

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПЛАСТИЧНОСТИ ОРТОТРОПНЫХ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ В УСЛОВИЯХ НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОГО НАГРУЖЕНИЯ

¹Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана,
Москва, Россия

Аннотация. В работе представлена математическая модель, описывающая нелинейное деформирование ортотропных композиционных материалов в условиях неизотермического нагружения. Модель основана на термодинамическом подходе с внутренними параметрами состояния, позволяющими учесть влияние микроструктурных изменений материала. Определены количество, природа и кинетические соотношения внутренних параметров. Получены определяющие соотношения и уравнение теплопроводности, необходимые для постановки связанной краевой задачи термопластичности. В частном случае предложенная модель приведена к эндохронной теории термопластичности. Проведенные численные расчеты демонстрируют хорошее согласование с экспериментальными данными, что подтверждает эффективность и адекватность разработанной модели. Представленные подходы могут быть использованы при проектировании композитных конструкций, работающих в сложных термосиловых условиях. Таким образом, разработанная математическая модель позволяет улучшить предсказуемость механического поведения композиционных материалов и расширить возможности их применения в высокотехнологичных отраслях.

Ключевые слова: пластичность, термопластичность, эндохронная теория, термодинамика, внутренние параметры состояния, кинетические соотношения, композиционные материалы, неизотермическое нагружение, нелинейное деформирование, определяющие соотношения.

Зимин Владимир Николаевич, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой космических аппаратов и ракет носителей; e-mail: zimin@bmstu.ru; AuthorID: 493517

Рахимов Даниэль Рустамович, аспирант кафедры космических аппаратов и ракет носителей; e-mail: danrus1996@gmail.com; <https://orcid.org/0009-0008-6139-8485>; AuthorID: 1122169

Савельева Инга Юрьевна, доктор физико-математических наук, доцент, заведующая кафедрой прикладной математики; e-mail: inga.savelyeva@bmstu.ru; <https://orcid.org/0000-0001-7564-364X>; AuthorID: 617555



для цитирования: Зимин В. Н., Рахимов Д. Р., Савельева И. Ю. Математическая модель пластичности ортотропных композиционных материалов в условиях неизотермического нагружения // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2025. № 1(63). С. 52–64. DOI: 10.37972/chgpu.2025.63.1.005. EDN: PNHHDD

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0).

V. N. Zimin¹, D. R. Rakhimov¹, I. Yu. Savelyeva¹

MATHEMATICAL MODEL OF PLASTICITY FOR ORTHOTROPIC COMPOSITE MATERIALS UNDER NON-ISOTHERMAL LOADING CONDITIONS

¹*Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia*

Abstract. The article presents a mathematical model describing the nonlinear deformation of orthotropic composite materials under non-isothermal loading conditions. The model is based on a thermodynamic approach with internal state parameters, allowing for the consideration of microstructural changes in the material. The quantity, nature, and kinetic relationships of the internal parameters are defined. The governing equations and the heat conduction equation necessary for formulating a coupled thermoplastic boundary value problem have been derived. In a particular case, the proposed model is reduced to the endochronic theory of thermoplasticity. Numerical calculations demonstrate good agreement with experimental data, confirming the effectiveness and adequacy of the developed model. The proposed approaches can be utilized in the design of composite structures operating under complex thermo-mechanical conditions. Thus, the developed mathematical model enhances the predictability of the mechanical behavior of composite materials and expands their application potential in high-tech industries.

Keywords: Plasticity, thermoplasticity, endochronic theory, thermodynamics, internal state variables, kinetic relationships, composite materials, non-isothermal loading, nonlinear deformation, constitutive relations.

Vladimir N. Zimin, Doctor of Technical Sciences, Professor; e-mail: zimin@bmstu.ru; AuthorID: 493517

Daniel R. Rakhimov, Postgraduate Student; e-mail: danrus1996@gmail.com; <https://orcid.org/0009-0008-6139-8485>; AuthorID: 1122169

Inga Yu. Savelyeva, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor; e-mail: inga.savelyeva@bmstu.ru; <https://orcid.org/0000-0001-7564-364X>; AuthorID: 617555



to cite this article: Zimin V.N., Rakhimov D.R., Savelyeva I. Yu. Mathematical model of plasticity for orthotropic composite materials under non-isothermal loading conditions // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2025. No 1(63). p. 52–64. DOI: 10.37972/chgpu.2025.63.1.005

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение. Термопластичность композиционных материалов является одной из ключевых областей исследования в современной механике материалов. Композиционные материалы обладают уникальными свойствами, такими как высокая прочность, жесткость и устойчивость к коррозии, что делает их незаменимыми во многих отраслях. Однако сложная структура этих материалов требует специальных теоретических подходов для точного описания их механического поведения при неизотермическом нагружении за пределами упругости.

Существуют различные теории для моделирования нелинейного деформирования композиционных материалов [1–7]. В данной работе предложен вариант математической модели пластичности, основанный на термодинамическом подходе с внутренними параметрами состояния [8–10], которые введены для описания микроструктуры материала, скрытой от внешнего наблюдателя, такой как микротрещины, микроразрушения, дислокации и др. В частном случае определяющие соотношения приведены к соотношениям эндохронной теории термопластичности [11, 12].

1. Термодинамика неравновесных процессов с внутренними параметрами состояния. Для построения модели пластичности при неизотермическом нагружении используем термодинамический подход с внутренними параметрами состояния, опираясь на результаты работ [5, 7–10, 12]. Запишем закон сохранения энергии в дифференциальной форме, а второй закон термодинамики представим в виде неравенства Клазиуса-Дюгема [8]:

$$\rho T \frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{\partial q_i}{\partial x_i} + q_V + \delta_D, \quad \rho T \frac{\partial h}{\partial t} \geq -\frac{\partial q_i}{\partial x_i} + \frac{1}{T} q_i \frac{\partial T}{\partial x_i} + q_V, \quad (1)$$

где ρ — плотность; T — абсолютная температура; h — массовая плотность энтропии; $\frac{\partial}{\partial t} \equiv (\cdot) \equiv \frac{d}{dt}$; t — время; q_i — компоненты вектора плотности теплового потока $\mathbf{q}$; x_i — пространственные координаты точки; q_V — объемная плотность мощности тепловых источников (стоков) теплоты; $\delta_D = \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ji} - \rho \left(\frac{\partial A}{\partial t} + h \frac{\partial T}{\partial t} \right)$ — диссипативная функция; $i, j = 1, 2, 3$; σ_{ij} — компоненты тензора напряжений; ε_{ij} — компоненты тензора малой деформации; A — массовая плотность свободной энергии Гельмгольца.

