

Е. В. Мурашкин, Ю. Н. Радаев

ВОЛНОВЫЕ КРИТЕРИИ УЛЬТРАТРОПНОСТИ МИКРОПОЛЯРНЫХ УПРУГИХ ТЕЛ

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлунского РАН, Москва, Россия

Аннотация. Работа посвящена проблемам, связанным с распространением плоских гармонических волн трансляционных и спинорных перемещений в ультратропных микрополярных упругих телах. Разъяснено понятие ультратропного микрополярного упругого тела. Представлена энергетическая форма потенциала напряжений для анизотропного микрополярного упругого тела и получены поределеляющие уравнения для ультрагемитропного/ультраизотропного микрополярных упругих тел. Получены системы дифференциальных уравнений с частными производными, записанные в терминах вектора трансляционных перемещений и вектора спинорных перемещений для ультрагемитропного/ультраизотропного микрополярных упругих тел. Получены системы уравнений для определения волновых чисел продольных и поперечных волн, распространяющихся в упомянутых средах. Сформулированы критерии распространения поперечных гармонических волн в ультратропных микрополярных упругих телах.

Ключевые слова: микрополярность, ультрагемитропное тело, ультраизотропное тело, трансляционное смещение, спинорное смещение, плоская гармоническая по времени волна, продольная волна, поперечная волна, волновое число, комплексная амплитуда, фазовая плоскость, дисперсионное уравнение, вектор поляризации.

Мурашкин Евгений Валерьевич, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории моделирования в механике деформируемого твердого тела; e-mail: murashkin@ipmnet.ru; <https://orcid.org/0000-0002-3267-4742>; AuthorID: 129570

Радаев Юрий Николаевич, доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник лаборатории моделирования в механике деформируемого твердого тела; e-mail: radayev@ipmnet.ru; <https://orcid.org/0000-0002-0866-2151>; AuthorID: 103116

для цитирования: Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Волновые критерии ультратропности микрополярных упругих тел // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2024. № 4(62). С. 127–138. DOI: 10.37972/chgpu.2024.62.4.009 EDN: VJVOEC

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0).

E. V. Murashkin, Y. N. Radayev

WAVE CRITERIA FOR ULTRATROPIC MICROPOLAR ELASTIC SOLIDS

Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow, Russia

Abstract. The paper is devoted to the problems concerning propagation of plane harmonic waves of translational and spinor displacements in ultratropic micropolar elastic solids. The concept of an ultratropic micropolar elastic body is discussed. An energy form of stress potential for an anisotropic micropolar elastic body is presented and constitutive equations for ultrahemitropic/ultraisotropic micropolar elastic solids are obtained. A systems of partial differential equations formulated by terms of the translational displacement vector and the spinor displacement vector for ultrahemitropic/ultraisotropic micropolar elastic solids is derived. The equations for wavenumbers of longitudinal and transverse waves propagating in ultrahemitropic/ultraisotropic micropolar elastic solids are obtained and discussed. A criterion for propagating transverse harmonic waves in ultratropic micropolar elastic solids is formulated.

Keywords: micropolar thermoelasticity, ultrahemitropic solid, ultraisotropic solid, translational displacement, spinor displacement, plane time-harmonic wave, longitudinal wave, transverse wave, wavenumber, complex amplitude, phase plane, dispersion equation, polarization vector.

Evgenii V. Murashkin, Cand. Sci. Phys. & Math., MD, Senior Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences; e-mail: evmurashkin@gmail.ru; <https://orcid.org/0000-0002-3267-4742>; AuthorID: 129570

Yuri N. Radayev, Dr. Sci. Phys. & Math., Prof., Leading Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences; e-mail: radayev@ipmnet.ru; <https://orcid.org/0000-0002-0866-2151>; AuthorID: 103116

to cite this article: Murashkin E. V., Radayev Y. N. Wave criteria for ultratropic micropolar elastic solids // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2024. No 4(62). p. 127–138. DOI: 10.37972/chgpu.2024.62.4.009 EDN: VJVOEC

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

1. Введение. Модели микрополярных континуумов основаны в кинематическом плане на понятиях спинорных и трансляционных перемещений, определяющих движение элемента деформируемой среды. Указанный способ моделирования микрополярного тела впервые был описан и применяется в работе братьев Коссера [1]. Последующие многочисленные работы по микрополярной упругости появились только через 50 лет. Среди них следует отдельно отметить работы отечественных ученых [2, 3], а также работы немецких авторов [4–7]. Векторы спинорных и трансляционных перемещений могут быть введены в теорию способами, известными в аналитической механике как теоремы Шалля о конечных поворотах твердого тела. В известных авторам публикациях построение микрополярных теорий основывается на второй кинематической теореме Шалля, позволяющей рассматривать векторы спинорных и трансляционных перемещений как независимые векторные/псевдовекторные поля.

