (\beta - \sigma(\lambda \pm i) S_{\pm 1}) - \right. \\ \left. - \frac{\beta e^{\beta/2} s_{\pm 1}}{\operatorname{sh} s_{\pm 1}} \right] + \frac{\beta^2 e^{\beta/2} s_{\pm 1}}{\sigma \operatorname{sh} s_{\pm 1}} \left. \right\}, \quad S_{\pm 1} = \frac{1}{w_{\pm 1}} \left[\frac{s_{\pm 1}}{\operatorname{sh} s_{\pm 1}} (\operatorname{ch} s_{\pm 1} - e^{\beta/2}) + \frac{\beta}{2} \right]$$

$$w_{\pm 1} = \beta^2 + \sigma(\lambda \pm i), \quad s_{\pm 1} = (w_{\pm 1} + \beta^2/4)^{1/2}, \quad \mathbf{G}^{(y)}(\lambda) = \underline{\underline{Q}}(|\mathbf{y}_0|), \quad \mathbf{N}^{(\omega)}(\lambda) = \underline{\underline{Q}}(|\mathbf{y}_0|)$$

$$G^{(\omega)}(\lambda) = 2\pi \sqrt{\sigma\lambda + \beta^2/4} \operatorname{cth} \sqrt{\sigma\lambda + \beta^2/4} + 3\pi\beta$$

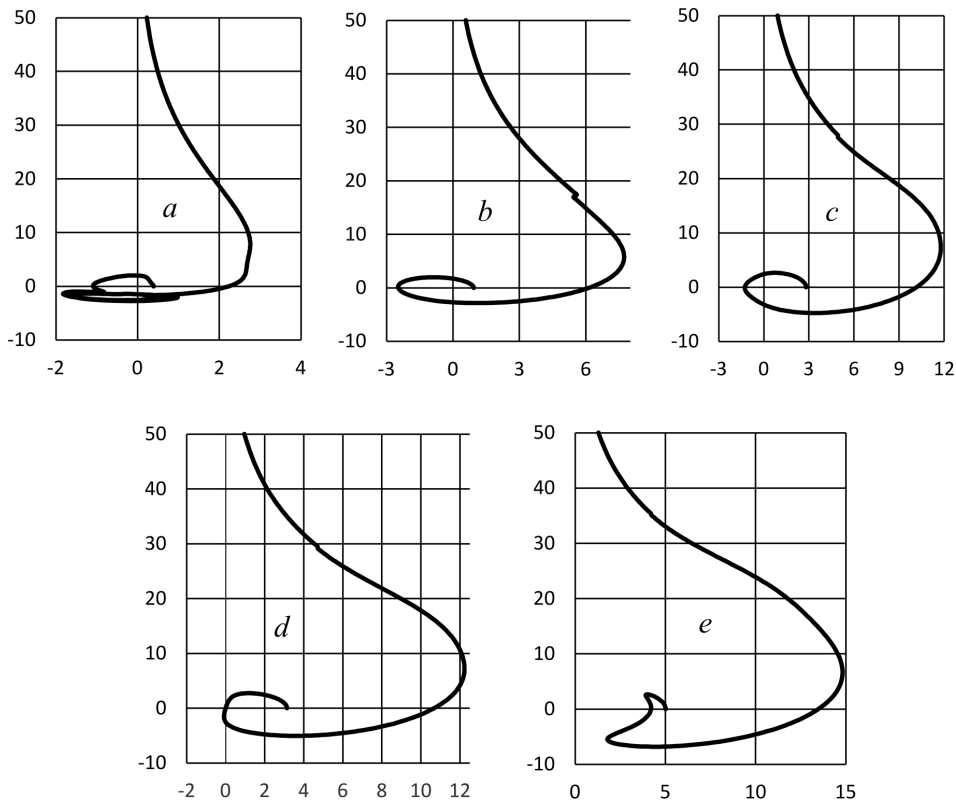


Рис. 2. Частотные годографы

4. Результаты моделирования на основе уточненной математической модели аналогичны [4], но приводят к несколько большей протяженности областей устойчивости. На рис. 2 приведены частотные годографы характеристического квазимногочлена (3) в масштабе $u + iv = \ln(1 + |D(i\omega)|)D(i\omega)/|D(i\omega)|$ для

подвеса с «легким» внутренним телом с безразмерными параметрами $\beta = 0.143$, $\rho_2/\rho = 0.594$, $J = 0.5$, $\chi = -53.78$ [4]. При $\sigma = 50$ (рис. 2а) относительный эксцентриситет в равновесном состоянии $|\mathbf{y}_0| = 0.011$, подвес находится практически в центральном положении и асимптотически устойчив. Аналогично, подвес устойчив при $\sigma = 8$, $|\mathbf{y}_0| = 0.396$ (рис. 2b) и при $\sigma = 6$, $|\mathbf{y}_0| = 0.771$ (рис. 2c). Значения $\sigma = 5,83$ (найдено бинарным делением), $|\mathbf{y}_0| = 0.794$ соответствуют границе области устойчивости (рис. 2d). При $\sigma = 5$, $|\mathbf{y}_0| = 0.876$ подвес неустойчив (рис. 2e). Использование уточненной математической модели приводит к несколько большему значению эксцентриситета на границе области устойчивости $|\mathbf{y}_0| = 0.794$ по сравнению с аналогичным значением $|\mathbf{y}_0| = 0.763$ согласно исходной математической модели [4].

