

Д. К. Андрейченко, М. С. Портенко, Е. Ю. Крылова

УТОЧНЕННАЯ МОДЕЛЬ ПЛАВАЮЩЕЙ ГИРОСТАБИЛИЗИРОВАННОЙ ПЛАТФОРМЫ

*Саратовский национальный исследовательский государственный университет
имени Н. Г. Чернышевского, Саратов, Россия*

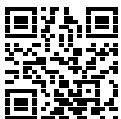
Аннотация. Предложена математическая модель пространственной гироскопической системы угловой стабилизации плавающей платформы в сферической камере с гидродинамическими двигателями стабилизации. Исследован вопрос выбора параметров плавающей гиростабилизированной платформы.

Ключевые слова: гироскопические системы угловой стабилизации, комбинированные динамические системы.

Андрейченко Дмитрий Константинович, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математического обеспечения вычислительных комплексов и информационных систем; e-mail: andreichenkodk@gmail.com; <https://orcid.org/0000-0003-0525-984X>; AuthorID: 63805

Портенко Марина Сергеевна, старший преподаватель кафедры информатики и программирования; e-mail: msportenko@gmail.com; <https://orcid.org/0000-0002-3946-6655>; AuthorID: 683964

Крылова Екатерина Юрьевна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической теории упругости и биомеханики; e-mail: kat.krylova@bk.ru; <https://orcid.org/0000-0002-7593-0320>; AuthorID: 722982



для цитирования: Андрейченко Д. К., Портенко М. С., Крылова Е. Ю. Уточненная модель плавающей гиростабилизированной платформы // Вестник Чувашиского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2025. № 1(63). С. 40–51. DOI: 10.37972/chgpu.2025.63.1.001. EDN: VKZNGM

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0).

D. K. Andreichenko, M. S. Portenko, E. Yu. Krylova

REFINED MODEL OF A FLOATING GYROSTABILIZED PLATFORM

I. Saratov State University, Saratov, Russia

Abstract. A mathematical model of a spatial gyroscopic angular stabilization system for a floating platform in a spherical chamber with hydrodynamic stabilization engines is proposed. The issue of choosing the parameters of a floating gyrostabilized platform is investigated.

Keywords: gyroscopic angular stabilization systems, hybrid dynamic systems

Dmitry K. Andreichenko, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor; e-mail: andreichenkodk@gmail.com;

<https://orcid.org/0000-0003-0525-984X>; AuthorID: 63805

Marina S. Portenko, Senior lecturer; e-mail: msportenکو@gmail.com; <https://orcid.org/0000-0002-3946-6655>; AuthorID: 683964;

Ekaterina Yu. Krylova, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor; e-mail: mail2@mail.ru;

<https://orcid.org/0000-0002-7593-0320>; AuthorID: 722982



to cite this article: Andreichenko D. K., Portenko M. S., Krylova E. Yu. Refined model of a floating gyrostabilized platform // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2025. No 1(63). p. 40–51. DOI: 10.37972/chgpu.2025.63.1.001

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение. Известно [1] описание трехосной системы угловой стабилизации плавающей сферической платформы в сферической камере с электрическими двухфазными индукционными двигателями стабилизации. Выбор оптимальных параметров подобных устройств имеет существенное значение для решения задач инерциальной навигации [2]. В работе [3] показана необходимость учета влияния сил инерции в поддерживающем слое вязкой несжимаемой жидкости. Выбор параметров модели гироскопического стабилизатора со сферической плавающей платформой может быть выполнен аналогично работе [4], где выполнен динамический анализ модели гироскопического стабилизатора со сферической плавающей платформой. Следовательно, актуальна задача построения математической модели и выбора параметров плавающей гиросtabilизированной платформы с учетом влияния сил инерции в поддерживающем слое.

1. Конструктивная схема платформы. Пусть система координат $Oxyz$ связана (рис. 1) со сферической платформой с радиусом сферической поверхности R . Центр плавающий в вязкой несжимаемой жидкости платформы совпадает с центром сферической камеры с радиусом $R + \delta$, $\delta \ll R$, где δ есть радиальный зазор между сферическими поверхностями камеры и платформы. Внутри платформы установлены поплавковые интегрирующие гироскопы (ПИГ) и турбонасос. Турбонасос непрерывно прокачивает потоки вязкой несжимаемой жидкости через подключенные по дифференциальной схеме рабочие каналы гидродинамических двигателей стабилизации (ГДС). Длина каждого канала $\ell = \pi R/4$, ширина $b = 2\vartheta_b R$, глубина $h \ll b$. Оси чувствительности ПИГ совпадают с осями системы координат $Oxyz$, а оси прецессии ПИГ перпендикулярны этим осям.

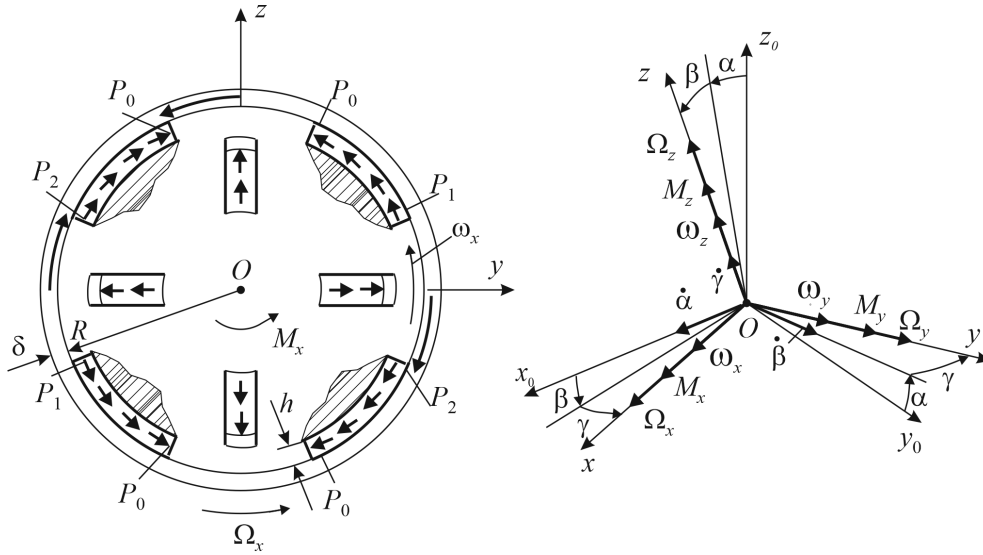


Рис. 1. Конструктивная схема платформы

Пусть при времени $t \leq 0$ система координат $Oxyz$ совпадает с некоторой невращающейся относительно инерциального пространства системой координат $Ox_0y_0z_0$, и корпус, содержащий сферическую камеру, также неподвижен относительно $Ox_0y_0z_0$. Поворот системы координат $Oxyz$ относительно $Ox_0y_0z_0$ характеризуется углами α, β, γ и ортогональной матрицей

