

А. В. Ковалев, Ю. В. Малыгина

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАДАЧИ О РАВНОМЕРНОМ СЖАТИИ УПРОЧНЯЮЩЕЙСЯ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ ТРУБЫ ПРИ РАДИАЛЬНОМ ИЗМЕНЕНИИ ТЕМПЕРАТУРЫ

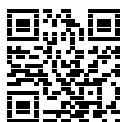
Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия

Аннотация. В работе предложен метод решения задачи о симметричной деформации упрочняющейся упругопластической трубы при изменении температуры в радиальном направлении. Построена математическая модель, получены соотношения компонент тензора напряжений, радиальное перемещение и радиуса упругопластической границы. Результаты, представленные в данной статье, при определенных условиях совпадают с ранее полученными соотношениями. При построении математической модели учитывалось, что предел текучести дается функцией температуры, а остальные постоянные материала: модуль упругости, коэффициент температурного расширения и коэффициент Пуассона - считаются независимыми от температуры

Ключевые слова: упрочнение, напряженное состояние, радиальное перемещение, упругость, пластичность, сжимаемость по упругим деформациям, температура.

Ковалев Алексей Викторович, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой механики и компьютерного моделирования Воронежского государственного университета, г. Воронеж, Россия; e-mail: kovalev@amm.vsu.ru; AuthorID: 11051

Малыгина Юлия Владимировна, старший преподаватель кафедры механики и компьютерного моделирования Воронежского государственного университета, г. Воронеж, Россия; e-mail: ymkahavren@gmail.com; AuthorID: 1280774



для цитирования: Ковалев А. В., Малыгина Ю. В. Математическое моделирование задачи о равномерном сжатии упрочняющейся упругопластической трубы при радиальном изменении температуры // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2025. № 1(63). С. 76–88. DOI: 10.37972/chgpu.2025.63.1.007. EDN: QIUJIO

Статья опубликована на условиях лицензии *Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)*.

A. V. Kovalev, Y. V. Malygina

MATHEMATICAL MODELING OF THE PROBLEM OF UNIFORM COMPRESSION OF A HARDENING ELASTIC-PLASTIC TUBE UNDER RADIAL TEMPERATURE CHANGE

Voronezh State University, Voronezh, Russia

Abstract. The article proposes a method for solving the problem of symmetric deformation of a hardening elastic-plastic tube under temperature change in the radial direction. The mathematical model is constructed, and the relations of stress tensor components, radial displacement and radius of the elastic-plastic boundary are obtained. The results presented in this paper coincide with the previously obtained relations under certain conditions. When constructing the mathematical model, it was taken into account that the yield strength is given as a function of temperature, and the other material constants: modulus of elasticity, coefficient of thermal expansion and Poisson's ratio are assumed to be independent of temperature

Keywords: hardening, stress state, radial displacement, elasticity, plasticity, compressibility by elastic strain, temperature.

Alexey Victorovich Kovalev, Dr. Sci. Phys. and Math., Professor, Head of the Department of Mechanics and Computer Modeling, Voronezh State University, Voronezh, Russia; **e-mail:** kovalev@amm.vsu.ru; AuthorID: 11051

Yuliya Vladimirovna Malygina, Lecturer of the Department of Mechanics and Computer Modeling, Voronezh State University, Voronezh, Russia; **e-mail:** ymkahavren@gmail.com; AuthorID: 1280774



to cite this article: Kovalev A. V., Malygina Y. V. Mathematical modeling of the problem of uniform compression of a hardening elastic-plastic tube under radial temperature change // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2025. No 1(63). p. 76–88. DOI: 10.37972/chgpu.2025.63.1.007

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение. Температурные эффекты оказывают существенное влияние на механическое поведение материалов, что делает необходимым их учет при решении задач, связанных с деформированием тел. Часто температурные изменения рассматриваются как факторы, влияющие на свойства материала, такие как предел текучести, модуль упругости и другие. Вместе с тем, учет температурных зависимостей этих параметров значительно усложняет математическое моделирование.

В работах [1–3], предложены подходы к анализу напряженного состояния тел при линейной или квадратичной зависимости предела текучести от температуры. Статьи [4, 5] содержат исследования, посвященные определению компонент тензора напряжений и перемещений толстостенных упрочняющихся труб, в которых постоянные материала не зависят от температуры. В работе [6] авторами рассмотрен вопрос того, как температурные изменения, влияющие на предел текучести, сказываются на расчете напряженно-деформированного состояния сжимаемой упругопластической трубы.

В представленной работе предлагается математическая модель для анализа влияния температурных воздействий на напряженно-деформированное состояние (НДС) трубы результаты могут быть применены для более точного прогнозирования поведения конструкций, работающих в условиях высоких температур и механических нагрузок.