Важным классом задач в теориях волновой механики микрополярных сред являются задачи распространения плоских гармонических волн в упругих средах. Этот класс задач подготавливает к идентификации полуизотропных микрополярных тел. Волновым задачам механики микрополярных континуумов посвящена обширная литература [8–18]. Тем не менее следует отметить, что некоторые проблемы, существенные как для теории, так и для прикладных вопросов, до сих пор остаются не исследованными. В первую очередь это касается вопросов ориентации в пространстве (поляризаций) для плоских гармонических волн, что препятствует применению теории микрополярной упругости в экспериментах и не позволяет говорить о завершенности рассматриваемых исследований. Следует обратить внимание, что предмет настоящей работы, связанный с распространением гармонических волн в ультрагеомитропной среде, никогда ранее не исследовался. Изложение материала настоящей статьи в значительной степени использует терминологию, обозначения, методы и результаты, изложенные в предыдущих статьях авторов [13–27].

2. Ультратропные микрополярные упругие тела. Микрополярный упругий континуум в анизотропном случае можно охарактеризовать энергетической формой (потенциалом силовых и моментных напряжений), которая в декартовых координатах примет вид [19]:

$$2\bar{\mathcal{U}} = H_{1islm}\epsilon_{is}\epsilon_{lm} + H_{2islm}\kappa_{is}\kappa_{lm} + H_{3islm}\epsilon_{is}\kappa_{lm}, \quad (1)$$

где H_{1islm} , H_{2islm} , H_{3islm} — определяющие тензоры анизотропного микрополярного упругого тела; ϵ_{ik} — асимметричный тензор деформации; κ_{ik} — асимметричный тензор изгиба-кручения.

Микрополярное упругое тело назовем ультратропным, если компоненты его определяющих тензоров не изменяются ни при каких преобразованиях трехмерного Евклидова пространства, т.е. являются тензорами с постоянными компонентами [?, ?, ?]. Учитывая представление для тензоров четвертого ранга с постоянными компонентами [?], определяющие тензоры (3) можно представить

в виде

$$H_{isl m} = a_{\mathfrak{c}} \delta_{is} \delta_{lm} + c_{\mathfrak{c}} \delta_{im} \delta_{ls} \quad (\mathfrak{c} = 1, 2, 3), \quad (2)$$

Отметим, что в случае гемитропного/изотропного микрополярного упругого тела определяющие Н-тензоры записываются в форме

$$H_{isl m} = a_{\mathfrak{c}} \delta_{is} \delta_{lm} + b_{\mathfrak{c}} \delta_{sm} \delta_{il} + c_{\mathfrak{c}} \delta_{im} \delta_{ls} \quad (\mathfrak{c} = 1, 2, 3), \quad (3)$$

где $a_{\mathfrak{c}}, b_{\mathfrak{c}}, c_{\mathfrak{c}}$ ($\mathfrak{c} = 1, 2, 3$) — определяющие постоянные. Кроме того, для случая изотропного тела справедливо условие

$$H_{isl m} = 0. \quad (4)$$

Сравнивая представления для определяющих тензоров (2) и (3), приходим к условию ультратропности

$$b_{\mathfrak{c}} = 0 \quad (\mathfrak{c} = 1, 2, 3). \quad (5)$$

Вместо определяющих постоянных $a_{\mathfrak{c}}, b_{\mathfrak{c}}, c_{\mathfrak{c}}$ ($\mathfrak{c} = 1, 2, 3$) иногда удобно использовать материальные механические параметры, связанные с первыми следующими соотношениями $[?, ?, ?]$:

$$\begin{aligned} a_1 &= 2G\nu(1 - 2\nu)^{-1}, & b_1 + c_1 &= 2G, & b_1 - c_1 &= 2Gc_1, \\ a_2 &= 2GL^2c_3, & b_2 + c_2 &= 2GL^2, & b_2 - c_2 &= GL^2c_2, \\ a_3 &= 2GLc_4, & b_3 + c_3 &= 2GLc_5, & c_3 - b_3 &= GLc_6. \end{aligned} \quad (6)$$

где G — модуль сдвига; ν — коэффициент Пуассона; L — характерная микро-длина; $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$ — не имеющие физической размерности постоянные (см. [19, 20]). В изотропном случае: $c_4 = c_5 = c_6 = 0$.

Учитывая условия (5), материальные определяющие постоянные ультрагемитропного микрополярного упругого тела должны удовлетворять следующим определяющим ограничениям (constitutive constraints):

$$c_1 = c_2 = -1, \quad c_6 = 2c_5. \quad (7)$$

Следовательно, определяющие уравнения ультрагемитропного микрополярного тела примут вид¹

$$\begin{aligned} t^{(is)} &= 2G [\nu(1 - 2\nu)^{-1} g^{is} g^{lm} + g^{il} g^{sm}] \epsilon_{(lm)} + GL [c_4 g^{is} g_{lm} \kappa^{(lm)} + c_5 \kappa^{(is)}], \\ \mu_{(is)} &= 2GL^2 [c_3 g_{is} g_{lm} + g_{il} g_{sm}] \kappa^{(lm)} + GL [c_4 g_{is} g^{lm} \epsilon_{(lm)} + c_5 \epsilon_{(is)}], \\ \tau_i &= -2G g_{is} \varphi^s + GL c_5 \kappa_i, \\ \mu^i &= -2GL^2 g^{is} \kappa_s + GL c_5 \varphi^i, \end{aligned} \quad (8)$$

¹Здесь мы используем произвольную криволинейную координатную сетку.