$$\begin{aligned} A &= A(\alpha, \beta, \gamma) = [A_{kj}], \quad k, j = 1, 2, 3, \quad A_{11} = \cos \beta \cos \gamma, \quad A_{12} = -\cos \beta \sin \gamma \\ A_{13} &= \sin \beta, \quad A_{21} = \cos \alpha \sin \gamma + \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma, \quad A_{22} = \cos \alpha \cos \gamma - \\ & - \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma, \quad A_{23} = -\sin \alpha \cos \beta, \quad A_{31} = \sin \alpha \sin \gamma - \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma \\ A_{32} &= \sin \alpha \cos \gamma + \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma, \quad A_{33} = \cos \alpha \cos \beta \end{aligned} \quad (1)$$

Абсолютные угловые скорости внешней и внутренней сфер $\Omega = (\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z)^T = A^T(\alpha, \beta, \gamma)(\Omega_{x0}, \Omega_{y0}, \Omega_{z0})^T$ и $\omega = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)^T$. Внутренняя сфера характеризуется моментом инерции I , а с ее поверхностью связаны сферические системы координат $(r, \vartheta_j, \varphi_j)$, $j = 1, 2, 3$,

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= (x, y, z)^T = r \mathbf{e}_r, \quad \vartheta = \vartheta_1, \quad \varphi = \varphi_1, \quad \mathbf{e}_r = (\sin \vartheta \cos \varphi, \sin \vartheta \sin \varphi, \cos \vartheta)^T = \\ &= (\cos \vartheta_2, \sin \vartheta_2 \cos \varphi_2, \sin \vartheta_2 \sin \varphi_2)^T = (\sin \vartheta_3 \sin \varphi_3, \cos \vartheta_3, \sin \vartheta_3 \cos \varphi_3)^T \\ \mathbf{e}_{\vartheta} &= (\cos \vartheta \cos \varphi, \cos \vartheta \sin \varphi, -\sin \vartheta)^T, \quad \mathbf{e}_{\varphi} = (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0)^T \\ \mathbf{e}_{\vartheta_2} &= (-\sin \vartheta_2, \cos \vartheta_2 \cos \varphi_2, \cos \vartheta_2 \sin \varphi_2)^T, \quad \mathbf{e}_{\varphi_2} = (0, -\sin \varphi_2, \cos \varphi_2)^T \\ \mathbf{e}_{\vartheta_3} &= (\cos \vartheta_3 \sin \varphi_3, -\sin \vartheta_3, \cos \vartheta_3 \cos \varphi_3)^T, \quad \mathbf{e}_{\varphi_3} = (\cos \varphi_3, 0, -\sin \varphi_3)^T \end{aligned} \quad (2)$$

Пусть ρ, ν – плотность и кинематическая вязкость жидкости соответственно, $p, \mathbf{v} = v_r \mathbf{e}_r + v_{\vartheta_j} \mathbf{e}_{\vartheta_j} + v_{\varphi_j} \mathbf{e}_{\varphi_j}$ – давление в жидкости и скорость ее частиц. На внутреннюю сферу со стороны жидкости действует момент сил $\mathbf{M} = (M_x, M_y, M_z)^T$, $\mathbf{G}^{(m)} = (G_x^{(m)}, G_y^{(m)}, G_z^{(m)})^T$ – собственный кинетический момент роторов ПИГ и помпы, $\mathbf{M}^{(v)} = (M_x^{(v)}, M_y^{(v)}, M_z^{(v)})^T$ – вектор, учитывающий перенос момента импульса движущейся относительно входных и выходных поверхностей рабочих каналов жидкостью, $\mathbf{L}_s = (L_s \text{sign}(\Omega_x - \omega_x), L_s \text{sign}(\Omega_y - \omega_y), L_s \text{sign}(\Omega_z - \omega_z))^T$ – момент сил трения в электроконтактах. Турбонасосы поддерживают во входных камерах золотниковых переключателей постоянное давление $P_m = \text{const}$. В результате перепада давлений в золотниках с прямоугольными окнами ширины c и высоты a создаются давления $P_1^{(j)}, P_2^{(j)}$ на входах в рабочие каналы. Золотниковые переключатели характеризуются коэффициентом усиления k_u и постоянной времени T_u , а связанные с ними корректирующие устройства – постоянными времени τ_1, τ_2 . Положение заслонок золотниковых переключателей изменяется в зависимости от абсолютной угловой скорости ω внутренней сферы, измеряемой ПИГ с коэффициентом усиления k и постоянной времени T . Так как уравнения динамики вязкой несжимаемой жидкости [5] допускают редукцию давления, полагаем, что давление в выходных сечениях рабочих каналов $P_0 = 0$.