Предположим, что состояние рассматриваемой сплошной среды в окрестности любой точки пространства может быть описано с помощью четырех термодинамических функций: массовых плотностей свободной энергии A и энтропии h , тензора напряжений $\hat{\sigma}$, а также вектора плотности теплового потока $\mathbf{q}$ [5]. Аргументами данных функций будем считать следующие реактивные переменные: тензор малой деформации $\hat{\varepsilon}$, абсолютную температуру T и тензорные внутренние параметры состояния с компонентами $\chi_{ij}^{(\alpha)} = \chi_{ij}^{(\alpha)}(\varepsilon_{kl}, T)$, где $\alpha = 1, \dots, N$, а N — количество внутренних параметров, $k, l = 1, 2, 3$. Тогда из системы (1), в

соответствии с необходимыми и достаточными условиями реализуемости термомеханического процесса, получаем [8]

$$\sigma_{ij} = \rho \frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}, \quad h = -\frac{\partial A}{\partial T}, \quad -\rho \sum_{\alpha=1}^N \frac{\partial A}{\partial \chi_{ij}^{(\alpha)}} \dot{\chi}_{ij}^{(\alpha)} - \frac{1}{T} q_i \frac{\partial T}{\partial x_i} \geq 0. \quad (2)$$

Пусть компоненты тензора деформации ε_{ij} и внутренних параметров состояния $\chi_{ij}^{(\alpha)}$ малы ($\|\varepsilon_{ij}\| \ll 1$ и $\|\chi_{ij}^{(\alpha)}\| \ll 1$). Тогда разложим объемную плотность свободной энергии $\rho A(\varepsilon_{ij}, T, \chi_{ij}^{(\alpha)})$ в ряд по формуле Тейлора относительно этих переменных, ограничившись квадратичными членами:

$$\begin{aligned} \rho A(\varepsilon_{ij}, T, \chi_{ij}^{(\alpha)}) = & \rho A(0, T, 0) + \rho \left(\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}} \right)_{0,T,0} \varepsilon_{ij} + \rho \sum_{\alpha=1}^N \left(\frac{\partial A}{\partial \chi_{ij}^{(\alpha)}} \right)_{0,T,0} \chi_{ij}^{(\alpha)} + \\ & + \frac{1}{2} \rho \left(\frac{\partial^2 A}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} \right)_{0,T,0} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} + \rho \sum_{\alpha=1}^N \left(\frac{\partial^2 A}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \chi_{kl}^{(\alpha)}} \right)_{0,T,0} \varepsilon_{ij} \chi_{kl}^{(\alpha)} + \\ & + \frac{1}{2} \rho \sum_{\alpha,\beta=1}^N \left(\frac{\partial^2 A}{\partial \chi_{ij}^{(\alpha)} \partial \chi_{kl}^{(\beta)}} \right)_{0,T,0} \chi_{ij}^{(\alpha)} \chi_{kl}^{(\beta)}. \end{aligned} \quad (3)$$

Для конкретизации данного соотношения определим количество внутренних параметров состояния, их природу и эволюционные уравнения.

1.1. Внутренние параметры состояния: их природа и эволюционные уравнения. В настоящей работе будем рассматривать два тензорных внутренних параметра состояния: $\chi_{ij}^{(S)}$ и $\chi_{ij}^{(T)}$. Параметр $\chi_{ij}^{(S)}$ отвечает за возникновение необратимой деформации при силовом нагружении, $\chi_{ij}^{(T)}$ — при температурном нагружении. Для описания эволюции этих параметров постулируем существование следующих кинетических уравнений:

$$\tau_{ijkl}^{(S)} \frac{\partial \chi_{kl}^{(S)}}{\partial z} + \chi_{ij}^{(S)} = \bar{\chi}_{ij}^{(S)}, \quad \tau_{ijkl}^{(T)} \frac{\partial \chi_{kl}^{(T)}}{\partial z} + \chi_{ij}^{(T)} = \bar{\chi}_{ij}^{(T)}. \quad (4)$$

Здесь $\tau_{ijkl}^{(S)} = \tau_{ijkl}^{(S)}(T)$, $\tau_{ijkl}^{(T)} = \tau_{ijkl}^{(T)}(T)$ — компоненты положительно определенных тензоров времен релаксации параметров $\chi_{ij}^{(S)}$ и $\chi_{ij}^{(T)}$ соответственно; $\bar{\chi}_{ij}^{(S)}$, $\bar{\chi}_{ij}^{(T)}$ — установившиеся значения этих параметров; z — внутреннее время, дифференциал которого определяется выражением $dz = d\xi / f(\xi)$ [6], где $f(\xi) = 1 + \beta\xi$ — материальная функция, $\beta = \beta(T)$ — материальный параметр; $d\xi$ — приращение меры внутреннего времени, определяемое как [7]:

$$d\xi = \sqrt{P_{ijkl} d\varepsilon_{ij} d\varepsilon_{kl} + m^2 dT^2}, \quad (5)$$

где $P_{ijkl} = P_{ijkl}(T)$ — компоненты симметричного положительно определенного тензора материальных параметров [5]; $m = m(T)$ — материальный параметр модели, описывающий необратимую деформацию при изменении температуры [7].

