Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния.

DOI: 10.37972/chgpu.2024.62.4.008 *EDN: VEMPAQ*

Научная статья *УДК: 539.374*

Е. В. Мурашкин[1]

РАСПРОСТРАНЕНИЕ СВЯЗАННЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ ВОЛН В ТЕПЛОИЗОЛИРОВАННОМ ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ ВОЛНОВОДЕ

[1]*Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия*

Аннотация. В настоящей работе рассматриваются процессы распространения связанных гармонических волн температурного инкремента, трансляционных и спинорных перемещений вдоль оси теплоизолированного цилиндрического волновода. Материал волновода полагается полуизотропным термоупругим микрополярным. Исследуются представления абсолютных векторных полей трансляционных и спинорных перемещений с помощью системы винтовых векторных и скалярных потенциалов, обеспечивающих выполнимость связанных векторных дифференциальных уравнений в частных производных. Исследованы уравнения, полученные после подстановки представлений Гельмгольца в исходную систему динамических уравнений полуизотропного микрополярного термоупругого континуума. Система дифференциальных уравнений разделяется на триплетную систему для определения скалярных потенциалов, температурного инкремента, трансляционных и спинорных перемещений и дублетную систему для определения винтовых потенциалов, входящих в разложения Гельмгольца векторов трансляционных и спинорных перемещений. Полученные скалярные и винтовые векторные потенциалы позволяют определить поля трансляционных и спинорных перемещений и восстановить поля, возникающих силовых и моментных напряжений.

Ключевые слова: наномасштаб, микромасштаб, микрополярность, термодинамическая температура, спин-вектор, трансляция, слабый разрыв, поверхность распространения, волна.

Мурашкин Евгений Валерьевич, канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник лаб. моделирования в механике деформируемого твердого тела; `e-mail:` murashkin@ipmnet.ru; https://orcid.org/0000-0002-3267-4742; AuthorID: 129570

для цитирования: *Мурашкин Е. В.* Распространение связанных гармонических волн в теплоизолированном цилиндрическом волноводе // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2024. № 4(62). С. 115–126. DOI: 10.37972/chgpu.2024.62.4.008 EDN: VEMPAQ

Поступила: 03.09.2024; принята в печать: 16.11.2024; опубликована: 25.12.2024.

Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost.

DOI: 10.37972/chgpu.2024.62.4.008 *EDN: VEMPAQ*
Research Article

E. V. Murashkin[1]

PROPAGATION OF COUPLED HARMONIC WAVES IN A THERMALLY ISOLATED CYLINDRICAL WAVEGUIDE

[1]*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow, Russia*

Abstract. In this paper, we consider the processes of propagation of coupled harmonic waves of temperature increment, translational and spinor displacements along the axis of a thermally insulated cylindrical waveguide. The waveguide material is assumed to be semi-isotropic thermoelastic micropolar solid. We study the representations of absolute vector fields of translational and spinor displacements by using a system of vortex vector and scalar potentials that ensure the coupling of vector partial differential equations.The equations obtained after substituting Helmholtz representations into the original system of dynamic equations of a semi-isotropic micropolar thermoelastic continuum are investigated. The system of differential equations is divided into a triplet system for scalar potentials of temperature increment, translational and spinor displacements, and a doublet system for vortex potentials included in the Helmholtz decompositions of the translational and spinor displacement vectors. The obtained scalar and vortex vector potentials allow us to determine the fields of translational and spinor displacements vectors and to restore the force and couple stresses.

Keywords: nanoscale, microscale, micropolarity, thermodynamic temperature, spinvector, translation, weak discontinuity, propagation surface, wave.

Evgenii V. Murashkin, Cand. Sci. Phys. & Math., MD, Senior Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences; `e-mail:` evmurashkin@gmail.ru; https://orcid.org/0000-0002-3267-4742; AuthorID: 129570

to cite this article: *Murashkin E. V.* Propagation of coupled harmonic waves in a thermally isolated cylindrical waveguide // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2024. No 4(62). p. 115–126. DOI: 10.37972/chgpu.2024.62.4.008 EDN: VEMPAQ

Received: 03.09.2024; *accepted: 16.11.2024;* *published: 25.12.2024.*

1. Введение. Распространение волн в микро/наноразмерных полуизотропных термоупругих телах, термомеханические определяющие свойства которых чувствительны к зеркальным отражениям трехмерного пространства, является сложной актуальной задачей современной механики сплошных сред. В рамках настоящего исследования развивается теория теплопроводности в полуизотропных телах [1–5], существенным образом опирающаяся на фундаментальный принцип абсолютной инвариантности абсолютной термодинамической температуры, т. е. неизменность поля температуры при зеркальных отражениях трехмерного пространства и принципиальную невозможность приписать этому фундаментальному физическому полю какой бы то ни было ненулевой алгебраический псевдоскалярный вес.