2. Модельные уравнения. При приведении к безразмерным переменным в качестве характерного пространственного размера, отсчитываемого «вдоль» слоя жидкости, выбираем величину R , а в качестве характерного пространственного размера, отсчитываемого «поперек» слоя жидкости, выбираем величину δ . Относительная толщина слоя жидкости $\psi = \delta/R \ll 1$. Характерные расход жидкости в рабочем канале и характерная скорость жидкости в слое между сферами суть $Q_{har} = S_0(2P_m/\rho)^{1/2}$, $V_{har} = Q_{har}/(R\delta) = ac(2P_m/\rho)^{1/2}/(2R\delta)$, тогда характерное время $T_{har} = R/V_{har} = 2R^2\delta(2P_m/\rho)^{-1/2}/(ac)$. Характерная величина угловых смещений внутренней сферы суть $\varepsilon = \rho R^4\delta/I \ll 1$. Золотниковый переключатель характеризуется безразмерным коэффициентом $k_s = ac/(2R\delta)$. Колебательное число Рейнольдса имеют вид $\sigma = \delta^2/(\nu T_{har})$. Размерные и безразмерные переменные, а также дифференциальные операторы Гамильтона связаны следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} h &= \delta h^*, r = Rr^*, r^* = 1 + \psi\xi, x = Rx^*, y = Ry^*, z = Rz^*, t = T_{har}t^*, \alpha = \varepsilon\alpha^* \\ \beta &= \varepsilon\beta^*, \alpha = \varepsilon\beta^*, \Omega = \Omega^*/T_{har}, \omega = \varepsilon\omega^*/T_{har}, \mathbf{v} = V_{har}\mathbf{v}^*, v_r = V_{har}\psi v_r^*, v_{\vartheta_j} = V_{har}v_{\vartheta_j}^* \\ v_{\varphi_j} &= V_{har}v_{\varphi_j}^*, p = \rho V_{har}^2 p^*, p_{rr} = \rho V_{har}^2 p_{rr}^*, p_{\vartheta_j\vartheta_j} = \rho V_{har}^2 p_{\vartheta_j\vartheta_j}^*, p_{\varphi_j\varphi_j} = \rho V_{har}^2 p_{\varphi_j\varphi_j}^* \\ p_{r\vartheta_j} &= \rho V_{har}^2 p_{r\vartheta_j}^*, p_{r\varphi_j} = \rho V_{har}^2 p_{r\varphi_j}^*, p_{\vartheta_j\varphi_j} = \rho V_{har}^2 p_{\vartheta_j\varphi_j}^*, \mathbf{M} = R^2\delta\rho V_{har}^2 \mathbf{M}^* \\ \mathbf{M}^{(v)} &= R^2\delta\rho V_{har}^2 \mathbf{M}^{(v)*}, \mathbf{G}^{(m)} = R^2\delta\rho V_{har}^2 \mathbf{G}^{(m)*}, L_s = R^2\delta\rho V_{har}^2 L_s^*, \nabla = \nabla^*/R \\ \nabla^* &= (\partial/\partial x^*, \partial/\partial y^*, \partial/\partial z^*)^T, u_j = au_j^*, w_1^{(j)} = \varepsilon kw_1^{(j)*}, w_2^{(j)} = \varepsilon kw_2^{(j)*}, j = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

Безразмерные постоянные времени ПИГ, корректирующего устройства и безразмерный коэффициент усиления суть $T^* = T/T_{har}$, $\tau_1^* = \tau_1/T_{har}$, $\tau_2^* = \tau_2/T_{har}$, $k_u^* = \varepsilon k k_u/a$. Далее полагаем, что символ $()^*$ над безразмерными переменными и параметрами везде далее опущен. После приведения к безразмерным переменным и параметрам уравнения движения внутренней сферы принимают вид

$$\begin{aligned} \omega_x &= \dot{\alpha} \cos(\varepsilon\gamma) \cos(\varepsilon\beta) + \dot{\beta} \sin(\varepsilon\gamma), \quad \omega_y = -\dot{\alpha} \sin(\varepsilon\gamma) \cos(\varepsilon\beta) + \dot{\beta} \cos(\varepsilon\gamma) \\ \omega_z &= \dot{\alpha} \sin(\varepsilon\beta) + \dot{\gamma}, \quad \Omega = (\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z)^T = A^T(\varepsilon\alpha, \varepsilon\beta, \varepsilon\gamma)(\Omega_{x0}, \Omega_{y0}, \Omega_{z0})^T \\ \dot{\omega} + \varepsilon\omega \times \mathbf{G}^{(m)} + \mathbf{M}^{(v)} &= \mathbf{M} + \mathbf{L}_s, \quad (\dot{}) = d()/dt \\ \mathbf{L}_s &= (L_s \text{sign}(\Omega_x - \varepsilon\omega_x), L_s \text{sign}(\Omega_y - \varepsilon\omega_y), L_s \text{sign}(\Omega_z - \varepsilon\omega_z))^T \end{aligned} \quad (3)$$

Им соответствуют начальные условия

$$\alpha|_{t=0} = \beta|_{t=0} = \gamma|_{t=0} = \omega|_{t=0} = 0 \quad (4)$$

В безразмерных переменных $\mathbf{r} = (x, y, z)^T = r\mathbf{e}_r$, $r = 1 + \psi\xi$, $\mathbf{v} = \psi v_r \mathbf{e}_r + v_{\vartheta_j} \mathbf{e}_{\vartheta_j} + v_{\varphi_j} \mathbf{e}_{\varphi_j}$, $j = 1, 2, 3$. При моделировании динамики поддерживающего слоя жидкости переходим к упрощенному уравнению несжимаемости и «укороченным» уравнениям Навье-Стокса [6], в которых отброшены малые величины

порядка $\underline{O}(\psi)$ и выше

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial v_r}{\partial \xi} + \frac{\partial v_{\vartheta_j}}{\partial \vartheta_j} + \frac{1}{\sin \vartheta_j} \frac{\partial v_{\varphi_j}}{\partial \varphi_j} + v_{\vartheta_j} \operatorname{ctg} \vartheta_j = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial \xi} = 0 \\
& \frac{\partial v_{\vartheta_j}}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_{\vartheta_j}}{\partial \xi} + v_{\vartheta_j} \frac{\partial v_{\vartheta_j}}{\partial \vartheta_j} + \frac{v_{\varphi_j}}{\sin \vartheta_j} \frac{\partial v_{\vartheta_j}}{\partial \varphi_j} - v_{\varphi_j}^2 \operatorname{ctg} \vartheta_j = -\frac{\partial p}{\partial \vartheta_j} + \frac{1}{\sigma} \frac{\partial^2 v_{\vartheta_j}}{\partial^2 \xi} + \\
& \quad + 2\varepsilon(\omega \cdot \mathbf{e}_r)v_{\varphi_j} - \varepsilon(\dot{\omega} \cdot \mathbf{e}_{\varphi_j}) \\
& \frac{\partial v_{\varphi_j}}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_{\varphi_j}}{\partial \xi} + v_{\vartheta_j} \frac{\partial v_{\varphi_j}}{\partial \vartheta_j} + \frac{v_{\varphi_j}}{\sin \vartheta_j} \frac{\partial v_{\varphi_j}}{\partial \varphi_j} + v_{\vartheta_j} v_{\varphi_j} \operatorname{ctg} \vartheta_j = -\frac{1}{\sin \vartheta_j} \frac{\partial p}{\partial \varphi_j} + \frac{1}{\sigma} \frac{\partial^2 v_{\varphi_j}}{\partial \xi^2} - \\
& \quad - 2\varepsilon(\omega \cdot \mathbf{e}_r)v_{\vartheta_j} + \varepsilon(\dot{\omega} \cdot \mathbf{e}_{\vartheta_j}), \quad j = 1, 2, 3
\end{aligned} \tag{5}$$

В качестве начальных условий для уравнений (5) задаются величины

$$v_{\vartheta_j}|_{t=0} = v_{\vartheta_j}^{(0)}, \quad v_{\varphi_j}|_{t=0} = v_{\varphi_j}^{(0)}, \quad j = 1, 2, 3$$

соответствующие равновесному состоянию, в котором $\dot{(\cdot)} = \partial(\cdot)/\partial t = 0$.

