

И. В. Папкова, Е. Ю. Крылова, Д. К. Андрейченко, И. И. Коврига,
Е. К. Пронина

О НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЯХ ГИБКИХ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ СФЕРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК, НАХОДЯЩИХСЯ В ШУМОВОМ ПОЛЕ

*Саратовский национальный исследовательский государственный университет
имени Н.Г. Чернышевского, Саратов, Россия*

Аннотация. В работе исследуется влияние аддитивного белого шума на нелинейную динамику гибкой осесимметричной сферической оболочки Кирхгофа-Лява, находящейся под действием внешней нормальной знакопеременной нагрузки.

Ключевые слова: Осесимметрическая сферическая оболочка, нелинейная динамика, аддитивный белый шум, сценарий Фейгенбаума.

Папкова Ирина Владиславовна, доктор физико-математических наук, профессор, доцент кафедры математической теории упругости и биомеханики; e-mail: ikravzova@mail.ru; <https://orcid.org/0000-0003-4062-1437>; AuthorID: 404435

Крылова Екатерина Юрьевна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической теории упругости и биомеханики; e-mail: kat.krylova@bk.ru; <https://orcid.org/0000-0002-7593-0320>; AuthorID: 722982

Андрейченко Дмитрий Константинович, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математического обеспечения вычислительных комплексов и информационных систем; e-mail: andreichenkodk@gmail.com; <https://orcid.org/0000-0003-0525-984X>; AuthorID: 63805

Коврига Иван Игоревич, аспирант кафедры математической теории упругости и биомеханики; e-mail: igorewit@mail.ru

Пронина Елена Константиновна, студент кафедры теоретических основ компьютерной безопасности и криптографии; e-mail: proninaelens2017@mail.ru

для цитирования: Папкова И. В., Крылова Е. Ю., Андрейченко Д. К., Коврига И. И., Пронина Е. К. О нелинейных колебаниях гибких осесимметричных сферических оболочек, находящихся в шумовом поле // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2024. № 4(62). С. 107–114. DOI: 10.37972/chgpu.2024.62.4.010 EDN: VPCIGQ

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0).

I. V. Papkova, E. Yu. Krylova, D. K. Andreichenko, I. I. Kovriga, E. K. Pronina

ON NONLINEAR OSCILLATIONS OF FLEXIBLE AXISYMMETRIC SPHERICAL SHELLS LOCATED IN A NOISE FIELD

Saratov State University, Saratov, Russia

Abstract. The paper investigates the influence of additive white noise on the nonlinear dynamics of a flexible axisymmetric spherical Kirchhoff-Love shell under the action of an external normal alternating load.

Keywords: symmetric spherical shell, nonlinear dynamics, additive white noise, Feigenbaum scenario.

Irina V. Papkova, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor;

e-mail: ikravzova@mail.ru;

https://orcid.org/0000-0003-4062-1437; AuthorID: 404435

Ekaterina Yu. Krylova, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor;

e-mail: mail2@mail.ru;

https://orcid.org/0000-0002-7593-0320; AuthorID: 722982

Dmitry K. Andreichenko, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor; e-mail:

andreichenkodk@gmail.com;

https://orcid.org/0000-0003-0525-984X; AuthorID: 6506669322

Ivan I. Kovriga, postgraduate; e-mail: igorewit@mail.ru

Elena K. Pronina, student; e-mail: proninaelens2017@mail.ru

to cite this article: Papkova I. V., Krylova E. Yu., Andreichenko D. K., Kovriga I. I., Pronina E. K. On nonlinear oscillations of flexible axisymmetric spherical shells located in a noise field // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2024. No 4(62). p. 107–114. DOI: 10.37972/chgpu.2024.62.4.010 EDN: VPCIGQ

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение. В настоящее время большое внимание уделяется эффектам, связанным с воздействием внешних шумов на поведение динамических систем. Например, влиянию так называемого аддитивного белого гауссовского шума, который характеризуется равномерной спектральной плотностью и нормально распределённым значением амплитуды, а также аддитивным способом воздействия на сигнал. Шум затрудняет определение времени работоспособности или анализ старения материала за счёт того, что оказывается неизвестной точная зависимость напряжений в твердых материалах от времени. Исследование влияния случайных шумовых воздействий на нелинейные динамические системы является одним из самых актуальных и интенсивно развивающихся направлений в нелинейной динамике [1–3]. Шум может приводить к двум типам эффектов: индуцированному шумом сдвигу бифуркаций, которые имеют место в детерминированной системе, а также к возникновению новых типов поведения и новых бифуркаций (фазовых переходов), не наблюдавшихся в отсутствии шума. В настоящей работе при действии гармонической знакопеременной нагрузки переход регулярных колебаний в хаотический осуществляется по сценарию Фейгенбаума [4]. Систематизацию исследований взаимодействия индуцированных шумом неустойчивостей и фазовых переходов для задач физики, биологии, химии привели в 1987 году В. Хорстхемке и Р. Лефевр [5]. Для механических распределенных систем таких исследований сделано не было, появляются только первые публикации в этом направлении [6, 7].