В настоящей работе ограничимся рассмотрением следующих видов тензоров:

$$\tau_{ijkl}^{(S)} = \begin{cases} \tau_{ijkl}^{(S)}, & i = k \wedge j = l, \\ 0, & i \neq k \vee j \neq l, \end{cases} \quad \tau_{ijkl}^{(T)} = \begin{cases} \tau_{ijkl}^{(T)}, & i = k \wedge j = l, \\ 0, & i \neq k \vee j \neq l, \end{cases}$$

со следующими условиями симметрии: $\tau_{ijkl}^{(S)} = \tau_{jilk}^{(S)}$ и $\tau_{ijkl}^{(T)} = \tau_{jilk}^{(T)}$. При переходе к матричной форме записи тензоры времен релаксации принимают вид диагональных матриц.

В результате получим несвязанные системы дифференциальных уравнений (4), решение которых для внутренних параметров $\chi_{ij}^{(S)}$ и $\chi_{ij}^{(T)}$ имеют вид:

$$\begin{aligned} \chi_{ij}^{(S)} &= \bar{\chi}_{ij}^{(S)} - \int_0^z \exp(-a_{ijkl}^{(S)}(z - z')) \frac{\partial \bar{\chi}_{kl}^{(S)}}{\partial z'} dz', \\ \chi_{ij}^{(T)} &= \bar{\chi}_{ij}^{(T)} - \int_0^z \exp(-a_{ijkl}^{(T)}(z - z')) \frac{\partial \bar{\chi}_{kl}^{(T)}}{\partial z'} dz', \end{aligned}$$

где $a_{ijkl}^{(S)} = 1/\tau_{ijkl}^{(S)}$, $a_{ijkl}^{(T)} = 1/\tau_{ijkl}^{(T)}$ — компоненты тензоров материальных параметров; $m, n = 1, 2, 3$.

Установившиеся значения внутренних параметров определим следующим образом:

$$\bar{\chi}_{ij}^{(S)} = X_{ijkl} \varepsilon_{kl}, \quad \bar{\chi}_{ij}^{(T)} = \tilde{Y}_{ijkl} \varepsilon_{kl}, \quad (6)$$

где $X_{ijkl}, \tilde{Y}_{ijkl}$ — компоненты симметричных тензоров 4-го ранга.

1.2. Определяющее соотношение и уравнение теплопроводности математической модели с внутренними параметрами состояния. Определив количество, природу и эволюционные уравнения для внутренних параметров, а также исключив их взаимное влияние, соотношение (3) для объемной плотности свободной энергии Гельмгольца примет вид:

$$\begin{aligned} \rho A(\varepsilon_{ij}, T, \chi_{ij}^{(\alpha)}) &= \rho B - D_{ij}^* \varepsilon_{ij} + F_{ij}^* \chi_{ij}^{(S)} - G_{ij}^* \chi_{ij}^{(T)} + \frac{1}{2} C_{ijkl}^* \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} - \\ &- M_{ijkl}^* \varepsilon_{ij} \chi_{kl}^{(S)} + N_{ijkl}^* \varepsilon_{ij} \chi_{kl}^{(T)} + \frac{1}{2} H_{ijkl}^* \chi_{ij}^{(S)} \chi_{kl}^{(S)} + \frac{1}{2} L_{ijkl}^* \chi_{ij}^{(T)} \chi_{kl}^{(T)}. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь для упрощения записи введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} B &= A(0, T, 0), \quad D_{ij}^* = -\rho \left(\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}} \right)_{0, T, 0}, \quad C_{ijkl}^* = \rho \left(\frac{\partial^2 A}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} \right)_{0, T, 0}, \\ F_{ij}^* &= \rho \left(\frac{\partial A}{\partial \chi_{ij}^{(S)}} \right)_{0, T, 0}, \quad M_{ijkl}^* = -\rho \left(\frac{\partial^2 A}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \chi_{kl}^{(S)}} \right)_{0, T, 0}, \quad H_{ijkl}^* = \rho \left(\frac{\partial^2 A}{\partial \chi_{ij}^{(S)} \partial \chi_{kl}^{(S)}} \right)_{0, T, 0}, \\ G_{ij}^* &= -\rho \left(\frac{\partial A}{\partial \chi_{ij}^{(T)}} \right)_{0, T, 0}, \quad N_{ijkl}^* = \rho \left(\frac{\partial^2 A}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \chi_{kl}^{(T)}} \right)_{0, T, 0}, \quad L_{ijkl}^* = \rho \left(\frac{\partial^2 A}{\partial \chi_{ij}^{(T)} \partial \chi_{kl}^{(T)}} \right)_{0, T, 0}, \end{aligned}$$

где $B = B(T)$ — массовая плотность свободной энергии Гельмгольца при нулевых значениях деформации и внутренних параметров; $F_{ij}^* = F_{ij}^*(T)$, $G_{ij}^* =$

$G_{ij}^*(T)$, $D_{ij}^* = D_{ij}^*(T)$ — компоненты симметричных тензоров 2-го ранга; $M_{ijkl}^* = M_{ijkl}^*(T)$, $N_{ijkl}^* = N_{ijkl}^*(T)$, $C_{ijkl}^* = C_{ijkl}^*(T)$, $H_{ijkl}^* = H_{ijkl}^*(T)$, $L_{ijkl}^* = L_{ijkl}^*(T)$ — компоненты симметричных тензоров 4-го ранга.