Граничные условия для уравнений (5) имеют вид

$$\begin{aligned}
& v_r|_{\xi=1} = 0, \quad v_{\vartheta_j}|_{\xi=1} = (\Omega - \varepsilon\omega) \cdot \mathbf{e}_{\varphi_j}, \quad v_{\varphi_j}|_{\xi=1} = -(\Omega - \varepsilon\omega) \cdot \mathbf{e}_{\vartheta_j}, \quad j = 1, 2, 3 \\
& v_r|_{S_1} = 0, \quad v_{\vartheta_j}|_{S_1} = 0, \quad v_{\varphi_j}|_{S_1} = 0 \\
& S_1 = \{\xi = 0, (\vartheta_j, \varphi_j) \notin S_0\} \cup \{\xi = -h, (\vartheta_j, \varphi_j) \in S_0\} \\
& S_0 = \left[\frac{\pi}{2} - \vartheta_b, \frac{\pi}{2} + \vartheta_b \right] \times \left(\left[\frac{\pi}{8} + \frac{\pi l}{2}, \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi l}{2} \right] \cup \left[-\frac{3\pi}{8} - \frac{\pi l}{2}, -\frac{\pi}{8} - \frac{\pi l}{2} \right] \right), \\
& \quad l = 0, 1, \quad j = 1, 2, 3 \\
& v_{\vartheta_j}|_{S_2} = 0, \quad S_2 = \{\vartheta_j = \pi/2 \pm \vartheta_b, (\xi, \varphi_j) \in [-h, 0] \times \\
& \quad \times \left(\left[\frac{\pi}{8} + \frac{\pi l}{2}, \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi l}{2} \right] \cup \left[-\frac{3\pi}{8} - \frac{\pi l}{2}, -\frac{\pi}{8} - \frac{\pi l}{2} \right] \right)\}, \quad l = 0, 1, \quad j = 1, 2, 3 \\
& p|_{S_3} = 0; \quad S_3 = \left\{ \varphi_j = \pm \frac{3\pi}{8}, \pm \frac{5\pi}{8}, \quad j = 1, 2, \quad \varphi_3 = \pm \frac{\pi}{8}, \pm \frac{7\pi}{8}, \right. \\
& \quad \left. (\xi, \vartheta_j) \in [-h, 0] \times \left[\frac{\pi}{2} - \vartheta_b, \frac{\pi}{2} + \vartheta_b \right] \right\}, \quad j = 1, 2, 3
\end{aligned} \tag{6}$$

Пусть

$$\begin{aligned}
& S_4 = \left\{ (\vartheta_j, \varphi_j) \in \left[\frac{\pi}{2} - \vartheta_b, \frac{\pi}{2} + \vartheta_b \right] \times \left(\left[\frac{\pi}{8} - \varphi_b, \frac{\pi}{8} \right] \cup \left[-\frac{\pi}{8}, \varphi_b - \frac{\pi}{8} \right] \cup \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \cup \left[\frac{7\pi}{8}, \frac{7\pi}{8} + \varphi_b \right] \cup \left[-\frac{7\pi}{8} - \varphi_b, -\frac{7\pi}{8} \right] \right) \right\}, \quad j = 1, 2 \Big\} \cup \left\{ (\vartheta_3, \varphi_3) \in \left[\frac{\pi}{2} - \vartheta_b, \frac{\pi}{2} + \vartheta_b \right] \times \right. \\
& \quad \left. \times \left(\left[\frac{3\pi}{8}, \frac{3\pi}{8} + \varphi_b \right] \cup \left[-\frac{3\pi}{8} - \varphi_b, -\frac{3\pi}{8} \right] \cup \left[\frac{5\pi}{8} - \varphi_b, \frac{5\pi}{8} \right] \cup \left[\varphi_b - \frac{5\pi}{8}, -\frac{5\pi}{8} \right] \right) \right\}
\end{aligned}$$

Вдоль входных сегментов рабочих каналов, которым соответствуют области $V_1 = \{\xi \in [-h, 0]\} \times \{(\vartheta_j, \varphi_j) \in S_4\}$, установлены тонкие продольные переборки,

что приводит к выполнению в объемах V_1 кинематических условий $v_{\vartheta_j} = 0$, $\partial v_{\varphi_j} / \partial \varphi_j = 0$. Из первого уравнения (5) и условий $v_r|_{\xi=-h} = v_r|_{\xi=0} = 0$ следует $v_r = 0$. При этом второе и четвертое уравнения (5) в объемах V_1 значительно упрощаются

$$\frac{\partial p}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial v_{\varphi_j}}{\partial t} = -\frac{1}{\sin \vartheta_j} \frac{\partial p}{\partial \varphi_j} + \frac{1}{\sigma} \frac{\partial^2 v_{\varphi_j}}{\partial \xi^2} + \varepsilon(\dot{\omega} \cdot \mathbf{e}_{\vartheta_j}), \quad j = 1, 2, 3 \quad (7)$$

Граничные условия для (7) имеют вид

$$\begin{aligned} v_{\varphi_j}|_{S_5} = v_{\varphi_j}|_{S_6} = 0, \quad S_5 = \{\xi = -h, (\vartheta_j, \varphi_j) \in S_4\}, S_6 = \{\xi = 0, (\vartheta_j, \varphi_j) \in S_4\} \\ p|_{S_7} = P_1^{(j)}, \quad S_7 = \{\varphi_j = \pi/8 - \varphi_b, -7\pi/8 - \varphi_b, j = 1, 2, \\ \varphi_3 = 5\pi/8 - \varphi_b, -3\pi/8 - \varphi_b, (\xi, \vartheta_j) \in [-h, 0] \times [\pi/2 - \vartheta_b, \pi/2 + \vartheta_b]\} \\ p|_{S_8} = P_2^{(j)}, \quad S_8 = \{\varphi_j = 7\pi/8 + \varphi_b, -\pi/8 + \varphi_b, j = 1, 2, \\ \varphi_3 = 3\pi/8 + \varphi_b, -5\pi/8 + \varphi_b, (\xi, \vartheta_j) \in [-h, 0] \times [\pi/2 - \vartheta_b, \pi/2 + \vartheta_b]\} \end{aligned} \quad (8)$$