а для ультраизотропного случая —

$$\begin{aligned} t^{(is)} &= 2G [\nu(1-2\nu)^{-1} g^{is} g^{lm} + g^{il} g^{sm}] \epsilon_{(lm)}, \\ \mu_{(is)} &= 2GL^2 [c_3 g_{is} g_{lm} + g_{il} g_{sm}] \kappa^{(lm)}, \\ \tau_i &= -2G g_{is} \varphi^s, \\ \mu^i &= -2GL^2 g^{is} \kappa_s. \end{aligned} \quad (9)$$

3. Распространение плоских гармонических волн в ультратропных микрополярных упругих телах. Система дифференциальных уравнений динамики ультратропных микрополярных упругих тел может быть записана согласно определяющим уравнениям (8) и (9) в векторной форме [28], соответственно:

для ультрагемитроного тела:

$$\begin{cases} 2(1-\nu)(1-2\nu)^{-1} \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} - 2 \nabla \times \boldsymbol{\phi} + L(c_4 + c_5) \nabla \nabla \cdot \boldsymbol{\phi} = \rho G^{-1} (\partial.)^2 \mathbf{u}, \\ 2(1+c_3) \nabla \nabla \cdot \boldsymbol{\phi} + L^{-1}(c_4 + c_5) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} - 2L^{-1} c_5 \nabla \times \boldsymbol{\phi} + \\ + 2L^{-2} (2\boldsymbol{\phi} - \nabla \times \mathbf{u}) = \rho \mathfrak{J} G^{-1} L^{-2} (\partial.)^2 \boldsymbol{\phi}, \end{cases} \quad (10)$$

для ультраизотропного тела:

$$\begin{cases} 2(1-\nu)(1-2\nu)^{-1} \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} - 2 \nabla \times \boldsymbol{\phi} = \rho G^{-1} (\partial.)^2 \mathbf{u}, \\ 2(1+c_3) \nabla \nabla \cdot \boldsymbol{\phi} + 2L^{-2} (2\boldsymbol{\phi} - \nabla \times \mathbf{u}) = \rho \mathfrak{J} G^{-1} L^{-2} (\partial.)^2 \boldsymbol{\phi}. \end{cases} \quad (11)$$

Системы дифференциальных уравнений в частных производных (10) и (11), записанные в терминах вектора трансляционных перемещений $\mathbf{u}$ и вектора спинорных перемещений $\boldsymbol{\phi}$ служат основой для исследования сильных и слабых разрывов в ультратропных микрополярных упругих телах, а также волновых процессов, которые в рассматриваемых случаях характеризуются одновременным распространением прямых и зеркальных мод.

Рассмотрим задачу о распространении связанной гармонической плоской волны с циклической частотой ω . В этом случае векторные поля трансляционных и спинорных перемещений можно представить в форме

$$\mathbf{u} = \mathbf{A} \Phi, \quad \boldsymbol{\phi} = \mathbf{S} \Phi, \quad \Phi = e^{i \arg \Phi}, \quad \arg \Phi = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t, \quad (12)$$

где $\mathbf{k}$ — волновой вектор; $\mathbf{r}$ — радиус вектор; ω — циклическая частота гармонической волны; $\mathbf{A}$, $\mathbf{S}$ — векторы комплексных амплитуд трансляционных и спинорных перемещений соответственно; Φ — фазовый множитель; $\arg \Phi$ — фаза плоской волны. $\arg \Phi = \text{const}$ — фазовые плоскости.

Отметим, что $\mathbf{k} = k \mathbf{s}$, где k — комплексное число, $\mathbf{s}$ — вещественный единичный вектор.

После подстановки представлений (12) в системы (10) и (11) получим, соответственно:

для ультрагемитроного тела:

$$\begin{cases} \rho G^{-1} \omega^2 \mathbf{A} - 2[1 - \nu](1 - 2\nu)^{-1} \mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{A}) - 2i\mathbf{k} \times \mathbf{S} - L(c_4 + c_5) \mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{S}) = \mathbf{0}, \\ [\rho \mathfrak{J} G^{-1} L^{-2} \omega^2 + 4L^{-2}] \mathbf{S} - 2(1 + c_3) \mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{S}) - 2L^{-1} c_5 i \mathbf{k} \times \mathbf{S} - \\ - L^{-1}(c_4 + c_5) \mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{A}) - 2L^{-2} i \mathbf{k} \times \mathbf{A} = \mathbf{0}, \end{cases} \quad (13)$$