1. Постановка задачи. Рассмотрим сферическую пологую оболочку в полярной системе координат, введенной следующим образом (1):

$$\Omega = \left\{ r, z \mid r \in [0, b]; z \in \left[-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}\right] \right\}.$$

Систему уравнений динамики пологих оболочек в безразмерном виде запишем следующим образом [8]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_{30}}{\partial t^2} + \epsilon \frac{\partial u_{30}}{\partial t} = & -\frac{\partial^4 u_{30}}{\partial r^4} - \frac{2}{r} \frac{\partial^3 u_{30}}{\partial r^3} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_{30}}{\partial r^2} - \frac{1}{r^3} \frac{\partial u_{30}}{\partial r} - \\ & - \frac{\Phi}{r} \left(1 - \frac{\partial^2 u_{30}}{\partial r^2} \right) - \frac{\partial \Phi}{\partial r} \left(1 - \frac{1}{r} \frac{\partial u_{30}}{\partial r} \right) + q + q^*, \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial r} = & \frac{\partial u_{30}}{\partial r} \left(1 - \frac{1}{2r} \frac{\partial u_{30}}{\partial r} \right), \end{aligned} \quad (1)$$

где $\Phi = \frac{\partial F}{\partial r}$, F – функция усилий, r – радиус оболочки, u_{30} – прогиб, $q = q_0 \sin(\omega_p t)$ – поперечная нормальная нагрузка, q_0 и ω_p – ее амплитуда и частота соответственно. Аддитивный белый шум добавлен в систему с постоянной интенсивностью $q^* = q_n (2.0 * \text{rand}()) / (\text{RAND_MAX} + 1.0) - 1.0$, где q_n – интенсивность шума, $\text{rand}()$ – стандартная функция языка C++, принимающая случайное целое число от 0 до RAND_MAX , RAND_MAX – константа, равная 65535. Выражение принимает произвольные дробные значения в диапазоне

$(-1; 1)$. Данная математическая модель белого шума предложена центром компьютерных исследований в области музыки и акустики (CCRMA) Стэнфордского университета.

К системе (1) присоединим граничные условия для шарнирно-подвижного контура в меридиональном направлении:

$$\Phi = u_{30} = 0, \quad \frac{\partial^2 u_{30}}{\partial r^2} + \nu \frac{\partial u_{30}}{\partial r} \quad \text{при} \quad r = b, \quad (2)$$

начальные условия:

$$u_{30} = 0, \quad \frac{\partial u_{30}}{\partial t} = 0, \quad (3)$$

а также условия в вершине оболочки, выполняющиеся в ее малой окрестности:

$$\begin{aligned} \Phi &\approx Ar, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial r} \approx A, \\ u_{30} &\approx B + Cr^2, \quad \frac{\partial u_{30}}{\partial r} \approx 2Cr, \quad \frac{\partial^2 u_{30}}{\partial r^2} = 2C, \quad \frac{\partial^3 u_{30}}{\partial r^3} \approx 0, \end{aligned} \quad (4)$$

здесь A, B, C – коэффициенты, которые определяются при численном решении системы дифференциальных уравнений.

2. Численный эксперимент. Систему (1-4) будем решать методом Рунге-Кутты четвертого порядка точности, используя на каждом шаге решение второго уравнения из (1). Шаг по времени выбирается по правилу Рунге.