Граничные условия на противоположных сторонах I и II границы S_9 объема V_1 , через которую в рабочие каналы втекает жидкость, имеют вид

$$\begin{aligned} v_{\varphi_j}|_{S_{9,I}} = v_{\varphi_j}|_{S_{9,II}}, \quad p|_{S_{9,I}} = p|_{S_{9,II}}, \quad j = 1, 2, 3, \quad S_9 = \{\varphi_j = \pm\pi/8, \pm 7\pi/8, j = 1, 2, \\ \varphi_3 = \pm 3\pi/8, \pm 5\pi/8, (\xi, \vartheta_j) \in [-h, 0] \times [\pi/2 - \vartheta_b, \pi/2 + \vartheta_b], j = 1, 2, 3\} \end{aligned} \quad (9)$$

Расходы жидкости на «входных» поверхностях входных сегментов рабочих каналов и «выходных» поверхностях рабочих каналов суть

$$\begin{aligned} Q_1^{(j)} &= \int_{-h}^0 \int_{\pi/2-\vartheta_b}^{\pi/2+\vartheta_b} v_{\varphi_j} d\xi d\vartheta, \quad \varphi_j = \frac{\pi}{8} - \varphi_b, -\frac{7\pi}{8} - \varphi_b, j = 1, 2, \varphi_3 = \frac{5\pi}{8} - \varphi_b, \\ &\quad -\frac{3\pi}{8} - \varphi_b; \quad Q_2^{(j)} = \int_{-h}^0 \int_{\pi/2-\vartheta_b}^{\pi/2+\vartheta_b} v_{\varphi_j} d\xi d\vartheta, \quad \varphi_j = \frac{7\pi}{8} + \varphi_b, -\frac{\pi}{8} + \varphi_b, j = 1, 2, \\ &\quad \varphi_3 = \frac{3\pi}{8} + \varphi_b, -\frac{5\pi}{8} + \varphi_b; \quad Q_{1,0}^{(j)} = \int_{-h}^0 \int_{\pi/2-\vartheta_b}^{\pi/2+\vartheta_b} v_{\varphi_j} d\xi d\vartheta, \quad \varphi_j = \frac{3\pi}{8}, -\frac{5\pi}{8}, j = 1, 2, \\ &\quad \varphi_3 = -\frac{\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}; \quad Q_{2,0}^{(j)} = \int_{-h}^0 \int_{\pi/2-\vartheta_b}^{\pi/2+\vartheta_b} v_{\varphi_j} d\xi d\vartheta, \quad \varphi_j = \frac{5\pi}{8}, -\frac{3\pi}{8}, j = 1, 2, \varphi_3 = \frac{\pi}{8}, -\frac{7\pi}{8} \\ &\quad \sum_{j=1}^3 (Q_1^{(j)} + Q_2^{(j)}) = \sum_{j=1}^3 (Q_{1,0}^{(j)} + Q_{2,0}^{(j)}) \end{aligned} \quad (10)$$

Вектор скорости переноса момента импульса за счет движения жидкости относительно входных и выходных поверхностей рабочих каналов имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^{(v)} = (M_x^{(v)}, M_y^{(v)}, M_z^{(v)})^T = & 2 \sum_{j=1}^2 \int_{-h}^0 d\xi \int_{\pi/2-\vartheta_b}^{\pi/2+\vartheta_b} d\vartheta_j [\mathbf{M}_{\varphi_j}^{(v)} \Big|_{\varphi_j=\pi/8-\varphi_b} - \\ & - \mathbf{M}_{\varphi_j}^{(v)} \Big|_{\varphi_j=3\pi/8} - \mathbf{M}_{\varphi_j}^{(v)} \Big|_{\varphi_j=7\pi/8+\varphi_b} + \mathbf{M}_{\varphi_j}^{(v)} \Big|_{\varphi_j=5\pi/8}] + \\ & + 2 \int_{-h}^0 d\xi \int_{\pi/2-\vartheta_b}^{\pi/2+\vartheta_b} d\vartheta_3 [\mathbf{M}_{\varphi_3}^{(v)} \Big|_{\varphi_3=-3\pi/8-\varphi_b} - \mathbf{M}_{\varphi_3}^{(v)} \Big|_{\varphi_3=-\pi/8} - \mathbf{M}_{\varphi_3}^{(v)} \Big|_{\varphi_3=3\pi/8+\varphi_b} + \\ & + \mathbf{M}_{\varphi_3}^{(v)} \Big|_{\varphi_3=\pi/8}], \quad \mathbf{M}_{\varphi_j}^{(v)} = (\varepsilon\omega - \varepsilon(\omega \cdot \mathbf{e}_r)\mathbf{e}_r + v_{\vartheta_j}\mathbf{e}_{\varphi_j} - v_{\varphi_j}\mathbf{e}_{\vartheta_j})v_{\varphi_j}, j = 1, 2, 3 \quad (11) \end{aligned}$$

Момент сил, действующих со стороны слоя жидкости на сферическую платформу, с точностью до $\underline{O}(\varepsilon\psi_b) \ll 1$ определяется выражением