Термодинамика физико-механических процессов зачастую связана с распространением волновых поверхностей в трехмерном пространстве, при прохождении через которые физические поля претерпевают слабые разрывы, т.е. сами поля и их первые производные непрерывны, а их производные, начиная со второй, вообще говоря, разрывны. Изучение указанных процессов, протекающих в современных конструкционных материалах, т.к. они могут обладать микроструктурными особенностями и моделирование их поведения требует привлечения неклассических моделей механики сплошных сред [1–5]. Простейшей из таких моделей является, например, полуизотропная микрополярная термоупругость. Подобные среды характеризуются чувствительностью своих определяющих псевдоскаляров к преобразованиям, меняющим ориентацию трехмерного пространства на противоположную. Практическая значимость указанных исследований связана с моделированием поведения биоматериалов, используемых в медицине, клеточных структур, керамики, гранулированных материалов.

Волновые задачи механики микрополярных сред возникают при моделировании процессов медицинской диагностики, таких как: УЗИ, сонография и спектральная допплерография. Теоретической основой для указанных методов могут служить задачи о распространении слабых разрывов в твердом теле [6, 7]. Литературный поиск показал актуальность волновых задач термомеханики микрополярных сплошных сред [1, 8–18]. В настоящей работе рассматриваются процессы распространения связанных гармонических волн температурного инкремента, трансляционных и спинорных перемещений вдоль оси теплоизолированного цилиндрического полуизотропного микрополярного волновода.

Изложение настоящей статьи базируется на результатах, терминологии и понятиях предыдущих публикаций [12–27].

2. Дифференциальные уравнения полуизотропной микрополярной термоупругой среды. Связанные уравнения динамики и теплопроводности для полуизотропного микрополярного термоупругого континуума можно записать в ковариантной форме [25]

$$
\begin{aligned}
&G[(1+c_1)\nabla^s\nabla_s u^i + (1-c_1+2\nu(1-2\nu)^{-1})\nabla^i\nabla_k u^k + 2c_1\epsilon^{ikl}\nabla_k\phi_l + \\
&\qquad + Lc_4'\nabla^i\nabla_k\phi^k + Lc_5'\nabla^k\nabla_k\phi^i] - 2G\alpha\frac{1+\nu}{1-2\nu}\nabla_i\theta = -\rho(f^i - \partial..u^i),\\
&GL^2[(1+c_2)\nabla^s\nabla_s\phi_i + (1-c_2+2c_3)\nabla_i\nabla_k\phi^k + \\
&\qquad + L^{-1}c_4'\nabla_i\nabla^k u_k + L^{-1}c_5'\nabla^k\nabla_k u_i + L^{-1}c_6'\epsilon_{isl}\nabla^s\phi^l] - \\
&\qquad - 2Gc_1(2\phi_i - e^2\epsilon_{ikl}g^{ks}\nabla_s u^l) - 2GL^2\beta\nabla_i\theta = -\rho(l_i - \mathfrak{I}\partial..\phi_i),\\
&\lambda\nabla_s\nabla^s\theta - c\rho\partial.\theta - 2G\alpha\frac{1+\nu}{1-2\nu}\theta_0\nabla_s\partial.u^s - 2GL^2\beta\theta_0\nabla_s\partial.\phi^s = 0,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

где u^k — вектор трансляционных перемещений; ϕ^s — вектор спинорных перемещений; G — модуль сдвига; ν — коэффициент Пуассона; L — характерная нано/микродлина микрополярной теории; c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6 — не имеющие физической размерности определяющие постоянные; ρ — массовая плотность; $\mathfrak{I}$ — коэффициент микроинерции; α — коэффициент линейного теплового расширения; β — коэффициент теплового изгиба–кручения; θ_0 — референциальная температура; θ — температурный инкремент; c — теплоемкость; λ — коэффициент теплопроводности. Кроме того принято:

$$
c_4' = c_4 + \frac{1}{2}c_5 + \frac{1}{4}c_6, \quad c_5' = \frac{1}{2}c_5 - \frac{1}{4}c_6, \quad c_6' = -c_6, \quad 2l^2 = L^2(1+c_2).
$$