Для получения определяющего соотношения подставим выражение (7) в первое уравнение (2) и учтем соотношение (6). После упрощения получим:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0(T) - \sigma_{ij}^{(S)}(T) + \left(C_{ijkl}^* - \tilde{X}_{ijpq} a_{pqmn}^{(S)} M_{mnkl}^* \right) \varepsilon_{kl} - \left(M_{ijkl}^* - \tilde{X}_{ijpq} a_{pqmn}^{(S)} H_{mnkl}^* \right) \chi_{kl}^{(S)} + N_{ijkl}^* \chi_{kl}^{(T)}, \quad p, q = 1, 2, 3, \quad (8)$$

где $\tilde{X}_{ijpq} = X_{ijkl} \frac{\partial \varepsilon_{kl}}{\partial \varepsilon_{pq}}$; $\sigma_{ij}^0(T) = D_{ij}^*(T) = C_{ijkl}^* \varepsilon_{kl}^{(T)}$ — компоненты тензора начальных напряжений при стесненном нагреве в случае отсутствия внутренних параметров; $\sigma_{ij}^{(S)}(T)$ — компоненты тензора начальных напряжений при стесненном нагреве, вызванные влиянием установившегося значения внутреннего параметра состояния $\bar{\chi}_{ij}^{(S)}$ и равные:

$$\sigma_{ij}^{(S)}(T) = \frac{\partial \chi_{mn}^{(S)}}{\partial \varepsilon_{ij}} F_{mn}^* = \tilde{X}_{ijpq} a_{pqmn}^{(S)} F_{mn}^*, \quad (9)$$

где $F_{mn}^* = K_{mnkl}^* \varepsilon_{kl}^{(T)}$, $K_{mnkl}^* = K_{mnkl}^*(T)$ — компоненты симметричного тензора 4-го ранга. Здесь $\varepsilon_{kl}^{(T)}$ — компоненты тензора температурной деформации, определяемые как: $\varepsilon_{kl}^{(T)} = \int_{T_0}^T \alpha_{kl}^{(T)} dT'$, где $\alpha_{kl}^{(T)} = \alpha_{kl}^{(T)}(T)$ — компоненты тензора температурных коэффициентов линейного расширения, T_0 — температура естественного состояния.

Перепишем соотношение (8) в следующем виде:

$$\sigma_{ij} = \left(C_{ijkl}^* - \tilde{X}_{ijpq} a_{pqmn}^{(S)} M_{mnkl}^* \right) \varepsilon_{kl} - \left(C_{ijkl}^* - \tilde{X}_{ijpq} a_{pqmn}^{(S)} K_{mnkl}^* \right) \varepsilon_{kl}^{(T)} - \left(M_{ijkl}^* - \tilde{X}_{ijpq} a_{pqmn}^{(S)} H_{mnkl}^* \right) \chi_{kl}^{(S)} + N_{ijkl}^* \chi_{kl}^{(T)}. \quad (10)$$

В частном случае, когда $K_{mnkl}^* = M_{mnkl}^*$, данное соотношение можно упростить:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \left(\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^{(T)} \right) - M_{ijkl} \chi_{kl}^{(S)} + N_{ijkl} \chi_{kl}^{(T)}, \quad (11)$$

где

$$C_{ijkl} = C_{ijkl}^* - \tilde{X}_{ijpq} a_{pqmn}^{(S)} M_{mnkl}^*, \quad M_{ijkl} = M_{ijkl}^* - \tilde{X}_{ijpq} a_{pqmn}^{(S)} H_{mnkl}^*, \quad N_{ijkl} = N_{ijkl}^*.$$

Здесь $C_{ijkl} = C_{ijkl}(T)$ — компоненты тензора 4-го ранга эффективных упругих жесткостей; $M_{ijkl} = M_{ijkl}(T)$, $N_{ijkl} = N_{ijkl}(T)$ — компоненты тензоров 4-го ранга.

Для вычисления массовой плотности энтропии подставим выражение (7) во второе уравнение (2) и учтем соотношение (9). После упрощения получим:

$$\begin{aligned}
 h = & -\frac{dB}{dT} - \frac{1}{\rho} \left(\frac{1}{2} \frac{dC_{ijkl}^*}{dT} \varepsilon_{kl} - \frac{dC_{ijkl}^*}{dT} \varepsilon_{kl}^{(T)} - \frac{dM_{ijkl}^*}{dT} \chi_{kl}^{(S)} + \frac{dN_{ijkl}^*}{dT} \chi_{kl}^{(T)} \right) \varepsilon_{ij} + \quad (12) \\
 & + \frac{1}{\rho} \frac{\partial G_{kl}^*}{\partial T} \chi_{kl}^{(T)} + \frac{1}{\rho} G_{kl}^* a_{klmn}^{(T)} \tilde{Y}_{mnpq} \frac{\partial \varepsilon_{pq}^{(T)}}{\partial T} + \\
 & + \frac{1}{\rho} \left(C_{ijpq}^* \varepsilon_{ij} - K_{ijpq}^* \chi_{ij}^{(S)} - \left(N_{ijkl}^* \varepsilon_{ij} + L_{ijkl}^* \chi_{ij}^{(T)} \right) a_{klmn}^{(T)} \tilde{Y}_{mnpq} \right) \frac{\partial \varepsilon_{pq}^{(T)}}{\partial T} - \\
 & - \frac{1}{\rho} \frac{dK_{ijkl}^*}{dT} \chi_{ij}^{(S)} \varepsilon_{kl}^{(T)} - \frac{1}{2\rho} \left(\frac{dH_{ijkl}^*}{dT} \chi_{ij}^{(S)} \chi_{kl}^{(S)} + \frac{dL_{ijkl}^*}{dT} \chi_{ij}^{(T)} \chi_{kl}^{(T)} \right),
 \end{aligned}$$

где слагаемые $\frac{1}{\rho} G_{kl}^* a_{klmn}^{(T)} \tilde{Y}_{mnpq} \frac{\partial \varepsilon_{pq}^{(T)}}{\partial T}$ и $\frac{1}{\rho} \frac{\partial G_{kl}^*}{\partial T} \chi_{kl}^{(T)}$ отвечают за изменение энтропии при стесненном нагреве, вызванное влиянием установившегося значения внутреннего параметра состояния $\chi_{kl}^{(T)}$ и его эволюции соответственно. Тогда компоненты тензора G_{kl}^* можно определить как $G_{kl}^* = R_{klij}^* \varepsilon_{ij}^{(T)}$, где $R_{klij}^* = R_{klij}^*(T)$ — компоненты симметричного тензора 4-го ранга.