для ультраизотроного тела:

$$\begin{cases} \rho G^{-1} \omega^2 \mathbf{A} - 2[1 - \nu](1 - 2\nu)^{-1} \mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{A}) - 2i\mathbf{k} \times \mathbf{S} = \mathbf{0}, \\ [\rho \mathfrak{J} G^{-1} L^{-2} \omega^2 + 4L^{-2}] \mathbf{S} - 2(1 + c_3) \mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{S}) - 2L^{-2} i \mathbf{k} \times \mathbf{A} = \mathbf{0}. \end{cases} \quad (14)$$

Представим векторы комплексных амплитуд трансляционных ($\mathbf{A}$) и спинорных ($\mathbf{S}$) перемещений в виде суммы

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_\perp + A_\parallel \mathbf{k}, \quad \mathbf{S} = \mathbf{S}_\perp + S_\parallel \mathbf{k}, \quad (15)$$

где векторы $\mathbf{A}_\perp$ и $\mathbf{S}_\perp$ расположены в плоскости перпендикулярной волновому вектору $\mathbf{k}$, т.е. в плоскости постоянной фазы $\arg \Phi = \text{const}$.

Подставив представление (15) в системы (13) и (14), получим:

для ультрагемитроного тела:

$$\begin{cases} [\rho G^{-1} \omega^2](\mathbf{A}_\perp + A_\parallel \mathbf{k}) - 2(1 - \nu)(1 - 2\nu)^{-1} A_\parallel k^2 \mathbf{k} - \\ - 2i\mathbf{k} \times \mathbf{S}_\perp - L(c_4 + c_5) S_\parallel k^2 \mathbf{k} = \mathbf{0}, \\ [\rho \mathfrak{J} G^{-1} L^{-2} \omega^2 + 4L^{-2}](\mathbf{S}_\perp + S_\parallel \mathbf{k}) - 2(1 + c_3) S_\parallel k^2 \mathbf{k} - 2L^{-1} c_5 i \mathbf{k} \times \mathbf{S}_\perp - \\ - L^{-1}(c_4 + c_5) A_\parallel k^2 \mathbf{k} - 2L^{-2} i \mathbf{k} \times \mathbf{A}_\perp = \mathbf{0}, \end{cases} \quad (16)$$

для ультраизотроного тела:

$$\begin{cases} [\rho G^{-1} \omega^2](\mathbf{A}_\perp + A_\parallel \mathbf{k}) - 2(1 - \nu)(1 - 2\nu)^{-1} A_\parallel k^2 \mathbf{k} - 2i\mathbf{k} \times \mathbf{S}_\perp = \mathbf{0}, \\ [\rho \mathfrak{J} G^{-1} L^{-2} \omega^2 + 4L^{-2}](\mathbf{S}_\perp + S_\parallel \mathbf{k}) - 2(1 + c_3) S_\parallel k^2 \mathbf{k} - 2L^{-2} i \mathbf{k} \times \mathbf{A}_\perp = \mathbf{0}. \end{cases} \quad (17)$$

Нетрудно заметить, что системы (16) и (17) распадаются на независимые системы уравнений, отдельно для продольных и поперечных волн.

4. Распространение плоских продольных гармонических волн в ультратропных микрополярных телах. Проекция уравнений системы (13) на волновой вектор $\mathbf{k}$ представляет собой замкнутую систему трех линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} \left(\omega^2 - \frac{2G(1 - \nu)}{\rho(1 - 2\nu)} k^2 \right) A_\parallel - (c_4 + c_5) \rho^{-1} G L k^2 S_\parallel = 0, \\ [\omega^2 + 4(\rho \mathfrak{J})^{-1} G - 2(1 + c_3)(\rho \mathfrak{J})^{-1} G L^2 k^2] S_\parallel - (c_4 + c_5)(\rho \mathfrak{J})^{-1} G L k^2 A_\parallel = 0. \end{cases} \quad (18)$$

Аналогичная проекция системы (14) приводит к тривиальной системе

$$\begin{cases} \left(\omega^2 - \frac{2G(1 - \nu)}{\rho(1 - 2\nu)} k^2 \right) A_\parallel = 0, \\ [\omega^2 + 4(\rho \mathfrak{J})^{-1} G - 2(1 + c_3)(\rho \mathfrak{J})^{-1} G L^2 k^2] S_\parallel = 0. \end{cases} \quad (19)$$

Для существования нетривиального решения алгебраической системы (18) необходимо и достаточно, чтобы ее определитель был равен нулю, т.е.

$$\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} \omega^2 - [V_{\parallel}]^2 k^2 & -a_1 k^2 \\ -a_1 \mathfrak{I}^{-1} k^2 & \omega^2 + \Omega - (V_{\parallel}^{\mu\mu})^2 k^2 \end{vmatrix} = 0, \quad (20)$$

где

$$\begin{aligned} [V_{\parallel}]^2 &= \frac{2G(1-\nu)}{\rho(1-2\nu)}, & [V_{\parallel}^{\mu\mu}]^2 &= \frac{2GL^2(1+c_3)}{\rho\mathfrak{I}}, \\ \rho\mathfrak{I}\Omega &= 4G, & \rho a_1 &= (c_4 + c_5)GL. \end{aligned} \quad (21)$$

Отметим, что системы уравнений (18) и (19) совпадают по форме с аналогичным для полуизотропного упругого тела, а матрица $\mathbf{A}$ качественно совпадает с аналогичной для гемитропного тела [29, 30]. Поэтому распространение продольных волн в ультратропных микрополярных упругих телах не имеет качественных особенностей по сравнению с аналогичными случаями для полуизотропных и изотропных тел.