Численный эксперимент проводился со следующим набором параметров:

$$\begin{aligned} r = 1\text{см}, \quad h = 0.002\text{см}, \quad E = 70 * 10^4\text{кгс/см}^2, \quad \nu = 0.34, \quad \rho = 2.7 * 10^{-6}\text{кг/см}^3, \\ q_0 = 8.77\text{кгс/см}^2. \end{aligned}$$

В одном из численных экспериментов для рассматриваемой механической системы под действием внешней нормальной нагрузки в условиях отсутствия внешнего белого шума авторами был получен сценарий Фейгенбаума перехода колебаний из гармонических в хаотические [4]. Модель Фейгенбаума подтверждается численными экспериментами на многих простых математических моделях. Известно, что бифуркация удвоения хорошо описана в аттракторе Рейслера и др. Подобное явление также обнаружено в рассматриваемой задаче. Сценарий Фейгенюаума для данной задачи был получен при частоте внешней нормальной нагрузки $\omega_p = 0.516$ [4]. Для центральной точки оболочки с параметром пологости $b = 4$ была рассчитана константа Фейгенбаума (α_n) в соответствии со значением управляющего параметра q_0 в условиях отсутствия внешних флуктуаций. Было выявлено 5

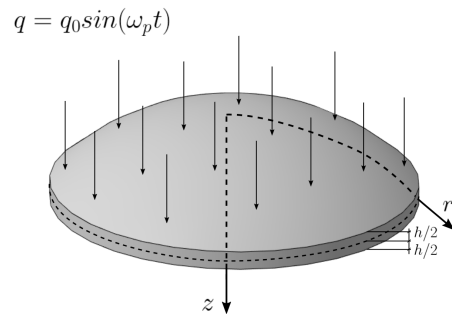


Рис. 1. Расчетная схема

бифуркаций удвоения периода. Полученное в результате численных экспериментов значение $\alpha_n = \frac{q_{0,n} - q_{0,n-1}}{q_{0,n+1} - q_{0,n}} = 4.65608466$, $n = 5$ хорошо согласуется с теоретическим значением $\alpha = 4.66916224$, расхождение составляет около 0.28%.

Интерес представляет влияние аддитивного внешнего белого шума на полученный сценарий Фейгенбаума.

При малой интенсивности аддитивного белого шума ($q_n = 0.01$) также была получена серия бифуркаций удвоения периода. Было выявлено, что бифуркации удвоения периода под влиянием шума наступают при меньшей амплитуде внешней нормальной периодической нагрузки (табл. 1). В таблице 1 приведены спектры мощности Фурье, полученные как с учетом внешнего аддитивного шума, так и без него. Из данных таблицы видно, что в условиях шума происходит локализация частот вокруг частоты $\frac{\omega_p}{2}$. После появления $\frac{\omega_p}{2}$ локализация шумовой составляющей происходит вокруг частот $\frac{\omega_p}{4}$, $\frac{3\omega_p}{4}$ и т.д. Всего было выявлено 4 бифуркации удвоения периода, а не 5, как в случае отсутствия шумового воздействия.

q_0	без учета шума $q_n = 0$	с учетом шума $q_n = 0.01$
0.08		
0.11		
0.135		

Таблица 1. Влияние внешнего белого шума на сценарий Фейгенбаума.

Рассмотрим сечения Пуанкаре, полученные для сценария Фейгенбаума без учета шумовой нагрузки. На биссектрисе первой четверти (прямая 1) отображалась сначала одна точка (табл.2 а)), что соответствует гармоническим колебаниям, затем с первой бифуркацией появилась еще одна точка на прямой 1 (табл.2 б)), при второй бифуркации отобразились еще две точки на прямой 2, перпендикулярной прямой 1. Часть точек сечения Пуанкаре (на прямой 2) при дальнейшем делении сдвигаются и образуют кривую (табл.2 е)). С учетом шу-