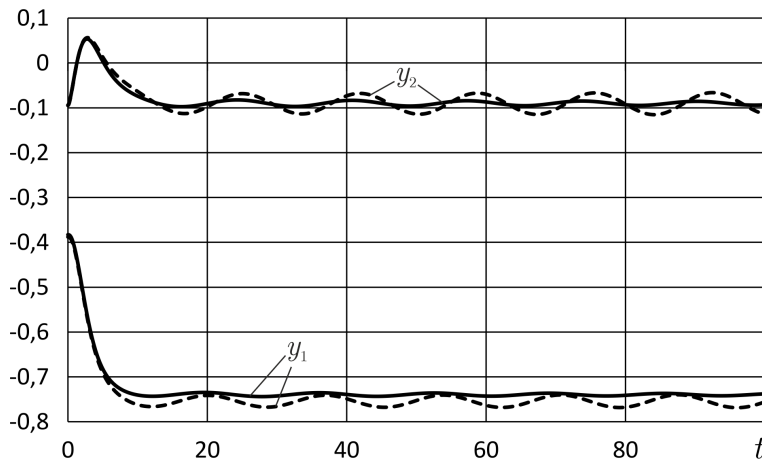


Рис. 3. Графики переходных процессов

На рис. 3 для подвеса с «легким» внутренним телом и безразмерными параметрами $\beta = 0.25$, $\rho_2/\rho = 0.594$, $J = 0.5$, $\gamma = 4.688$, $\sigma = 3.97$ представлены зависимости от времени смещений центра масс внутреннего тела при его переходе из одного равновесного состояния в другое при скачкообразном увеличении действующей на подвес перегрузки $\mathbf{a}(t) = (0, a \cdot 1(t))^T$. Здесь $a = 0.372$, $1(t)$ – функция единичного скачка Хевисайда. Графики переходных процессов для математической модели из [4] показаны пунктирной линией, а для уточненной модели – сплошной. Уточненная математическая модель характеризуется несколько большей протяженностью областей устойчивости по сравнению с исходной моделью [4]. В результате при умеренных значениях колебательного числа Рейнольдса σ применение уточненной математической модели приводит к более быстрому затуханию переходных процессов в подвесе.

ДОПОЛНИТЕЛЬНО

Вклад авторов. Д. К. Андрейченко постановка задачи, асимптотическое интегрирование краевых задач, написание текста рукописи, Е. Ю. Крылова обзор литературы по теме статьи, проведение вычислительных экспериментов, редактирование текста рукописи.

Конфликт интересов. Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

Источник финансирования. Авторы заявляют об отсутствии внешнего финансирования при проведении исследования.

ADDITIONAL INFORMATION

Authors' contribution. D. K. Andreichenko problem statement, asymptotic integration of boundary value problems, writing the text of the manuscript, E. Yu. Krylova reviewing the literature on the topic of the article, conducting computational experiments, editing the text of the manuscript.

Competing interests. The authors declare that they have no competing interests.

Funding. This study was not supported by any external sources of funding.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ишлинский А.Ю. Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация. Москва : Наука, 1986. 672 с.
- [2] Андрейченко К.П. Динамика поплавковых гироскопов и акселерометров. Москва : Машиностроение, 1987. 128 с.
- [3] Андрейченко К.П. Устойчивость цилиндрического гидродинамического подвеса // Изв. РАН. Механика твердого тела. 1975. № 6. С. 32–39.
- [4] Андрейченко Д.К., Андрейченко К.П. К теории устойчивости цилиндрического гидродинамического подвеса // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2009. № 1. С. 13–26.
- [5] Неймарк Ю.И. Динамические процессы и управляемые системы. Москва : Наука, 1978. 336 с.
- [6] Андрейченко Д.К., Андрейченко К.П. К теории комбинированных динамических систем // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2000. № 3. С. 54–69.
- [7] Флетчер К. Численные методы на основе метода Галеркина. Москва : Мир, 1988. 352 с.
- [8] Хайпер Э., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. Москва : Мир, 1999. 685 с.
- [9] Седов Л.И. Механика сплошной среды В 2 т. Т. 1. Москва : Наука, 1976. 536 с.

REFERENCES

- [1] Ishlinskii A.Yu. Orientation, gyroscopes and inertial navigation. Moscow : Nauka, 1986. 672 p. (in Russian).
- [2] Andreichenko K.P. Dynamics of float gyroscopes and accelerometers. Moscow : Mashinostroenie, 1987. 128 p. (in Russian).
- [3] Andreichenko K.P. Stability of a cylindrical hydrodynamic suspension // Mechanics of Solids (Izvestiya AN SSSR. Mekhanika Tverdogo Tela). 1975. Vol. 10, no. 6. P. 24–30.
- [4] Andreichenko D.K., Andreichenko K.P. On the theory of stability of a cylindrical hydrodynamic suspension // Fluid Dynamics. 2009. Vol. 44, no. 1. P. 10–21.
- [5] Neimark Yu. I. Dynamic processes and controlled systems. Moscow : Nauka, 1978. 336 p. (in Russian).
- [6] Andreichenko D.K., Andreichenko K.P. On the theory of hybrid dynamical systems // Journal of Computer and Systems Sciences International. 2000. Vol. 39, no. 3. P. 383–398.

- [7] Fletcher K. Numerical methods based on the Galerkin method. Mir : Moscow, 1988. 352 p. (in Russian).
- [8] Hairer E., Wanner G. Solving Ordinary Differential Equations. Stiff and Differential-Algebraic Problems. Moscow : Mir, 1999. 685 p. (in Russian).
- [9] Sedov L.I. Continuum mechanics. In 2 vols . Vol . 1. Moscow : Nauka, 1976. 536 p. (in Russian).