5. Распространение плоских поперечных гармонических волн в ультратропных микрополярных телах. Рассмотрим проекции систем линейных уравнений (16) и (17) ортогональные направления в фазовой плоскости $\arg \Phi = \text{const}$. Введем в рассмотрение два единичных взаимно ортогональных вектора $\mathbf{i}$ и $\mathbf{j}$, расположенных в фазовой плоскости. Тогда векторы $\mathbf{A}_{\perp}$ и $\mathbf{S}_{\perp}$ можно представить в форме

$$\mathbf{A}_{\perp} = A_{\perp 1} \mathbf{i} + A_{\perp 2} \mathbf{j}, \quad \mathbf{S}_{\perp} = S_{\perp 1} \mathbf{i} + S_{\perp 2} \mathbf{j}. \quad (22)$$

Проекция системы линейных уравнений (16) на орты $\mathbf{i}$ и $\mathbf{j}$ примут вид

$$\begin{aligned} \omega^2 A_{\perp 1} + 2i\rho^{-1}GkS_{\perp 2} &= 0, \\ \omega^2 A_{\perp 2} - 2i\rho^{-1}GkS_{\perp 1} &= 0, \\ [\mathfrak{I}\omega^2 + 4\rho^{-1}G]S_{\perp 1} + 2iLc_5\rho^{-1}GkS_{\perp 2} + 2i\rho^{-1}GkA_{\perp 1} &= 0, \\ [\mathfrak{I}\omega^2 + 4\rho^{-1}G]S_{\perp 2} - 2iLc_5\rho^{-1}GkS_{\perp 1} - 2i\rho^{-1}GkA_{\perp 2} &= 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Проекция системы линейных уравнений (17) на орты $\mathbf{i}$ и $\mathbf{j}$ вычисляются согласно

$$\begin{aligned} \omega^2 A_{\perp 1} + 2i\rho^{-1}GkS_{\perp 2} &= 0, \\ \omega^2 A_{\perp 2} - 2i\rho^{-1}GkS_{\perp 1} &= 0, \\ [\mathfrak{I}\omega^2 + 4\rho^{-1}G]S_{\perp 1} + 2i\rho^{-1}GkA_{\perp 1} &= 0, \\ [\mathfrak{I}\omega^2 + 4\rho^{-1}G]S_{\perp 2} - 2i\rho^{-1}GkA_{\perp 2} &= 0. \end{aligned} \quad (24)$$

Для существования нетривиального решения систем линейных однородных уравнений (23) и (24) необходимо и достаточно, чтобы их определители были равны нулю.

Отметим, что в отличие от аналогичного уравнения для полуизотропного упругого тела [29, 30]. Видим, что характерные определяющие числа $[V_{\perp}^{\mu}]^2 = G(1 + c_1)\rho^{-1}$ и $[V_{\perp}^{\mu\mu}]^2 = G(1 + c_2)(\rho\mathfrak{J})^{-1}$ равны нулю для ультрагемитропного и ультраизотропного микрополярных упругих тел, что позволяет сформулировать последние в виде простых критериев

$$[V_{\perp}^{\mu}]^2 = G(1 + c_1)\rho^{-1} = 0, \quad [V_{\perp}^{\mu\mu}]^2 = G(1 + c_2)(\rho\mathfrak{J})^{-1} = 0. \quad (25)$$

6. Заключение. В настоящей работе рассмотрены вопросы распространения плоских гармонических волн трансляционных и спинорных перемещений в ультратропных микрополярных упругих средах.

- (1) Разъяснено понятие ультратропного микрополярного упругого тела.
- (2) Представлена энергетическая форма потенциала напряжений для анизотропного микрополярного упругого тела и получены поределющие уравнения для ультрагемитропного/ультраизотропного микрополярных упругих тел
- (3) Получены система дифференциальных уравнений с частными производными в терминах вектора трансляционных перемещений и вектора спинорных перемещений для ультрагемитропного/ультраизотропного микрополярных упругих тел.
- (4) Получены системы уравнений для определения волновых чисел для продольных и поперечных волн, распространяющихся в ультрагемитропных/ультраизотропных микрополярных упругих телах.
- (5) Сформулированы простые критерии распространения поперечных гармонических волн в ультратропных микрополярных упругих телах.