В дальнейшем удобней будет пользоваться прямой записью системы уравнений:

$$
\begin{cases}
(1+c_1)\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\mathbf{u} + (1-c_1+2\nu(1-2\nu)^{-1})\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{u} + 2c_1\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\phi} + \\
\qquad + Lc_4'\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\phi} + Lc_5'\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\phi} - 2\underset{*}{\alpha}\frac{1+\nu}{1-2\nu}\boldsymbol{\nabla}\theta = \rho G^{-1}\ddot{\mathbf{u}}\\
(1+c_2)\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\phi} + (1-c_2+2c_3)\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\phi} + L^{-1}c_4'\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{u} + \\
\qquad + L^{-1}c_5'\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\mathbf{u} + L^{-1}c_6'\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\phi} - 2L^{-2}c_1(2\boldsymbol{\phi} - \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{u}) - \\
\qquad\qquad - 2\underset{*}{\beta}\boldsymbol{\nabla}\theta = \rho\mathfrak{I}G^{-1}L^{-2}\ddot{\boldsymbol{\phi}}\\
\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\theta - C\lambda^{-1}\partial.\theta - 2G\lambda^{-1}\underset{*}{\alpha}\frac{1+\nu}{1-2\nu}\boldsymbol{\nabla}\cdot\partial.\mathbf{u} - 2G\lambda^{-1}L^2\underset{*}{\beta}\boldsymbol{\nabla}\cdot\partial.\boldsymbol{\phi} = 0
\end{cases}
\tag{2}
$$

Кроме того, если воспользоваться тождествами

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\mathbf{u} &= \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{u} - \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{u}\\
\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\phi} &= \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\phi} - \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\phi}
\end{aligned}
\tag{3}
$$

то в итоге получим

$$
\begin{cases}
(2+2\nu(1-2\nu)^{-1})\boldsymbol{\nabla\nabla}\cdot\mathbf{u}+L(c_4'+c_5')\boldsymbol{\nabla\nabla}\cdot\boldsymbol{\phi}- \\
\qquad -(1+c_1)\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{u}-Lc_5'\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\phi}+ \\
\qquad\qquad +2c_1\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\phi}-2\underset{*}{\alpha}\dfrac{1+\nu}{1-2\nu}\boldsymbol{\nabla}\theta=\rho G^{-1}\ddot{\mathbf{u}} \\
2(1+c_3)\boldsymbol{\nabla\nabla}\cdot\boldsymbol{\phi}+L^{-1}(c_4'+c_5')\boldsymbol{\nabla\nabla}\cdot\mathbf{u}- \\
\qquad -L^{-1}c_5'\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{u}-(1+c_2)\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\phi}+ \\
\qquad\quad +L^{-1}c_6'\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\phi}-2L^{-2}c_1(2\boldsymbol{\phi}-\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{u})-2\underset{*}{\beta}\boldsymbol{\nabla}\theta=\rho\Im G^{-1}L^{-2}\ddot{\boldsymbol{\phi}} \\
\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\theta-C\lambda^{-1}\partial_.\theta-2G\lambda^{-1}\underset{*}{\alpha}\dfrac{1+\nu}{1-2\nu}\boldsymbol{\nabla}\cdot\partial_.\mathbf{u}-2G\lambda^{-1}L^2\underset{*}{\beta}\boldsymbol{\nabla}\cdot\partial_.\boldsymbol{\phi}=0
\end{cases}
\tag{4}
$$

3. Распространение гармонической связанной термоупругой волны в полуизотропном волноводе. Рассмотрим задачу о распространении гармонической волны вдоль оси свободного теплоизолированного длинного цилиндрического волновода. С этой целью воспользуемся разложениями Гельмгольца [28] для полей трансляционных и спинорных перемещений на вихревые и безвихревые составляющие:

$$
\mathbf{u}=\mathbf{A}\Xi,\quad \boldsymbol{\phi}=\mathbf{S}\Xi,\quad \theta=\Theta\Xi \tag{5}
$$

где

$$
\Xi=e^{i\arg\Xi},\qquad \arg\Xi=-\omega t
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A}&=\boldsymbol{\nabla}\Phi+\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\Psi}\\
\mathbf{S}&=\boldsymbol{\nabla}\Sigma+\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{H}
\end{aligned}
\tag{6}
$$

которые представляют указанные векторные поля с помощью скалярных Φ, Σ и векторных потенциалов $\boldsymbol{\Psi}$, $\mathbf{H}$. Разложения (6) позволяют провести процедуру развязывания системы векторных дифференциальных уравнений (1).