$$\begin{aligned} \mathbf{M} = (M_x, M_y, M_z)^T = & 4h\vartheta_b(P_2^{(2)} - P_1^{(2)}, P_2^{(3)} - P_1^{(3)}, P_2^{(1)} - P_1^{(1)})^T + \int_{S_{10}} \mathbf{M}_r|_{\xi=0} dS + \\ & + 2 \sum_{j=1}^2 \int_{\pi/2-\vartheta_b}^{\pi/2+\vartheta_b} \sin \vartheta_j d\vartheta_j \left(\int_{\pi/8-\varphi_b}^{3\pi/8} \mathbf{M}_r|_{\xi=-h} d\varphi_j + \int_{5\pi/8}^{7\pi/8+\varphi_b} \mathbf{M}_r|_{\xi=-h} d\varphi_j \right) + \\ & + 2 \int_{\pi/2-\vartheta_b}^{\pi/2+\vartheta_b} \sin \vartheta_3 d\vartheta_3 \left(\int_{\pi/8}^{3\pi/8+\varphi_b} \mathbf{M}_r|_{\xi=-h} d\varphi_3 + \int_{5\pi/8-\varphi_b}^{7\pi/8} \mathbf{M}_r|_{\xi=-h} d\varphi_3 \right) - \\ & - 2h \cos \vartheta_b \sum_{j=1}^2 \left[\int_{\pi/8-\varphi_b}^{3\pi/8} ((p\mathbf{e}_{\varphi_j})|_{\vartheta_j=-\vartheta_b+\pi/2} - (p\mathbf{e}_{\varphi_j})|_{\vartheta_j=\vartheta_b+\pi/2}) d\varphi_j + \right. \\ & \quad \left. + \int_{5\pi/8}^{7\pi/8+\varphi_b} ((p\mathbf{e}_{\varphi_j})|_{\vartheta_j=-\vartheta_b+\pi/2} - (p\mathbf{e}_{\varphi_j})|_{\vartheta_j=\vartheta_b+\pi/2}) d\varphi_j \right] - \\ & - 2h \cos \vartheta_b \left[\int_{\pi/8}^{3\pi/8+\varphi_b} ((p\mathbf{e}_{\varphi_3})|_{\vartheta_3=-\vartheta_b+\pi/2} - (p\mathbf{e}_{\varphi_3})|_{\vartheta_3=\vartheta_b+\pi/2}) d\varphi_3 + \right. \\ & \quad \left. + \int_{5\pi/8-\varphi_b}^{7\pi/8} ((p\mathbf{e}_{\varphi_3})|_{\vartheta_3=-\vartheta_b+\pi/2} - (p\mathbf{e}_{\varphi_3})|_{\vartheta_3=\vartheta_b+\pi/2}) d\varphi_3 \right] - \\ & - 2 \sum_{j=1}^2 \int_{\pi/2-\vartheta_b}^{\pi/2+\vartheta_b} \sin \vartheta_j d\vartheta_j \left(\int_{\pi/8-\varphi_b}^{\pi/8} \mathbf{M}_r|_{\xi=0} d\varphi_j + \int_{7\pi/8}^{7\pi/8+\varphi_b} \mathbf{M}_r|_{\xi=0} d\varphi_j \right) - \\ & - 2 \int_{\pi/2-\vartheta_b}^{\pi/2+\vartheta_b} \sin \vartheta_3 d\vartheta_3 \left(\int_{3\pi/8}^{3\pi/8+\varphi_b} \mathbf{M}_r|_{\xi=0} d\varphi_3 + \int_{5\pi/8-\varphi_b}^{5\pi/8} \mathbf{M}_r|_{\xi=0} d\varphi_3 \right) \\ \mathbf{M}_r = (1/\sigma)(\mathbf{e}_{\varphi_j} \partial v_{\vartheta_j} / \partial \xi - \mathbf{e}_{\vartheta_j} \partial v_{\varphi_j} / \partial \xi), S_{10} = \{\xi = 0, (\vartheta_j, \varphi_j) \notin S_0\}, j = 1, 2, 3 \quad (12) \end{aligned}$$

В (11), (12) $\mathbf{M}_{\varphi_j}^{(v)}$, $\mathbf{M}_r$ и $\mathbf{e}_{\varphi_j}$ проектируются на оси системы координат $Oxyz$. Связь перепадов давлений в золотниковых переключателях с расходами жидкости и управляющими перемещениями u_j золотниковых поясков имеет вид

$$1 - k_s^2 P_1^{(j)} = (Q_1^{(j)} / (1 + u_j))^2, \quad 1 - k_s^2 P_2^{(j)} = (Q_2^{(j)} / (1 - u_j))^2 \quad (13)$$

$$P_1^{(j)} \Big|_{t=0} = P_2^{(j)} \Big|_{t=0} = P_j, \quad Q_1^{(j)} \Big|_{t=0} = Q_2^{(j)} \Big|_{t=0} = Q_0^{(j)}, \quad 1 - k_s^2 P_j = (Q_0^{(j)})^2, \quad j = 1, 2, 3$$

Выходной сигнал ПИГ $w_1^{(j)}$, $j = 1, 2, 3$ связан с измеряемой компонентой угловой скорости $\omega = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)^T$, выходным сигналом корректирующего устройства $w_2^{(j)}$, $j = 1, 2, 3$ и далее с управляющими перемещениями u_j , $j = 1, 2, 3$ золотниковых поясков уравнениями

$$T\ddot{w}_1^{(1)} + \dot{w}_1^{(1)} = \omega_z, \quad T\ddot{w}_1^{(2)} + \dot{w}_1^{(2)} = \omega_x, \quad T\ddot{w}_1^{(3)} + \dot{w}_1^{(3)} = \omega_y \quad (14)$$

$$\tau_2 \dot{w}_2^{(j)} + w_2^{(j)} = \tau_1 \dot{w}_1^{(j)} + w_1^{(j)}, \quad T_u \dot{u}_j + u_j = k_u w_2^{(j)}, \quad j = 1, 2, 3$$

$$u_j \Big|_{t=0} = w_1^{(j)} \Big|_{t=0} = \dot{w}_1^{(j)} \Big|_{t=0} = w_2^{(j)} \Big|_{t=0} = 0, \quad j = 1, 2, 3 \quad (15)$$

Математическая модель (1)-(15) представляет связанную систему обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных, т.е. представляет собой комбинированную динамическую систему (КДС). Компонентами входной вектор-функции КДС являются проекции абсолютной угловой скорости внешней сферы на оси системы координат $Ox_0y_0z_0$, т.е. $\Omega_{x0}(t)$, $\Omega_{y0}(t)$, $\Omega_{z0}(t)$. Компонентами выходной вектор-функции КДС служат углы поворота внутренней сферы относительно инерциальной системы координат $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$. Параметрами обратных связей служит набор величин $\mathbf{p} = (\tau_1, \tau_2, k_u)^T$.