ДОПОЛНИТЕЛЬНО

Вклад авторов. Все авторы подтверждают соответствие своего авторства международным критериям ICMJE (все авторы внесли существенный вклад в разработку концепции, проведение исследования и подготовку статьи, прочли и одобрили финальную версию перед публикацией).

Конфликт интересов. Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

Источник финансирования. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 23-21-00262).

ADDITIONAL INFORMATION

Authors' contribution. All authors confirm that their authorship meets the international ICMJE criteria (all authors have made a significant contribution to the development of the concept, research and preparation of the article, read and approved the final version before publication).

Competing interests. The authors declare that they have no competing interests.

Funding. The study was carried out with the financial support of the Russian Science Foundation (project No. 23-21-00262).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Cosserat Eugène Maurice Pierre, Cosserat François. *Théorie des corps déformables*. Paris : A. Hermann et fils, 1909. VI+226 p.
- [2] Aero E. L., Kuvshinskii E. V. Fundamental equations of the theory of elastic media with rotationally interacting particles // *Soviet Physics-Solid State*. 1961. Vol. 2, no. 7. P. 1272–1281.
- [3] Pal'mov V. A. Fundamental equations of the theory of asymmetric elasticity // *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 1964. Vol. 28, no. 3. P. 496–505.
- [4] Neuber H. Über Probleme der Spannungskonzentration im Cosserat-Körper // *Acta Mechanica*. 1966. Vol. 2. P. 48–69. DOI: 10.1007/BF01176729.
- [5] Günther W. Zur Statik und Kinematik des Cosseratschen Kontinuums // *Abh. Braunschweig. Wiss. Ges.* 1958. Vol. 10. P. 195–213.
- [6] Neuber H. On the general solution of linear-elastic problems in isotropic and anisotropic Cosserat continua // *Applied Mechanics: Proceedings of the Eleventh International Congress of Applied Mechanics Munich (Germany) 1964* / Springer. 1966. P. 153–158. DOI: 10.1007/978-3-662-29364-5_16.
- [7] Neuber H. On the Effect of Stress Concentration in Cosserat Continua // *Mechanics of Generalized Continua* / Ed. by Ekkehart Kröner. Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 1968. P. 109–113.
- [8] Smith A. C. Waves in micropolar elastic solids // *Int. J. Eng. Sci.* 1967. Vol. 5. P. 741–746. DOI: 10.1016/0020-7225(67)90019-5.
- [9] Willson A. J. The micropolar elastic vibrations of a circular cylinder // *International Journal of Engineering Science*. 1972. Vol. 10, no. 1. P. 17–22. DOI: 10.1016/0020-7225(72)90071-7.
- [10] Nowacki W. *Theory of Asymmetric Elasticity*. Oxford, New York, Toronto, Sydney, Paris, Frankfurt : Pergamon Press, 1986. viii+383 p.
- [11] Achenbach J. *Wave propagation in elastic solids*. Amsterdam, London, New York : American Elsevier, 2012. 335 c.
- [12] Maugin G. A. Acceleration waves in simple and linear viscoelastic micropolar materials // *International Journal of Engineering Science*. 1974. Vol. 12, no. 2. P. 143–157. DOI: 10.1016/0020-7225(74)90013-5.
- [13] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Термические и атермические плоские гармонические волны в ацентрическом изотропном теле // *Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния*. 2023. № 2(56). С. 99–107. DOI: 10.37972/chgpu.2023.56.2.010.
- [14] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Прямые, инверсные и зеркальные волновые моды связанных волн перемещений и микровращений в гемитропных микрополярных средах // *Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния*. 2021. № 2(48). С. 115–127. DOI: 10.37972/chgpu.2021.48.2.014.
- [15] Murashkin E. V., Stadnik N. E. Compatibility conditions in continua with microstructure // *MATEC Web of Conferences*. 2017. Vol. 95. P. 12001. DOI: 10.1051/mateconf/20179512001.
- [16] Murashkin E. V., Radayev Y. N. On a classification of weak discontinuities in micropolar thermoelasticity // *Materials Physics and Mechanics*. 2015. Vol. 23, no. 1. P. 10–13. DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-1-79-89.
- [17] Kovalev V. A., Murashkin E. V., Radayev Y. N. On weak discontinuities and jump equations on wave surfaces in micropolar thermoelastic continua // *Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика*. 2015. Vol. 15, no. 1. P. 79–89. DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-1-79-89.