Для однозначной определимости абсолютных векторных потенциалов $\boldsymbol{\Psi}$, $\mathbf{H}$ дополним разложения (6) калибровочными соотношениями

$$
\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\Psi}=0,\qquad \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{H}=0.
$$

4. Скалярные безвихревые потенциалы. После подстановки принятых в предыдущем разделе представлений система связанная система уравнений для бизвехревых потенциалов примет вид

$$
\begin{cases}
2\dfrac{1-\nu}{1-2\nu}\boldsymbol{\Delta}\Phi+L(c_4'+c_5')\boldsymbol{\Delta}\Sigma-2\underset{*}{\alpha}\dfrac{1+\nu}{1-2\nu}\Theta=-\omega\rho G^{-1}\Phi \\
2(1+c_3)\boldsymbol{\Delta}\Sigma+L^{-1}(c_4'+c_5')\boldsymbol{\Delta}\Phi-4L^{-2}c_1\Sigma-2\underset{*}{\beta}\Theta=-\omega\rho\Im G^{-1}L^{-2}\Sigma \\
\boldsymbol{\Delta}\Theta+i\omega C\lambda^{-1}\Theta+i\omega 2G\lambda^{-1}\underset{*}{\alpha}\dfrac{1+\nu}{1-2\nu}\boldsymbol{\Delta}\Phi+i\omega 2G\lambda^{-1}L^2\underset{*}{\beta}\boldsymbol{\Delta}\Sigma=0
\end{cases}
\tag{7}
$$

Введем в рассмотрение для безвихревых составляющих трансляционных и спинорных перемещений вихревой векторный потенциал Ω с различными масштабными факторами

$$\begin{pmatrix}\Phi\\ \Sigma\\ \Theta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}s_1\\ s_2\\ s_3\end{pmatrix}\Omega \tag{8}$$

удовлетворяющий уравнению

$$\Delta\Omega + \gamma^2\Omega = 0 \tag{9}$$

Подстановка универсального безвихревого потенциала приводит нас к системе алгебраических уравнеий:

$$\begin{cases} \left(\omega\rho G^{-1} - 2\dfrac{1-\nu}{1-2\nu}\gamma^2\right)s_1\Omega - L(c_4' + c_5')\gamma^2 s_2\Omega - 2\underset{*}{\alpha}\dfrac{1+\nu}{1-2\nu}s_3\Omega = 0\\ -L^{-1}(c_4' + c_5')\gamma^2 s_1\Omega + (\omega\rho\mathfrak{J}G^{-1}L^{-2} - 2(1+c_3)\gamma^2 - 4L^{-2}c_1)s_2\Omega -\\ \qquad\qquad -2\underset{*}{\beta}s_3\Omega = 0\\ i\omega 2G\lambda^{-1}\underset{*}{\alpha}\dfrac{1+\nu}{1-2\nu}\gamma^2 s_1\Omega + i\omega 2G\lambda^{-1}L^2\underset{*}{\beta}\gamma^2 s_2\Omega + (\gamma^2 + i\omega C\lambda^{-1})s_3\Omega = 0 \end{cases} \tag{10}$$

Решение последней системы будет существовать если ее определитель равен нулю. В этом случае мы получим уравнение такое же, как и уравнение для волновых чисел плоских гармонических термоупругих триплетных волн. Решив которое, найдем скалярные составляющие в разложении Гельмгольца для трансляционных и спинорных перемещений, а также скалярный потенциал температурного инкремента.

5. Векторные вихревые потенциалы трансляционных и спинорных перемещений. Система векторных уравнения для определения вихревых потенциалов записывается в виде:

$$\begin{cases} (1+c_1)\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\nabla}\times\Phi + Lc_5'\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{H} - 2c_1\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{H} = \omega\rho G^{-1}\Phi\\ (1+c_2)L^2\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{H} + Lc_5'\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\nabla}\times\Phi -\\ -Lc_6'\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{H} + 2c_1(2\mathbf{H} - \boldsymbol{\nabla}\times\Phi) = \omega\rho\mathfrak{J}G^{-1}\mathbf{H} \end{cases} \tag{11}$$

Введем в рассмотрение для вихревых составляющих трансляционных и спинорных перемещений вихревой векторный потенциал $\boldsymbol{\Upsilon}$ с различными масштабными факторами

$$\boldsymbol{\nabla}\times\begin{pmatrix}\boldsymbol{\Psi}\\ \mathbf{H}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}\boldsymbol{\Upsilon} \tag{12}$$

Тогда получим систему

$$\begin{aligned} -\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\nabla}\times\begin{pmatrix}-[(1+c_1)a + Lc_5'b]\\ -[(1+c_2)b + Lc_5'a]\end{pmatrix}\boldsymbol{\Upsilon} + \begin{pmatrix}\omega\rho G^{-1}a\\ \omega\rho G^{-1}\mathfrak{J}b\end{pmatrix}\boldsymbol{\Upsilon} +\\ + \boldsymbol{\nabla}\times\begin{pmatrix}2c_1 b\\ 2c_1 a + L^{-1}c_6' b\end{pmatrix}\boldsymbol{\Upsilon} = \mathbf{0} \end{aligned} \tag{13}$$