3. Упрощение модели поддерживающего слоя. Дальнейшее упрощение модели связано с тем, что движение жидкости в рабочем канале подобно прямолинейно-параллельному движению жидкости между двумя параллельными стенками, и наибольшее влияние оказывают перетекания жидкости между рабочими каналами при одинаковых j . В этом случае уравнение несжимаемости и «укороченные» уравнения Навье-Стокса (5) значительно упрощаются и принимают вид, аналогичный (7). Дальнейшее применение одностороннего интегрального преобразования Лапласа по времени $\tilde{f}(\lambda) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty f(t)e^{-\lambda t} dt$ позволяет получить передаточные функции $\Phi_\Omega(\lambda, \mathbf{p})$ и $\Phi_S(\lambda, \mathbf{p})$, связывающие изображения Лапласа входной и выходной вектор-функций

$$(\tilde{\alpha}(\lambda), \tilde{\beta}(\lambda), \tilde{\gamma}(\lambda))^T = \Phi_\Omega(\lambda, \mathbf{p})(\tilde{\Omega}_x(\lambda), \tilde{\Omega}_y(\lambda), \tilde{\Omega}_z(\lambda))^T +$$

$$+ \Phi_S(\lambda, \mathbf{p}) L_s \mathcal{L}[(\text{sign } \Omega_x(t), \text{sign } \Omega_y(t), \text{sign } \Omega_z(t))^T]$$

Далее удобно привести явные выражения передаточных функции после обратного перехода к размерным физическим параметрам гиросtabilизированной платформы ($\mu = \rho\nu$ – динамическая вязкость жидкости)

$$\begin{aligned}
\Phi_\Omega(\lambda, \mathbf{p}) &= Q_\Omega(\lambda)/D(\lambda), \quad \Phi_S(\lambda, \mathbf{p}) = Q(\lambda)/D(\lambda), \quad Q_\Omega(\lambda) = \Pi_\Omega(\lambda)Q(\lambda) \\
D(\lambda) &= ITT_u\tau_2\lambda^5 + I[T_u\tau_2 + T(T_u + \tau_2)]\lambda^4 + \{I(T_u + \tau_2)\Pi_\omega(\lambda)[T_u\tau_2 + \\
&+ T(T_u + \tau_2)]\}\lambda^3 + [I + \Pi_\omega(\lambda)(T_u + \tau_2)]\lambda^2 + [\Pi_\omega(\lambda) + \Pi_L(\lambda)k_uk\tau_1]\lambda + \Pi_L(\lambda)k_uk, \\
Q(\lambda) &= TT_u\tau_2\lambda^3 + [T_u\tau_2 + T(T_u + \tau_2)]\lambda^2 + (T_u + \tau_2)\lambda + 1 \\
\Pi_\Omega(\lambda) &= \left[\frac{8}{3}\pi\mu R^4\left(1 - \frac{3b}{4R}\right)\varphi_2(\lambda) + 4RbhS_1(\lambda)\Pi_3(\lambda)\left(1 - \frac{\Pi_5(\lambda)}{Rb\psi_1(\lambda)}\right) + \right. \\
&+ 4\mu b\ell R^2 S_2(\lambda)\left(1 + \frac{\delta}{R}\right), \quad \Pi_\omega(\lambda) = \frac{8}{3}\pi\mu R^4\left(1 - \frac{3b}{4R}\right)\varphi_3(\lambda) + \\
&+ \left[4\mu R^2 b\ell S_3(\lambda) - 4bhRS_1(\lambda)\Pi_3(\lambda)\left(1 - \frac{\Pi_5(\lambda)}{Rb\psi_1(\lambda)}\right)\right]\left(1 - \frac{h}{R}\right) \\
\psi_1(\lambda) &= \left(\frac{\nu}{\lambda}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\text{ch}\left(\frac{(h+\delta)\sqrt{\lambda/\nu}}{\text{sh}\left((h+\delta)\sqrt{\lambda/\nu}\right)}\right) - 1}{\text{sh}\left((h+\delta)\sqrt{\lambda/\nu}\right)}, \quad \varphi_2(\lambda) = \frac{(\lambda/\nu)^{1/2}}{\text{sh}\left(\delta\sqrt{\lambda/\nu}\right)}, \quad \varphi_3(\lambda) = \left(\frac{\lambda}{\nu}\right)^{1/2} \frac{\text{ch}\left(\delta\sqrt{\lambda/\nu}\right)}{\text{sh}\left(\delta\sqrt{\lambda/\nu}\right)} \\
S_2(\lambda) &= \psi_2(\lambda) + \varphi_2(\lambda), \quad S_3(\lambda) = \psi_3(\lambda) + \varphi_3(\lambda)(1 - h/R)^{-1} \\
S_1(\lambda) &= 1 - \frac{\psi_1(\lambda) + \varphi_1(\lambda)}{h}, \quad \psi_2(\lambda) = \frac{\sqrt{\lambda/\nu}}{\text{sh}\left((h+\delta)\sqrt{\lambda/\nu}\right)}, \quad \varphi_1(\lambda) = \left(\frac{\nu}{\lambda}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\text{ch}\left(\delta\sqrt{\lambda/\nu}\right) - 1}{\text{sh}\left(\delta\sqrt{\lambda/\nu}\right)} \\
\Pi_3(\lambda) &= \frac{\mu\ell R\psi_1(\lambda)}{(h+\delta)\psi(\lambda)}\left(1 - \frac{1}{1+S(\lambda)}\right), \quad S(\lambda) = \frac{2b(h+\delta)}{Q_0\mu\ell}(P_m - P_0)\psi(\lambda)(1 - \zeta)^2 \\
\zeta &= \frac{6\nu a c \ell}{b(h+\delta)^3} \left[\frac{\rho}{2(P_m - P_0)}\right]^{1/2} - \frac{9\mu\nu(a c \ell)^2}{(P_m - P_0)b^2(h+\delta)^6} \\
\Pi_5(\lambda) &= \frac{\Pi_3(\lambda) + \mu\ell R\varphi_1(\lambda)/(2b\delta\varphi(\lambda))}{\Pi_2(\lambda) + \mu\ell/(2b\delta\varphi(\lambda))}, \quad \Pi_2(\lambda) = \frac{\mu\ell}{b(h+\delta)\psi(\lambda)}\left(1 - \frac{1}{1+S(\lambda)}\right) \\
\varphi(\lambda) &= \frac{\nu}{\lambda} - \frac{2}{\delta}\left(\frac{\nu}{\lambda}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{\text{ch}\left(\delta\sqrt{\lambda/\nu}\right) - 1}{\text{sh}\left(\delta\sqrt{\lambda/\nu}\right)}, \quad \psi(\lambda) = \frac{\nu}{\lambda} - \frac{2}{(h+\delta)}\left(\frac{\nu}{\lambda}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{\text{ch}\left(\frac{(h+\delta)\sqrt{\lambda/\nu}}{\text{sh}\left((h+\delta)\sqrt{\lambda/\nu}\right)}\right) - 1}{\text{sh}\left((h+\delta)\sqrt{\lambda/\nu}\right)}
\end{aligned}$$