Перепишем соотношение (12) в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 h = & -\frac{dB}{dT} - \frac{1}{\rho} \left(\frac{1}{2} \frac{dC_{ijkl}^*}{dT} \varepsilon_{kl} - \frac{dC_{ijkl}^*}{dT} \varepsilon_{kl}^{(T)} - \frac{dM_{ijkl}^*}{dT} \chi_{kl}^{(S)} + \frac{dN_{ijkl}^*}{dT} \chi_{kl}^{(T)} \right) \varepsilon_{ij} + \quad (13) \\
 & + \frac{1}{\rho} \left(C_{ijpq}^* \varepsilon_{ij} - K_{ijpq}^* \chi_{ij}^{(S)} + R_{ijpq}^* \chi_{ij}^{(T)} \right) \frac{\partial \varepsilon_{pq}^{(T)}}{\partial T} - \\
 & - \frac{1}{\rho} \left(N_{ijkl}^* \varepsilon_{ij} - R_{ijkl}^* \varepsilon_{ij}^{(T)} + L_{ijkl}^* \chi_{ij}^{(T)} \right) a_{klmn}^{(T)} \tilde{Y}_{mnpq} \frac{\partial \varepsilon_{pq}^{(T)}}{\partial T} - \\
 & - \frac{1}{\rho} \left(\frac{dK_{ijkl}^*}{dT} \chi_{ij}^{(S)} - \frac{dR_{ijkl}^*}{dT} \chi_{ij}^{(T)} \right) \varepsilon_{kl}^{(T)} - \frac{1}{2\rho} \left(\frac{dH_{ijkl}^*}{dT} \chi_{ij}^{(S)} \chi_{kl}^{(S)} + \frac{dL_{ijkl}^*}{dT} \chi_{ij}^{(T)} \chi_{kl}^{(T)} \right).
 \end{aligned}$$

Тензоры $\hat{\mathbf{K}}^*$, $\hat{\mathbf{R}}^*$, $\hat{\mathbf{M}}^*$, $\hat{\mathbf{N}}^*$, $\hat{\mathbf{H}}^*$, $\hat{\mathbf{L}}^*$ необходимо определять с учетом ограничений, накладываемых диссипативным неравенством (2).

Для получения уравнения теплопроводности подставим выражение (13) в (1). После упрощения получим:

$$\rho c \dot{T} = T W_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} + q_V + \delta_D^* + \delta_D. \quad (14)$$

Здесь c — эффективная удельная массовая теплоемкость, определяемая как

$$\begin{aligned} c = c_\varepsilon - \frac{1}{\rho} T & \left(\frac{1}{2} \frac{d^2 C_{ijkl}^*}{dT^2} \varepsilon_{kl} - \frac{d^2 C_{ijkl}^*}{dT^2} \varepsilon_{kl}^{(T)} - \frac{d^2 M_{ijkl}^*}{dT^2} \chi_{kl}^{(S)} + \frac{d^2 N_{ijkl}^*}{dT^2} \chi_{kl}^{(T)} \right) \varepsilon_{ij} + \\ & + \frac{2}{\rho} T \left(\frac{dC_{ijpq}^*}{dT} \varepsilon_{ij} - \frac{dK_{ijpq}^*}{dT} \chi_{ij}^{(S)} + \frac{dR_{ijpq}^*}{dT} \chi_{ij}^{(T)} \right) \frac{\partial \varepsilon_{pq}^{(T)}}{\partial T} - \\ & - \frac{1}{\rho} T \left(\frac{dN_{ijkl}^*}{dT} \varepsilon_{ij} - \frac{dR_{ijkl}^*}{dT} \varepsilon_{ij}^{(T)} - R_{ijkl}^* \frac{\partial \varepsilon_{ij}^{(T)}}{\partial T} + \frac{dL_{ijkl}^*}{dT} \chi_{ij}^{(T)} \right) a_{klmn}^{(T)} \tilde{Y}_{mnpq} \frac{\partial \varepsilon_{pq}^{(T)}}{\partial T} - \\ & - \frac{1}{\rho} T \left(\frac{d^2 K_{ijkl}^*}{dT^2} \chi_{ij}^{(S)} - \frac{d^2 R_{ijkl}^*}{dT^2} \chi_{ij}^{(T)} \right) \varepsilon_{kl}^{(T)} - \\ & - \frac{1}{2} \frac{1}{\rho} T \left(\frac{d^2 H_{ijkl}^*}{dT^2} \chi_{ij}^{(S)} \chi_{kl}^{(S)} + \frac{d^2 L_{ijkl}^*}{dT^2} \chi_{ij}^{(T)} \chi_{kl}^{(T)} \right), \end{aligned}$$

где $c_\varepsilon = -T \frac{d^2 B}{dT^2}$ — удельная массовая теплоемкость при постоянном объеме;
 W_{ij} — компоненты симметричного тензора второго ранга, равные

$$W_{ij} = \frac{dC_{ijkl}^*}{dT} \left(\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^{(T)} \right) - \left(C_{ijpq}^* - N_{ijkl}^* a_{klmn}^{(T)} \tilde{Y}_{mnpq} \right) \frac{\partial \varepsilon_{pq}^{(T)}}{\partial T} - \frac{dM_{ijkl}^*}{dT} \chi_{kl}^{(S)} + \frac{dN_{ijkl}^*}{dT} \chi_{kl}^{(T)};$$

δ_D^* — дополнительное термодинамическое слагаемое, описывающее процессы рассеяния энергии, вызванные влиянием внутренних параметров состояния, и определяемое как

$$\begin{aligned} \delta_D^* = T & \left(\frac{dM_{ijkl}^*}{dT} \varepsilon_{kl} - \frac{dK_{ijkl}^*}{dT} \varepsilon_{kl}^{(T)} - K_{ijkl}^* \frac{\partial \varepsilon_{kl}^{(T)}}{\partial T} - \frac{dH_{ijkl}^*}{dT} \chi_{kl}^{(S)} \right) \dot{\chi}_{ij}^{(S)} - \\ & - T \left(\frac{dN_{ijkl}^*}{dT} \varepsilon_{kl} - \frac{dR_{ijkl}^*}{dT} \varepsilon_{kl}^{(T)} - \left(R_{ijpq}^* - L_{ijkl}^* a_{klmn}^{(T)} \tilde{Y}_{mnpq} \right) \frac{\partial \varepsilon_{pq}^{(T)}}{\partial T} + \frac{dL_{ijkl}^*}{dT} \chi_{kl}^{(T)} \right) \dot{\chi}_{ij}^{(T)}. \end{aligned}$$

Уравнения (10) и (14) совместно с уравнением равновесия и соотношениями Коши, а также с начальными и граничными условиями формируют связанную краевую задачу термопластичности с внутренними параметрами состояния.