которую можно преобразовать к следующей

$$-\boldsymbol{\nabla} \times \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \boldsymbol{\Upsilon} + \begin{pmatrix} \omega\rho G^{-1} a \\ \omega\rho G^{-1} \mathfrak{I} b \end{pmatrix} \boldsymbol{\Upsilon} = \mathbf{0}$$

при условии, что справделивы соотношения

$$\frac{a}{c} = \frac{c + 2c_1 b}{\omega\rho G^{-1}[(1+c_1)a + Lc_5' b]}, \quad \frac{b}{d} = \frac{d + 2c_1 a + L^{-1} c_6' b}{\omega\rho G^{-1}\mathfrak{I}[(1+c_2)b + Lc_5' a]}$$

$$\frac{c}{d} = \frac{1}{\mathfrak{I}} \frac{a}{b}$$

Для универсального потенциала $\boldsymbol{\Upsilon}$ получим уравнение

$$-\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\Upsilon} + p\omega\rho G^{-1} \boldsymbol{\Upsilon} = \mathbf{0} \tag{14}$$

при условии, что

$$p = \frac{a}{c}$$

Разрешив отношения для введенных параметров получим уравнение для определения неизвестной p. Решив которое найдем векторные вихревые потенциалы трансляционных и спинорных перемещений.

6. Поля трансляционных и спинорных перемещений в распространяющейся волне Перейдем к определению векторов трансляционных и спинорных перемещений в связанной распространяющейся волне. Связанные трансляционных и спинорных перемещений в цилиндрическом волноводе определяются в цилиндрических координатах r, φ, z методом разделения переменных (подробнее см. в [2]). Этот метод позволяет исследовать волны произвольного азимутального числа n, распространяющиеся по бесконечному волноводу.

Для скалярных волновых потенциалов Φ, Σ, θ связанной продольной триплетной волны получим следующие представления:

$$\begin{pmatrix} \Phi \\ \Sigma \\ \Theta \end{pmatrix} = [C_1 I_n(\gamma_1 r) + C_2 I_n(\gamma_2 r) + C_3] \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} I_n(\gamma_3 r) \left\{ \begin{array}{c} \cos n\varphi \\ -\sin n\varphi \end{array} \right\} e^{\pm ikz} \tag{15}$$

k обозначает волновое число распространяющейся волны; C_1, C_2, C_3 — произвольные константы; $I_n(\cdot)$ — стандартная функция Бесселя первого рода мнимого аргумента;

$$\gamma_1^2 = k^2 - s_1, \quad \gamma_2^2 = k^2 - s_2, \quad \gamma_3^2 = k^2 - s_3.$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Psi} \\ \mathbf{H} \end{pmatrix} = C_4 \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} \boldsymbol{\Upsilon}_1 + C_5 \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} \boldsymbol{\Upsilon}_2 + C_6 \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} \boldsymbol{\Upsilon}_3 + C_7 \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} \boldsymbol{\Upsilon}_4 \tag{16}$$

Координатные представления потенциалов вихревых волн выводятся из формального решения векторного винтового уравнения

$$-\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\Upsilon} + K\boldsymbol{\Upsilon} = \mathbf{0} \tag{17}$$

которое можно получить путем разделения переменных в цилиндрических координатах r, φ, z.

Остается домножить на экспоненты гармоники времени

$$e^{i\omega t}$$

Неизвестные константы получаются из условий калибровки и из граничных условий краевой задачи на боковой стенке волновода.

7. Заключение. В настоящей работе рассматриваются процессы распространения связанных гармонических волн температурного инкремента, трансляционных и спинорных перемещений вдоль оси теплоизолированного цилиндрического волновода. Получены и исследованы представления абсолютных векторных полей трансляционных и спинорных перемещений с помощью системы винтовых векторных потенциалов, обеспечивающих выполнимость связанных векторных дифференциальных уравнений в частных производных. Исследованы уравнения, полученные после подстановки разложений Гельмгольца в исходную систему динамических уравнений полуизотропного микрополярного термоупругого континуума. Проведено разделение системы дифференциальных уравнений на триплетную систему для определения скалярных потенциалов, температурного инкремента, трансляционных и спинорных перемещений и дублетную систему для определения винтовых потенциалов, входящих в разложения Гельмгольца векторов трансляционных и спинорных перемещений.

Система дифференциальных уравнений естественным образом была разделена на триплетную систему для определения скалярных потенциалов, температурного инкремента, трансляционных и спинорных перемещений и дублетную систему для определения винтовых потенциалов, входящих в разложения Гельмгольца векторов трансляционных и спинорных перемещений. Связанность процессов теплообмена и деформирования определяется триплетной системой дифференциальных уравнений в частных производных для безвихревых скалярных потенциалов полей температуры, трансляционных и спинорных перемещений. В процессе исследования указанной системы было получено такое же алгебраическое бикубическое уравнение, как и при решении задачи о распространении плоской термоупругой микрополярной продольной волны триплетов.