Численное моделирование выходных функций выполнялось для физической модели гиросtabilизированной платформы с параметрами $R = 0.15$ м, $b = 3 \cdot 10^{-2}$ м, $h = 3 \cdot 10^{-4}$ м, $\delta = 10^{-4}$ м, $S_0 = (ac)/2 = 2 \cdot 10^{-6}$ м², $P_m = 27 \cdot 10^4$ Па, $\rho = 2 \cdot 10^3$ кг/м³, $Q_0 = 26.62 \cdot 10^{-6}$ м³/с (расход рабочей жидкости), $k = 2$, $T = 2 \cdot 10^{-3}$ с, $T_u = 3 \cdot 10^{-3}$ с, $I = 0.254$ кгм², $L_s = 10^{-3}$ Нм. Входное возмущение принято в виде $\Omega_{x0}(t) = 1(t)$, $\Omega_{y0}(t) = \Omega_{z0}(t) = 0$, где $1(t)$ – функция единичного скачка Хевисайда. Для улучшения качества выходных функций выполнялся выбор параметров обратных связей $\mathbf{p}$ на основе адаптивного алгоритма параметрического синтеза, аналогичного [7]. Данные на рис. 2а соответствуют параметрам обратных связей $\mathbf{p} = (4, 50, 1000)^T$ до выполнения параметрического синтеза. На рис. 2б показана переходная функция после применения адаптивного алгоритма параметрического синтеза, в результате чего найдены значения параметров обратных связей $\mathbf{p} = (9.841 \cdot 10^{-3}, 7.65 \cdot 10^{-9}, 790.7)^T$. В данном случае, максимальное значение угловой ошибки плавающей гиросtabilизированной платформы уменьшается примерно в 16 раз (≈ 1 угловая секунда), что приемлемо для систем инерциальной навигации.

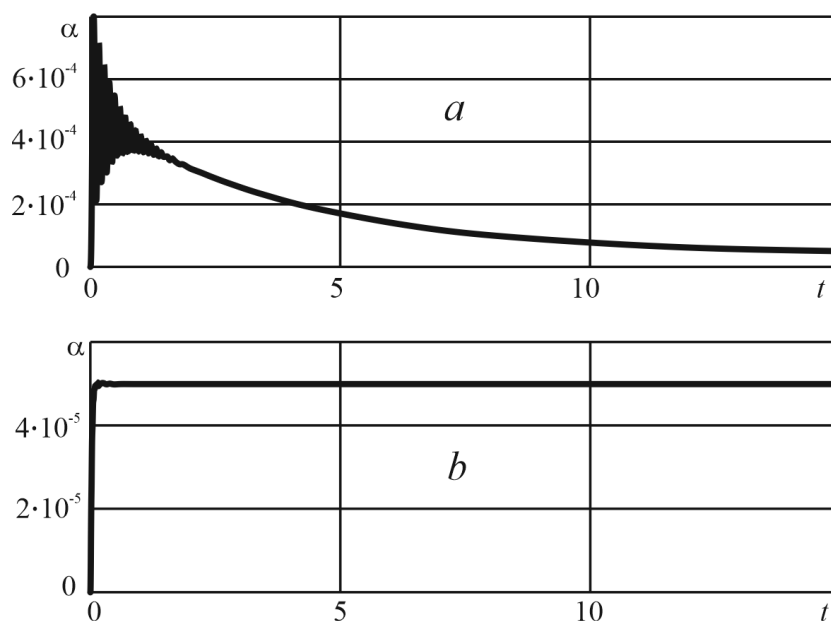


Рис. 2. Выходные функции

ДОПОЛНИТЕЛЬНО

Вклад авторов. Д. К. Андрейченко постановка задачи, написание текста рукописи, согласование финальной версии рукописи, М. С. Портенко проведение вычислительных экспериментов, Е. Ю. Крылова обзор литературы по теме статьи, редактирование текста рукописи.

Конфликт интересов. Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

Источник финансирования. Авторы заявляют об отсутствии внешнего финансирования при проведении исследования.

ADDITIONAL INFORMATION

Authors' contribution. D. K. Andreichenko setting the task, writing the text of the manuscript, approving the final version of the manuscript, M. S. Portenko conducting computational experiments, E. Yu. Krylova reviewing the literature on the topic of the article, editing the text of the manuscript.

Competing interests. The authors declare that they have no competing interests.

Funding. This study was not supported by any external sources of funding.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Александр Н. Миниатюрная поплавковая инерциальная платформа // Вопросы ракетной техники. 1970. № 5. С. 75–87.
- [2] Ишлинский А.Ю. Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация. Москва : Наука, 1986. 672 с.
- [3] Андрейченко К.П., Данилов Ю.И., С.Б. Шашкин. Динамика углового движения плавающей инерциальной платформы // Изв. ВУЗов. Приборостроение. 1985. Т. 18, № 1. С. 55–60.

- [4] Андрейченко Д.К., Андрейченко К.П. Динамический анализ и выбор параметров модели гироскопического интегратора линейных ускорений с плавающей платформой // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2008. № 4. С. 76–89.
- [5] Слезкин Н.А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. М. : ГИТТЛ, 1955. 519 с.
- [6] Андрейченко К.П. Динамика поплавковых гироскопов и акселерометров. М. : Машиностроение, 1987. 128 с.
- [7] Адаптивный алгоритм параметрического синтеза комбинированных динамических систем / Д.К. Андрейченко [и др.] // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 16. С. 465–475. DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-4-465-475.

REFERENCES

- [1] Alexander N. Miniature float inertial platform // Voprosy raketnoi tekhniki. 1970. no. 5. P. 75–87. (in Russian).
- [2] Ishlinskii A.Yu. Orientation, gyroscopes and inertial navigation. Moscow : Nauka, 1986. 672 p. (in Russian).
- [3] Andreichenko K. P., Danilov Yu. I., Shashkin S.B. Dynamics of angular motion of a floating inertial platform // Journal of Instrument Engineering. 1985. Vol. 18, no. 1. P. 55–60. (in Russian).
- [4] Andreichenko D. K., Andreichenko K. P. Dynamic analysis and choice of parameters of a model of gyroscopic integrator of linear ac-celerations with floating platform // Journal of computer and systems sciences international. 2008. Vol. 47, no. 4. P. 570–583.
- [5] Sliozkin N.A. Dynamics of a viscous incompressible fluid. Moscow : GITTL, 1955. 519 p. (in Russian).
- [6] Andreichenko K.P. Dynamics of float gyroscopes and accelerometers. Moscow : Mashinostroenie, 1987. 128 p. (in Russian).
- [7] Adaptive Algorithm of Parametric Synthesis of Hybrid Dynamical Systems / D. K. Andreichenko [et al.] // Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform. 2016. Vol. 16. P. 465–475. DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-4-465-475. (in Russian).