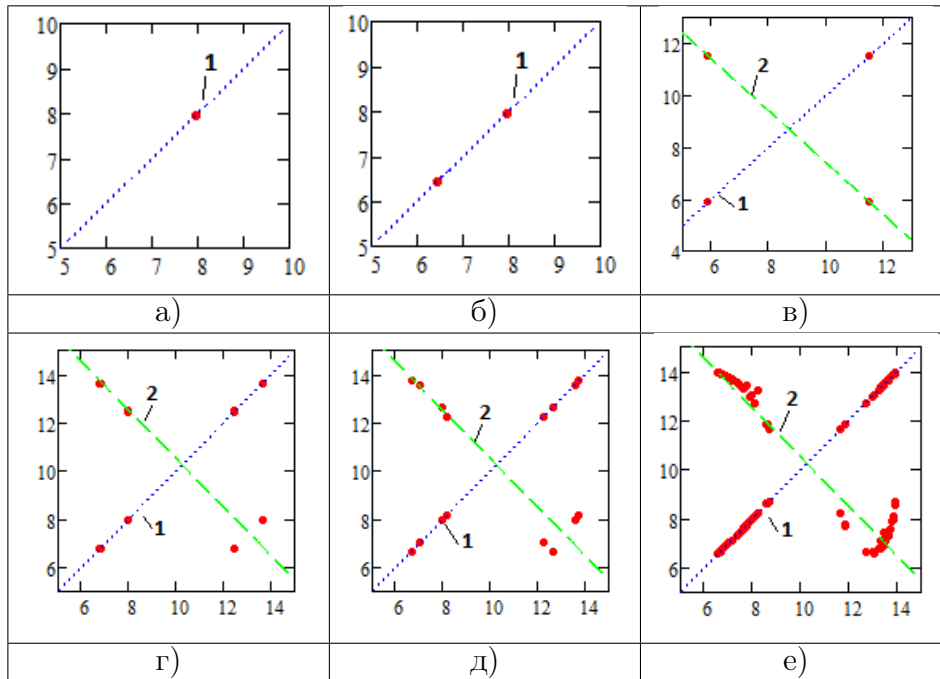


Таблица 2. Сечение Пуанкаре для сценария Фейгенбаума без учета шума.

мовой составляющей с интенсивностью $q_n = 0.01$ при амплитуде внешней нормальной нагрузки $q_0 = 0.08$ на графике четко видна прямая 1 и облако точек. Облако точек неоднородно, имеет большую плотность в центре и минимальную на границе.

При увеличении амплитуды вынуждающей нагрузки происходит бифуркация удвоения периода. На сечении Пуанкаре видно, что точки, которые притягиваются к точкам на прямой 1, образуют прямую линию, точки, которые притягиваются к прямой 2, образуют облако. При увеличении вынуждающей нагрузки облако точек принимает форму эллипса (табл.3а)). Дальнейший рост параметра вынуждающей нагрузки приводит к вытягиванию эллипса (табл.3б-3г)), что продолжается до тех пор, пока не произойдет деление на четыре группы (табл.3д)-3е)), т. е. наступлению второй бифуркации удвоения периода.

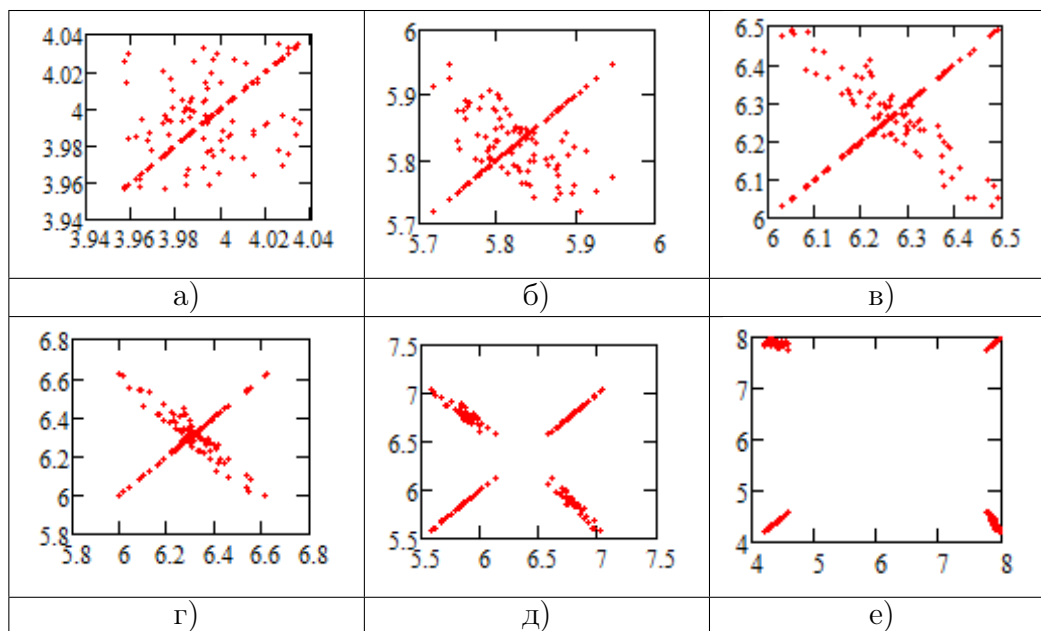


Таблица 3. Сечение Пуанкаре $q_n = 0.01$, $q_0 \in [0.11; 0.1335]$.

В работе установлено, что для сферических осесимметричных оболочек под действием поперечной знакопеременной нагрузки колебания переходят из гармонических в хаотические по сценарию Фейгенбаума, в том числе и при учете аддитивного белого шума. Показано, что внешнее шумовое воздействие снижает значение амплитуды внешней нормальной знакопеременной нагрузки, при котором наступает бифуркация удвоения периода системы. Также исследован механизм появления бифуркации в случае действия аддитивного белого внешнего шума.