Особый интерес в этом случае представляет дублетная система уравнений для вихревых векторных потенциалов полей трансляционных и спинорных перемещений. Процедура устранения связанности динамических уравнений для вихревых векторных потенциалов проведена методом введения в рассмотрение универсального вихревого потенциала с точностью до скалярных множителей, совпадающего с векторными потенциалами полей трансляционных и спинорных перемещений. Последовательными преобразованиями системы дифференциальных уравнений для указанных скалярных множителей были получены алгебраические уравнения. Полученные несвязанные винтовые уравнения для универсального вихревого потенциала в цилиндрической области исследованы стандартной схемой решения уравнений в частных производных: методом разделения переменных с выделением гармонической волны заданного азимута. Выделение гармонической волны заданного азимута обеспечивается структурой аналитического решения задачи, т.е. наличием соответствующих множителей в виде окружных гармоник. При этом нулевому азимутальному число соответствует осесимметричное решение, а нулевому числу - трехмерная пространственная задача о распространении гармонических колебаний.

ДОПОЛНИТЕЛЬНО

Вклад авторов. Все авторы подтверждают соответствие своего авторства международным критериям ICMJE (все авторы внесли существенный вклад в разработку концепции, проведение исследования и подготовку статьи, прочли и одобрили финальную версию перед публикацией).
Конфликт интересов. Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.
Источник финансирования. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 23-21-00262).

ADDITIONAL INFORMATION

Authors' contribution. All authors confirm that their authorship meets the international ICMJE criteria (all authors have made a significant contribution to the development of the concept, research and preparation of the article, read and approved the final version before publication).
Competing interests. The authors declare that they have no competing interests.
Funding. The study was carried out with the financial support of the Russian Science Foundation (project No. 23-21-00262).

ЛИТЕРАТУРА

[1] Nowacki W. Theory of Asymmetric Elasticity. Oxford, New York, Toronto, Sydney, Paris, Frankfurt : Pergamon Press, 1986. viii+383 p.
[2] Altenbach H., Maugin G. A., Erofeev V. (eds.). Mechanics of generalized continua. Berlin : Springer, 2011. Vol. 7. XX+352 p. DOI: 10.1007/978-3-642-19219-7.
[3] Eremeyev V. A., Lebedev L. P., Altenbach H. Foundations of micropolar mechanics. Berlin : Springer Science & Business Media, 2012. XX+352 p. DOI: 10.1007/978-3-642-28353-6.
[4] Altenbach H. Eremeyev V. A. (eds.). Generalized continua-from the theory to engineering applications. Berlin : Springer Science & Business Media, 2012. Vol. 541. XVII+387 p. DOI: 10.1007/978-3-7091-1371-4.
[5] Maugin G. A. Non-classical continuum mechanics. Singapore : Springer Verlag, 2017. XVII+259 p. DOI: 10.1007/978-981-10-2434-4.
[6] Whitham G. B. Linear and nonlinear waves. New York : John Wiley & Sons, 2011. 660 p.
[7] Бреховских Л. М., Гончаров В. В. Linear and nonlinear waves. М. : Наука, 1982. 335 с.
[8] Smith A. C. Waves in micropolar elastic solids // Int. J. Eng. Sci. 1967. Vol. 5. P. 741–746. DOI: 10.1016/0020-7225(67)90019-5.
[9] Willson A. J. The micropolar elastic vibrations of a circular cylinder // International Journal of Engineering Science. 1972. Vol. 10, no. 1. P. 17–22. DOI: 10.1016/0020-7225(72) 90071-7.
[10] Achenbach J. Wave propagation in elastic solids. Amsterdam, London, New York : American Elsevier, 2012. 335 c.

[11] Maugin G. A. Acceleration waves in simple and linear viscoelastic micropolar materials // International Journal of Engineering Science. 1974. Vol. 12, no. 2. P. 143–157. DOI: 10.1016/0020-7225(74)90013-5.

[12] Murashkin E. V., Radayev Y. N. On strong and weak discontinuities of the coupled thermomechanical field in micropolar thermoelastic type-II continua // Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.]. 2014. T. 18, № 4. C. 85–97. DOI: 10.14498/vsgtu1331.

[13] Ковалев В. А., Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Математическая теория связанных плоских гармонических термоупругих волн в микрополярных континуумах первого типа // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Математика. Механика. Информатика. 2014. Vol. 14, no. 1. P. 77–87. DOI: 10.18500/1816-9791-2014-14-1-77-87.

[14] Kovalev V. A., Murashkin E. V., Radayev Y. N. On weak discontinuities and jump equations on wave surfaces in micropolar thermoelastic continua // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2015. Vol. 15, no. 1. P. 79–89. DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-1-79-89.