2. Вариант эндохронной теории пластичности при неизотермическом нагружении. Для получения определяющих соотношений эндохронной теории пластичности в условиях неизотермического нагружения примем следующие допущения [8]:

$$M_{ijkl} = N_{ijkl} = C_{ijkl}, \quad X_{mnkl} = \tilde{Y}_{mnkl} = I_{mnkl},$$

где I_{mnkl} — единичный тензор 4-го ранга.

В этом случае соотношение (11), учитывая установившиеся значения внутренних параметров состояния (6), примет следующий вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} = & C_{ijkl} \int_0^z \exp \left(-a_{klmn}^{(S)} (z - z') \right) \frac{\partial \varepsilon_{mn}}{\partial z'} dz' - \\ & - C_{ijkl} \int_0^z \exp \left(-a_{klmn}^{(T)} (z - z') \right) \frac{\partial \varepsilon_{mn}^{(T)}}{\partial z'} dz' = \sigma_{ij}^{(S)} - \sigma_{ij}^{(T)}, \end{aligned} \quad (15)$$

где компоненты вспомогательных тензоров напряжений $\sigma_{ij}^{(S)}$ и $\sigma_{ij}^{(T)}$ равны:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^{(S)} &= C_{ijkl} \int_0^z \exp \left(-a_{klmn}^{(S)} (z - z') \right) \frac{\partial \varepsilon_{mn}}{\partial z'} dz', \\ \sigma_{ij}^{(T)} &= C_{ijkl} \int_0^z \exp \left(-a_{klmn}^{(T)} (z - z') \right) \frac{\partial \varepsilon_{mn}^{(T)}}{\partial z'} dz'. \end{aligned}$$

Продифференцировав соотношения (15) по внутреннему времени, получим:

$$\begin{aligned} d\sigma_{ij} = & C_{ijkl} \left(d\varepsilon_{kl} - \left(a_{klmn}^{(S)} S_{mnpq} \sigma_{pq}^{(S)} - a_{klmn}^{(T)} S_{mnpq} \sigma_{pq}^{(T)} \right) dz \right) + \\ & + \left(\frac{dC_{ijkl}}{dT} S_{klmn} \sigma_{mn} - C_{ijkl} \alpha_{kl}^{(T)} \right) dT, \end{aligned} \quad (16)$$

где $S_{ijkl} = S_{ijkl}(T)$ — компоненты тензора 4-го ранга эффективных коэффициентов податливости, определяемые из соотношения $S_{ijkl} C_{klmn} = I_{ijmn}$.

Обратное соотношение:

$$\begin{aligned} d\varepsilon_{ij} = & S_{ijkl} d\sigma_{kl} + \left(a_{ijkl}^{(S)} S_{klmn} \sigma_{mn}^{(S)} - a_{ijkl}^{(T)} S_{klmn} \sigma_{mn}^{(T)} \right) dz - \\ & - S_{ijkl} \frac{dC_{klmn}}{dT} S_{mnpq} \sigma_{pq} dT + \alpha_{ij}^{(T)} dT. \end{aligned} \quad (17)$$

Здесь приращение внутреннего времени dz определяем из уравнения $dz = d\xi/f(\xi)$, в котором материальная функция $f(\xi)$ задана как $f(\xi) = 1 + \beta\xi$, где β — материальный параметр модели. Приращение меры внутреннего времени $d\xi$ определяем из уравнения (5).

Из соотношения (15) следует, что при $z \rightarrow 0$ материал деформируется упруго, то есть $\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} = C_{ijkl}$.

При выводе этих уравнений был рассмотрен общий случай, в котором все параметры материала зависят от температуры. Ограничимся случаем, когда от температуры зависят только компоненты C_{ijkl} , $\alpha_{ij}^{(T)}$, P_{ijkl} и β . Для обеспечения непрерывности по температуре компоненты тензора $P_{ijkl}(T)$ и материального параметра $\beta(T)$ зададим следующим образом:

$$P_{ijkl}(T) = P_{ijkl}(T_0) \cdot \Omega(T), \quad \beta(T) = \beta(T_0) + \Psi(T),$$

где $P_{ijkl}(T_0)$, $\beta(T_0)$ — материальные параметры при температуре естественного состояния; $\Omega(T)$, $\Psi(T)$ — функции, непрерывные по температуре, причем

$\Omega(T_0) = 1$ и $\Psi(T_0) = 0$. В общем случае функция $\Omega(T)$ может иметь тензорный вид.

3. Пример расчета для демонстрации полученных соотношений.

Для демонстрации полученных соотношений (16)–(17) рассмотрим моделирование термосилового нагружения однонаправленного волокнистого композиционного материала AS4/PEEK с различными углами армирования, предполагая, что задача термически несвязанная. Характеристики данного материала приведены в табл. 1.