- [18] Ковалев В. А., Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Математическая теория связанных плоских гармонических термоупругих волн в микрополярных континуумах первого типа // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Математика. Механика. Информатика. 2014. Vol. 14, no. 1. P. 77–87. DOI: 10.18500/1816-9791-2014-14-1-77-87.
- [19] Радаев Ю. Н. Правило множителей в ковариантных формулировках микрополярных теорий механики континуума // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2018. Т. 22. С. 504–517. DOI: 10.14498/vsgtu1635.
- [20] Радаев Ю.Н., Мурашкин Е.В. Псевдотензорная формулировка механики гемитропных микрополярных сред // Проблемы прочности и пластичности. 2020. Vol. 82, no. 4. P. 399–412. DOI: 10.32326/1814-9146-2020-82-4-399-412.
- [21] Murashkin E. V., Radaev Yu. N. On a micropolar theory of growing solids // Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences. 2020. Vol. 24, no. 3. P. 424–444. DOI: 10.14498/vsgtu1792.
- [22] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. К теории линейных гемитропных микрополярных сред // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. ИЯ Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2020. № 4. С. 16–24. DOI: 10.37972/chgpu.2020.89.81.031.
- [23] Murashkin E. V., Radaev Y. N. Coupled Thermoelasticity of Hemitropic Media. Pseudotensor Formulation // Mechanics of Solids. 2023. Vol. 58, no. 3. P. 802–813. DOI: 10.3103/s0025654423700127.
- [24] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. К поливариантности основных уравнений связанной термоупругости микрополярного тела // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния. 2023. № 3(57). С. 112–128. DOI: 10.37972/chgpu.2023.57.3.010.
- [25] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Мультивесовая термомеханика гемитропных микрополярных тел // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния. 2023. № 4(58). С. 86–120. DOI: 10.37972/chgpu.2023.58.4.010.
- [26] Murashkin E. V., Radaev Y. N. On Algebraic Triple Weights Formulation of Micropolar Thermoelasticity // Mechanics of Solids. 2024. Vol. 59, no. 1. P. 555–580. DOI: 10.1134/s0025654424700274.
- [27] Murashkin E. V., Radaev Y. N. Heat transfer in anisotropic micropolar solids // Mechanics of Solids. 2023. Vol. 58, no. 9. P. 3111–3119. DOI: 10.3103/S0025654423700255.
- [28] Murashkin E. V., Radaev Y. N. Coupled Harmonic Thermoelastic Waves in an Ultrahemitropic Micropolar Medium // Mechanics of Solids. 2024. Vol. 59, no. 5. P. ??
- [29] Murashkin E. V., Radaev Y. N. Волновые числа гармонических плоских волн трансляционных и спинорных перемещений в полуизотропной термоупругой среде // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2024. Т. 28, № 3. С. 445–461. DOI: 10.14498/vsgtu2087.
- [30] Murashkin E. V., Radaev Y. N. Coupled Harmonic Plane Waves in a Semi-Isotropic Thermoelastic Medium // Mechanics of Solids. 2024. Vol. 59, no. 4. P. 2387–2394. DOI: 10.1134/S0025654424700316.

REFERENCES

- [1] Nowacki W. Theory of Asymmetric Elasticity. Oxford, New York, Toronto, Sydney, Paris, Frankfurt : Pergamon Press, 1986. viii+383 p.
- [2] Cosserat Eugène Maurice Pierre, Cosserat François. Théorie des corps déformables. Paris : A. Hermann et fils, 1909. VI+226 p.

- [3] Aero E. L., Kuvshinskii E. V. Fundamental equations of the theory of elastic media with rotationally interacting particles // Soviet Physics-Solid State. 1961. Vol. 2, no. 7. P. 1272–1281.
- [4] Pal'mov V. A. Fundamental equations of the theory of asymmetric elasticity // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 1964. Vol. 28, no. 3. P. 496–505.
- [5] Günther W. Zur Statik und Kinematik des Cosseratschen Kontinuums // Abh. Braunschweig. Wiss. Ges. 1958. Vol. 10. P. 195–213.
- [6] Neuber H. Über Probleme der Spannungskonzentration im Cosserat-Körper // Acta Mechanica. 1966. Vol. 2. P. 48–69. DOI: 10.1007/BF01176729.
- [7] Neuber H. On the general solution of linear-elastic problems in isotropic and anisotropic Cosserat continua // Applied Mechanics: Proceedings of the Eleventh International Congress of Applied Mechanics Munich (Germany) 1964 / Springer. 1966. P. 153–158. DOI: 10.1007/978-3-662-29364-5_16.
- [8] Neuber H. On the Effect of Stress Concentration in Cosserat Continua // Mechanics of Generalized Continua / Ed. by Ekkehart Kröner. Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 1968. P. 109–113.
- [9] Smith A. C. Waves in micropolar elastic solids // Int. J. Eng. Sci. 1967. Vol. 5. P. 741–746. DOI: 10.1016/0020-7225(67)90019-5.
- [10] Willson A. J. The micropolar elastic vibrations of a circular cylinder // International Journal of Engineering Science. 1972. Vol. 10, no. 1. P. 17–22. DOI: 10.1016/0020-7225(72)90071-7.
- [11] Achenbach J. Wave propagation in elastic solids. Amsterdam, London, New York : American Elsevier, 2012. 335 c.
- [12] Maugin G. A. Acceleration waves in simple and linear viscoelastic micropolar materials // International Journal of Engineering Science. 1974. Vol. 12, no. 2. P. 143–157. DOI: 10.1016/0020-7225(74)90013-5.
- [13] Murashkin E. V., Radayev Yu. N. Direct, inverse and mirror wave modes of coupled waves of displacements and microrotations in hemitropic micropolar media // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. IYa Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya. 2021. no. 2(48). P. 115–127. DOI: 10.37972/chgpu.2021.48.2.014.
- [14] Murashkin E. V., Radayev Yu. N. Thermal and athermal plane harmonic waves in an acentric isotropic solid // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. IYa Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya. 2023. no. 2(56). P. 99–107. DOI: 10.37972/chgpu.2023.56.2.010.
- [15] Murashkin E. V., Stadnik N. E. Compatibility conditions in continua with microstructure // MATEC Web of Conferences. 2017. Vol. 95. P. 12001. DOI: 10.1051/mateconf/20179512001.
- [16] Murashkin E. V., Radayev Y. N. On a classification of weak discontinuities in micropolar thermoelasticity // Materials Physics and Mechanics. 2015. Vol. 23, no. 1. P. 10–13. DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-1-79-89.
- [17] Kovalev V. A., Murashkin E. V., Radaev Yu. N. Mathematical theory of coupled plane harmonic thermoelastic waves in micropolar continua of the first type // Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya Matematika. Mekhanika. Informatika. 2014. Vol. 14, no. 1. P. 77–87. DOI: 10.18500/1816-9791-2014-14-1-77-87.
- [18] Kovalev V. A., Murashkin E. V., Radayev Y. N. On weak discontinuities and jump equations on wave surfaces in micropolar thermoelastic continua // Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya Matematika. Mekhanika. Informatika. 2015. Vol. 15, no. 1. P. 79–89. DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-1-79-89.