[15] Murashkin E. V., Radayev Y. N. On a classification of weak discontinuities in micropolar thermoelasticity // Materials Physics and Mechanics. 2015. Vol. 23, no. 1. P. 10–13. DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-1-79-89.

[16] Murashkin E. V., Stadnik N. E. Compatibility conditions in continua with microstrusture // MATEC Web of Conferences. 2017. Vol. 95. P. 12001. DOI: 10.1051/matecconf/20179512001.

[17] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Прямые, инверсные и зеркальные волновые моды связанных волн перемещений и микровращений в гемитропных микрополярных средах // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния. 2021. № 2(48). С. 115–127. DOI: 10.37972/chgpu.2021.48.2.014.

[18] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Термические и атермические плоские гармонические волны в ацентрическом изотропном теле // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния. 2023. № 2(56). С. 99–107. DOI: 10.37972/chgpu.2023.56.2.010.

[19] Радаев Ю. Н. Правило множителей в ковариантных формулировках микрополярных теорий механики континуума // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2018. Т. 22. С. 504–517. DOI: 10.14498/vsgtu1635.

[20] Радаев Ю.Н., Мурашкин Е.В. Псевдотензорная формулировка механики гемитропных микрополярных сред // Проблемы прочности и пластичности. 2020. Vol. 82, no. 4. P. 399–412. DOI: 10.32326/1814-9146-2020-82-4-399-412.

[21] Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On a micropolar theory of growing solids // Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences. 2020. Vol. 24, no. 3. P. 424–444. DOI: 10.14498/vsgtu1792.

[22] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. К теории линейных гемитропных микрополярных сред // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. ИЯ Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2020. № 4. С. 16–24. DOI: 10.37972/chgpu.2020.89.81.031.

[23] Murashkin E. V., Radaev Y. N. Coupled Thermoelasticity of Hemitropic Media. Pseudotensor Formulation // Mechanics of Solids. 2023. Vol. 58, no. 3. P. 802–813. DOI: 10.3103/s0025654423700127.

[24] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. К поливариантности основных уравнений связанной термоупругости микрополярного тела // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния. 2023. № 3(57). С. 112–128. DOI: 10.37972/chgpu.2023.57.3.010.

[25] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Мультивесовая термомеханика гемитропных микрополярных тел // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния. 2023. № 4(58). С. 86–120. DOI: 10.37972/chgpu.2023.58.4.010.
[26] Murashkin E. V., Radayev Y. N. On Algebraic Triple Weights Formulation of Micropolar Thermoelasticity // Mechanics of Solids. 2024. Vol. 59, no. 1. P. 555–580. DOI: 10.1134/s0025654424700274.
[27] Murashkin E. V., Radayev Y. N. Heat transfer in anisotropic micropolar solids // Mechanics of Solids. 2023. Vol. 58, no. 9. P. 3111–3119. DOI: 10.3103/S0025654423700255.
[28] Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Волновые задачи теории поля и термомеханика. Саратов : Изд-во Саратовского ун-та, 2010. 328 с.

REFERENCES

[1] Nowacki W. Theory of Asymmetric Elasticity. Oxford, New York, Toronto, Sydney, Paris, Frankfurt : Pergamon Press, 1986. viii+383 p.
[2] Altenbach H., Maugin G. A., Erofeev V. (eds.). Mechanics of generalized continua. Berlin : Springer, 2011. Vol. 7. XX+352 p. DOI: 10.1007/978-3-642-19219-7.
[3] Eremeyev V. A., Lebedev L. P., Altenbach H. Foundations of micropolar mechanics. Berlin : Springer Science & Business Media, 2012. XX+352 p. DOI: 10.1007/978-3-642-28353-6.
[4] Altenbach H. Eremeyev V. A. (eds.). Generalized continua-from the theory to engineering applications. Berlin : Springer Science & Business Media, 2012. Vol. 541. XVII+387 p. DOI: 10.1007/978-3-7091-1371-4.
[5] Maugin G. A. Non-classical continuum mechanics. Singapore : Springer Verlag, 2017. XVII+259 p. DOI: 10.1007/978-981-10-2434-4.
[6] Whitham G. B. Linear and nonlinear waves. New York : John Wiley & Sons, 2011. 660 p.
[7] Brekhovskikh L. M., Goncharov V. V. Linear and nonlinear waves. Moscow : NAUKA, 1982. 335 p.
[8] Smith A. C. Waves in micropolar elastic solids // Int. J. Eng. Sci. 1967. Vol. 5. P. 741–746. DOI: 10.1016/0020-7225(67)90019-5.
[9] Willson A. J. The micropolar elastic vibrations of a circular cylinder // International Journal of Engineering Science. 1972. Vol. 10, no. 1. P. 17–22. DOI: 10.1016/0020-7225(72) 90071-7.
[10] Achenbach J. Wave propagation in elastic solids. Amsterdam, London, New York : American Elsevier, 2012. 335 c.
[11] Maugin G. A. Acceleration waves in simple and linear viscoelastic micropolar materials // International Journal of Engineering Science. 1974. Vol. 12, no. 2. P. 143–157. DOI: 10.1016/0020-7225(74)90013-5.
[12] Murashkin E. V., Radayev Y. N. On strong and weak discontinuities of the coupled thermomechanical field in micropolar thermoelastic type-II continua // Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.]. 2014. T. 18, № 4. C. 85–97. DOI: 10.14498/vsgtu1331.
[13] Kovalev V. A., Murashkin E. V., Radaev Yu. N. Mathematical theory of coupled plane harmonic thermoelastic waves in micropolar continua of the first type // Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya Matematika. Mekhanika. Informatika. 2014. Vol. 14, no. 1. P. 77–87. DOI: 10.18500/1816-9791-2014-14-1-77-87.
[14] Kovalev V. A., Murashkin E. V., Radayev Y. N. On weak discontinuities and jump equations on wave surfaces in micropolar thermoelastic continua // Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya Matematika. Mekhanika. Informatika. 2015. Vol. 15, no. 1. P. 79–89. DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-1-79-89.