Свойства	Размерность	Температура, °C			
		24(T_0)	66	121	177
E_1	ГПа	127,6	129,5	128,2	127,5
E_2	ГПа	10,3	9,6	8,3	4,9
G_{12}	ГПа	6,0	5,4	4,9	2,8
ν_{12}		0,33			
$\alpha_{11}^{(T)}$	$\times 10^{-6} C^{-1}$	$3,15 \cdot 10^{-5} \cdot T^2 - 0,004 \cdot T + 0,1362$			
$\alpha_{22}^{(T)}$	$\times 10^{-6} C^{-1}$	30,19			

Таблица 1. Характеристики ОБКМ AS4/PEEK [3]

Материальные параметры, определяющие нелинейное поведение материала, устанавливаем на основе наилучшего совпадения экспериментальных и теоретических результатов. Поскольку ОБКМ AS4/PEEK не подвержен термическому гистерезису [3], принимаем, $[a^{(S)}] = [a^{(T)}]$ и $m = 0$, что соответствует отсутствию необратимой деформации при температурном нагружении. Материальный параметр $\beta(T_0)$ принимаем равным нулю, поскольку кривые деформирования при температуре естественного состояния не имеют выраженного линейного участка при развитой деформации. Значение остальных материальных параметров имеют следующий вид:

$$[P(T_0)] = \begin{bmatrix} 1,064 & 2,16 & 0 \\ 2,16 & 7,332 & 0 \\ 0 & 0 & 11,907 \end{bmatrix}, \quad [a^{(S)}] = \begin{bmatrix} 0,246 & 0 & 0 \\ 0 & 9,013 & 0 \\ 0 & 0 & 19,978 \end{bmatrix};$$

функции $\Omega(T)$ и $\Psi(T)$ для $T \geq T_0$ заданы следующим образом:

$$\begin{aligned} \Omega(T) &= 1,68 \cdot 10^{-4} \cdot (T - T_0)^2 + 0,01 \cdot (T - T_0) + 1,0; \\ \Psi(T) &= 8,06 \cdot 10^{-5} \cdot (T - T_0)^2 + 2,07 \cdot 10^{-3} \cdot (T - T_0). \end{aligned}$$

В качестве моделируемого эксперимента рассмотрим внеосевое растяжение при различных температурах. Расчет выполнен в два этапа: 1-ый этап — предварительный нагрев, 2-ой этап — растяжение при постоянной температуре. Полученные результаты приведены на рис. 1. Графики демонстрируют хорошее

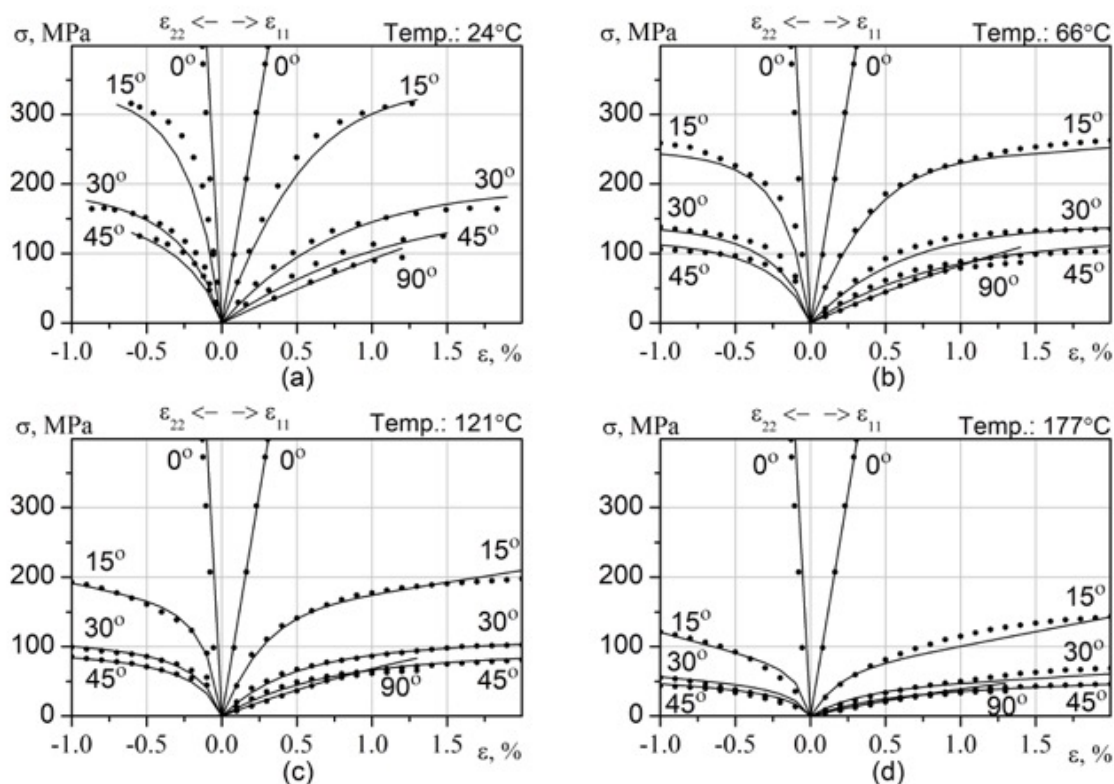


Рис. 1. Диаграммы деформирования AS4/PEEK при температурах: 24°C (a), 66°C (b), 121°C (c), 177°C (d). Сплошная линия — расчет, точки — эксперимент [3]

согласование расчетных значений по эндохронной теории термопластичности с экспериментальными данными.

4. Заключение. В работе предложен вариант математической модели пластичности для композиционных материалов при неизотермическом нагружении. Получены определяющие соотношения и уравнение теплопроводности для формирования связанной краевой задачи термопластичности. В частном случае модель приведена к соотношениям эндохронной теории термопластичности. Проведенные расчеты показали хорошее согласование с экспериментальными данными.

ДОПОЛНИТЕЛЬНО

Вклад авторов. В. Н. Зимин — разработка концепции моделирования, согласование финальной версии рукописи, Д. Р. Рахимов — построение математической модели, проведение численных расчетов, написание текста рукописи, И. Ю. Савельева — построение математической модели, редактирование текста рукописи.

Конфликт интересов. Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

Источник финансирования. Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования России (код проекта FSFN-2024-0004).