ДОПОЛНИТЕЛЬНО

Вклад авторов. И. В. Папкина, Е. Ю. Крылова, Д. К. Андрейченко постановка задачи, построение численных алгоритмов и разработка программного обеспечения для решения задачи, написание текста рукописи, И. И. Коврига и Е. К. Пронина обзор литературы по теме статьи, проведение вычислительных экспериментов, редактирование текста рукописи.

Конфликт интересов. Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

Источник финансирования. Авторы заявляют об отсутствии внешнего финансирования при проведении исследования.

ADDITIONAL INFORMATION

Authors' contribution. I. V. Papkova, E. Yu. Krylova, D. K. Andreichenko problem statement, construction of numerical algorithms and development of software for solving the problem, writing the text of the manuscript, I. I. Kovriga and E. K. Pronina reviewing the literature on the topic of the article, conducting computational experiments, editing the text of the manuscript.

Competing interests. The authors declare that they have no competing interests.

Funding. This study was not supported by any external sources of funding.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Feng J., Xu W., Wang R. Stochastic responses of vibro-impact Duffing oscillator excited by additive Gaussian noise // *Journal of Sound and Vibration*. 2008. Vol. 319, no. 3. P. 730–738.
- [2] Потапов В. Д. Об устойчивости стохастических вязкоупругих систем // *Известия высших учебных заведений. Машиностроение*. 2009. Т. 52, № 6. С. 85–90.
- [3] van de Wouw N., de Kraker A., van Campen D. H., Nijmeijer H. Non-linear dynamics of a stochastically excited beam system with impact // *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2003. Vol. 38, no. 5. P. 767–779.
- [4] Крысько В. А., Кравцова И. В. Стохастические колебания гибких осесимметричных шарнирно-подвижных по контуру сферических оболочек // *Известия высших учебных заведений. Машиностроение*. 2004. Т. 47, № 1. С. 11–20.
- [5] Horsthemke W., Lefever R. *Noise-induced transitions in physics, chemistry, and biology*. Heidelberg : Springer Berlin, 1984. 400 p.
- [6] Папкина И. В., со authors. Complex fluctuations of flexible plates under longitudinal loads with account for white noise // *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2016. Vol. 57, no. 5. P. 714–719.
- [7] Awrejcewicz J., со authors. Principal component analysis in the linear theory of vibrations: continuous mechanical systems driven by different kinds of external noise // *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2021. Vol. 62, no. 3. P. 48–62.
- [8] Вольмир А. С. *Нелинейная динамика пластин и оболочек*. Москва : Наука, 1972. 432 с.

REFERENCES

- [1] Feng J., Xu W., Wang R. Stochastic responses of vibro-impact Duffing oscillator excited by additive Gaussian noise // *Journal of Sound and Vibration*. 2008. Vol. 319, no. 3. P. 730–738.
- [2] Potapov V. D. On the stability of stochastic viscoelastic systems // *Probl. Mashinostr. i Nadezh. Mashin*. 2009. no. 6. P. 85–90. (in Russian).
- [3] van de Wouw N., de Kraker A., Nijmeijer H. Non-linear dynamics of a stochastically excited beam system with impact // *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2003. Vol. 38, no. 5. P. 767–779.
- [4] Krysko V. A., Kravzova I. V. Stochastic oscillations of flexible axisymmetric hinged spherical shells with movable contours // *Izvestiya Vysshih Uchebnyh Zavedenij. Mashinostroenie*. 2004. no. 1. P. 11–20. (in Russian).
- [5] Horsthemke W., Lefever R. *Noise-induced transitions in physics, chemistry, and biology*. Moscow : GITTL, 1955. 519 p.
- [6] Sliozkin N. A. *Dynamics of a viscous incompressible fluid*. Heidelberg : Springer Berlin, 1984. 400 p.
- [7] Papkova I. V., со authors. Complex fluctuations of flexible plates under longitudinal loads with account for white noise // *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2016. Vol. 57, no. 4. P. 714–719.
- [8] Awrejcewicz J., со authors. Principal component analysis in the linear theory of vibrations: continuous mechanical systems driven by different kinds of external noise // *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2021. Vol. 62, no. 1. P. 48–62.
- [9] Bolmir A. S. *Nonlinear dynamics of plates and shells*. Moscow : Nayka, 1972. 432 p. (in Russian).