[15] Murashkin E. V., Radayev Y. N. On a classification of weak discontinuities in micropolar thermoelasticity // Materials Physics and Mechanics. 2015. Vol. 23, no. 1. P. 10–13. DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-1-79-89.
[16] Murashkin E. V., Stadnik N. E. Compatibility conditions in continua with microstrusture // MATEC Web of Conferences. 2017. Vol. 95. P. 12001. DOI: 10.1051/matecconf/20179512001.
[17] Murashkin E. V., Radayev Yu. N. Direct, inverse and mirror wave modes of coupled waves of displacements and microrotations in hemitropic micropolar media // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. IYa Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya. 2021. no. 2(48). P. 115–127. DOI: 10.37972/chgpu.2021.48.2.014.
[18] Murashkin E. V., Radayev Yu. N. Thermal and athermal plane harmonic waves in an acentric isotropic solid // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. IYa Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya. 2023. no. 2(56). P. 99–107. DOI: 10.37972/chgpu.2023.56.2.010.
[19] Radaev Y. N. The multiplier rule in covariant formulations of micropolar theories of continuum mechanics // Vestn. Sam. gos. tekhn. un-ta. Ser. Fiz.-mat. nauki. 2018. Vol. 22. P. 504–517. DOI: 10.14498/vsgtu1635.
[20] Radaev Y. N., Murashkin E. V. Pseudotensor formulation of the mechanics of hemitropic micropolar media // Problems of strength and ductility. 2020. Vol. 82, no. 4. P. 399–412. DOI: 10.32326/1814-9146-2020-82-4-399-412.
[21] Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On a micropolar theory of growing solids // Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences. 2020. Vol. 24, no. 3. P. 424–444. DOI: 10.14498/vsgtu1792.
[22] Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On theory of linear hemitropic micropolar media // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. IYa Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya. 2020. no. 4. P. 16–24. DOI: 10.37972/chgpu.2020.89.81.031.
[23] Murashkin E. V., Radaev Y. N. Coupled Thermoelasticity of Hemitropic Media. Pseudotensor Formulation // Mechanics of Solids. 2023. Vol. 58, no. 3. P. 802–813. DOI: 10.3103/s0025654423700127.
[24] Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On the polyvariance of the basic equations of coupled thermoelasticity of a micropolar solid // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. IYa Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya. 2023. no. 3(57). P. 112–128. DOI: 10.37972/chgpu.2023.57.3.010.
[25] Murashkin E. V., Radayev Yu. N. Multiweight thermomechanics of hemitropic micropolar solids // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. IYa Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya. 2023. no. 4(58). P. 86–120. DOI: 10.37972/chgpu.2023.58.4.010.
[26] Murashkin E. V., Radayev Y. N. On Algebraic Triple Weights Formulation of Micropolar Thermoelasticity // Mechanics of Solids. 2024. Vol. 59, no. 1. P. 555–580. DOI: 10.1134/s0025654424700274.
[27] Murashkin E. V., Radayev Y. N. Heat transfer in anisotropic micropolar solids // Mechanics of Solids. 2023. Vol. 58, no. 9. P. 3111–3119. DOI: 10.3103/S0025654423700255.
[28] Kovalev V. A., Radaev Yu. N. Wave problems of field theory and thermomechanics. Saratov : Publishing House of Saratov University, 2010. 328 p.