ADDITIONAL INFORMATION

Authors' contribution. V. N. Zimin — development of the modeling concept, approval of the final manuscript version, D. R. Rakhimov — development of the mathematical model, numerical calculations, manuscript writing, I. Yu. Savelyeva — development of the mathematical model, manuscript editing.

Competing interests. The authors declare that they have no competing interests.

Funding. This work was supported by the RF Ministry of Science and Higher Education (Grant No. FSFN-2024-0004).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Jones R. M. Deformation theory of plasticity. Blacksburg : Bull Ridge Publishing, 2009. 622 p.
- [2] Amijima S., Adachi T. Nonlinear stress-strain response of laminated composites // J. Composites materials. 1979. vol. 13. P. 206—218. DOI: 10.1177/002199837901300303.
- [3] Sun C. T., Yoon K. J. Characterization of elastic-plastic behavior of AS4/PEEK thermoplastic composite for temperature variation // Journal of composite materials. 1991. vol. 25, no. 10 P. 1297—1313. DOI: 10.1177/002199839102501003
- [4] Головин Н. Н., Кувыркин Г. Н. Математические модели деформирования углерод-углеродных композитов // Механика твердого тела. 2016. т. 51, № 5. С. 111—123. EDN: WRJKKV
- [5] Кувыркин Г. Н. Термомеханика деформируемого твердого тела при высокоинтенсивном нагружении. М. : Изд-во МГТУ, 1993. 142 с.
- [6] Сарбаев Б. С., Барышев А. Н. Расчет диаграмм деформирования композиционных материалов с тканым наполнителем посредством эндохронной теории пластичности // Вест. МГТУ им. Н. Э. Баумана. Сер. Машиностроение. 2017. № 4. С. 65—75. EDN: ZEWD SR. DOI: 10.18698/0236-3941-2017-4-65-75
- [7] Сарбаев Б. С. Определяющие соотношения для высокотемпературных композиционных материалов на основе эндохронной теории термопластичности // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2019. № 7. С. 97—104. EDN: LUVWOJ. DOI: 10.1134/S0235711919070113
- [8] Зарубин В. С., Кувыркин Г. Н. Математические модели термомеханики. М. : Физматлит, 2002. 168 с.
- [9] Maugin G., Muschik W. Thermodynamics with Internal Variables. Part I. General Concepts // J. Non-Equilib. Thermodyn. 1994. vol. 19, no. 3. P. 217—249. DOI: 10.1515/jnet.1994.19.3.217
- [10] Maugin G. The Thermomechanics of Plasticity and Fracture. Cambridge : Cambridge University Press, 1992. 350 p.
- [11] Зимин В. Н., Кувыркин Г. Н., Рахимов Д. Р. Проектирование высокоэффективного металлокомпозитного баллона высокого давления сферической формы // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2022. № 4 (54). С. 14—24. EDN: TJRBUC. DOI: 10.37972/chgpu.2022.54.4.002

- [12] Кувыркин Г. Н., Рахимов Д. Р. Вычислительный алгоритм исследования определяющих соотношений эндохронной теории термопластичности для изотропных материалов // Прикладная механика и техническая физика. 2024. № 3. С. 116–122. EDN: HYUCWQ. DOI: 10.15372/PMTF202315386

REFERENCES

- [1] Jones R. M. Deformation theory of plasticity. Blacksburg : Bull Ridge Publishing, 2009. 622 p.
- [2] Amijima S., Adachi T. Nonlinear stress-strain response of laminated composites // J. Composites materials. 1979. vol. 13. P. 206–218. DOI: 10.1177/002199837901300303.
- [3] Sun C. T., Yoon K. J. Characterization of elastic-plastic behavior of AS4/PEEK thermoplastic composite for temperature variation // Journal of composite materials. 1991. vol. 25, no. 10 P. 1297–1313. DOI: 10.1177/002199839102501003
- [4] Golovin N. N., Kuvyrkin G. N. Mathematical models of carbon-carbon composite deformation. Mech. Solids. 2016. vol. 51. no. 5. P. 111–123 EDN: WRJKKV. (in Russian)
- [5] Kuvyrkin G. N. Thermal mechanics of a deformable solid under high-intensity loading. M. : BMSTU Publ., 1993. 143 p. (in Russian)
- [6] Sarbaev B. S., Baryshev A. N. Calculation of stress-strain curves of fabric reinforced composite materials using the endochronic theory of plasticity // Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Mechanical Engineering. 2017. no. 4. P. 65–75. EDN: ZEWDSE. DOI: 10.18698/0236-3941-2017-4-65-75. (in Russian)
- [7] Sarbaev B. S. Constitutive relations of the endochronic theory of thermoplasticity for high-Temperature composites // Journal of Machinery Manufacture and Reliability. 2019. no. 7. P. 97–104. EDN: LUVWOJ. DOI: 10.1134/S0235711919070113 (in Russian)
- [8] Zarubin V. S., Kuvyrkin G. N. Mathematical models of thermomechanics. M. : Fizmatlib Publ., 2002. 168 p. (in Russian)
- [9] Maugin G., Muschik W. Thermodynamics with Internal Variables. Part I. General Concepts // J. Non-Equilib. Thermodyn. 1994. vol. 19, no. 3. P. 217–249. DOI: 10.1515/jnet.1994.19.3.217
- [10] Maugin G. The Thermomechanics of Plasticity and Fracture. Cambridge : Cambridge University Press, 1992. 350 p.
- [11] Zimin V. N., Kuvyrkin G. N., Rakhimov D. R. Design of a highly effective metal composite high-pressure vessel of spherical shape // Vestnik of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State. 2022. no. 4 (54). P. 14–24. EDN: TJRBUC. DOI: 10.37972/chgpu.2022.54.4.002 (in Russian)
- [12] Kuvyrkin G. N., Rakhimov D. R. Computation algorithm of research the governing relations of the endochronic theory of thermoplasticity for isotropic materials // J. Appl. Mech. Tech. Phy. 2024. no. 3. P. 116–122. EDN: HYUCWQ. DOI: 10.15372/PMTF202315386. (in Russian)