- [19] Radaev Y. N. The multiplier rule in covariant formulations of micropolar theories of continuum mechanics // *Vestn. Sam. gos. tekhn. un-ta. Ser. Fiz.-mat. nauki*. 2018. Vol. 22. P. 504–517. DOI: 10.14498/vsgtu1635.
- [20] Radaev Y. N., Murashkin E. V. Pseudotensor formulation of the mechanics of hemitropic micropolar media // *Problems of strength and ductility*. 2020. Vol. 82, no. 4. P. 399–412. DOI: 10.32326/1814-9146-2020-82-4-399-412.
- [21] Murashkin E. V., Radaev Yu. N. On a micropolar theory of growing solids // *Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences*. 2020. Vol. 24, no. 3. P. 424–444. DOI: 10.14498/vsgtu1792.
- [22] Murashkin E. V., Radaev Yu. N. On theory of linear hemitropic micropolar media // *Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. IYa Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya*. 2020. no. 4. P. 16–24. DOI: 10.37972/chgpu.2020.89.81.031.
- [23] Murashkin E. V., Radaev Y. N. Coupled Thermoelasticity of Hemitropic Media. Pseudotensor Formulation // *Mechanics of Solids*. 2023. Vol. 58, no. 3. P. 802–813. DOI: 10.3103/s0025654423700127.
- [24] Murashkin E. V., Radaev Yu. N. On the polyvariance of the basic equations of coupled thermoelasticity of a micropolar solid // *Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. IYa Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya*. 2023. no. 3(57). P. 112–128. DOI: 10.37972/chgpu.2023.57.3.010.
- [25] Murashkin E. V., Radaev Yu. N. Multiweight thermomechanics of hemitropic micropolar solids // *Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. IYa Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya*. 2023. no. 4(58). P. 86–120. DOI: 10.37972/chgpu.2023.58.4.010.
- [26] Murashkin E. V., Radaev Y. N. Heat transfer in anisotropic micropolar solids // *Mechanics of Solids*. 2023. Vol. 58, no. 9. P. 3111–3119. DOI: 10.3103/S0025654423700255.
- [27] Murashkin E. V., Radaev Y. N. On Algebraic Triple Weights Formulation of Micropolar Thermoelasticity // *Mechanics of Solids*. 2024. Vol. 59, no. 1. P. 555–580. DOI: 10.1134/s0025654424700274.
- [28] Murashkin E. V., Radaev Y. N. Coupled Harmonic Thermoelastic Waves in an Ultrahemitropic Micropolar Medium // *Mechanics of Solids*. 2024. Vol. 59, no. 5. P. ??
- [29] Murashkin E. V., Radaev Y. N. Coupled Harmonic Plane Waves in a Semi-Isotropic Thermoelastic Medium // *Mechanics of Solids*. 2024. Vol. 59, no. 4. P. 2387–2394. DOI: 10.1134/S0025654424700316.
- [30] Murashkin E. V., Radaev Y. N. Волновые числа гармонических плоских волн трансляционных и спинорных перемещений в полуизотропной термоупругой среде // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*. 2024. Т. 28, № 3. С. 445–461. DOI: 10.14498/vsgtu2087.