Постановка задачи. Система уравнений. Проведем анализ влияния температурных воздействий на НДС трубы при равномерном внутреннем – p и внешним – q давлениях. Пусть труба, радиусов a и b соответственно, состоит из упрочняющегося упругопластического материала и является сжимаемым по упругим деформациям. Предел текучести материала является функцией температуры, варьирующейся в радиальном направлении. Остальные физико-механические характеристики материала, а именно модуль упругости, коэффициент теплового расширения и коэффициент Пуассона, для простоты моделирования были приняты как постоянные величины и не изменяются при изменении температуры.

Полную систему уравнений в каждой из рассматриваемых областей можно записать в виде:

— уравнение равновесия

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} = \frac{\sigma_\theta - \sigma_r}{r}, \quad (1)$$

где σ_r, σ_θ – компоненты тензора напряжений;

— соотношения Коши

$$e_r = \frac{\partial u}{\partial r}, e_\theta = \frac{u}{r}, \quad (2)$$

где e_r, e_θ – компоненты тензора полных деформаций, u – компонента радиального перемещения;

— закон Дюамеля-Неймана

$$\begin{aligned} e_r^e &= \frac{1}{E} [\sigma_r - \mu (\sigma_\theta + \sigma_z)] + \alpha T(r), \\ e_\theta^e &= \frac{1}{E} [\sigma_\theta - \mu (\sigma_r + \sigma_z)] + \alpha T(r), \\ e_z^e &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu (\sigma_r + \sigma_\theta)] + \alpha T(r), \end{aligned} \quad (3)$$

где e_r^e, e_θ^e, e_z^e – компоненты тензора деформаций в упругой области; E – модуль упругости, σ_z – компонента тензора напряжений, μ – коэффициент Пуассона, $T(r)$ – температура, которая определяется из решения стационарного уравнения теплопроводности с заданными краевыми условиями, α – коэффициент температурного расширения [7, 8];

— условие пластичности

$$\begin{aligned} &(\sigma_\theta - \sigma_r - c(e_\theta^p - e_r^p))^2 + (\sigma_\theta - \sigma_z - c(e_\theta^p - e_z^p))^2 + \\ &+ (\sigma_r - \sigma_z - c(e_r^p - e_z^p))^2 = 6k^2, \end{aligned} \quad (4)$$

где e_r^p, e_θ^p, e_z^p – компоненты тензора пластических деформаций; c – коэффициент упрочнения;

— ассоциированный закон пластического течения

$$\begin{aligned} de_r^p &= \frac{d\lambda}{3} \left[2\sigma_r - \sigma_\theta - \sigma_z - c(2e_r^p - e_\theta^p - e_z^p) \right], \\ de_\theta^p &= \frac{d\lambda}{3} \left[2\sigma_\theta - \sigma_r - \sigma_z - c(2e_\theta^p - e_r^p - e_z^p) \right], \\ de_z^p &= \frac{d\lambda}{3} \left[2\sigma_z - \sigma_r - \sigma_\theta - c(2e_z^p - e_r^p - e_\theta^p) \right], \end{aligned} \quad (5)$$

где $d\lambda$ – скалярный положительный множитель;

— граничные условия

$$\begin{aligned} \sigma_r \Big|_{r=a} &= -p, \\ \sigma_r \Big|_{r=b} &= -q, \end{aligned} \quad (6)$$

— условия сопряжений

$$[\sigma_r] = [\sigma_\theta] = [u] = 0, \quad (7)$$

В дальнейшем, будем предполагать что, деформация трубы в осевом направлении будет оставаться постоянной величиной. Поэтому, в упругой и пластической областях ее значение будет одинаковым и равным $e_z = e_1 = \text{const}$.

В пластической зоне полные деформации даются суммой упругих и пластических составляющих. Таким образом, исходя из (3) и (5), соотношения для определения компонент полных деформаций в пластической области можно представить в виде:

$$\begin{aligned}
 de_r &= \frac{1}{E} \left[d\sigma_r - \mu (d\sigma_\theta + d\sigma_z) \right] + d(\alpha T(r)) + \\
 &\quad + \frac{d\lambda}{3} \left[2\sigma_r - \sigma_\theta - \sigma_z - c(2e_r^p - e_\theta^p - e_z^p) \right], \\
 de_\theta &= \frac{1}{E} \left[d\sigma_\theta - \mu (d\sigma_r + d\sigma_z) \right] + d(\alpha T(r)) + \\
 &\quad + \frac{d\lambda}{3} \left[2\sigma_\theta - \sigma_r - \sigma_z - c(2e_\theta^p - e_r^p - e_z^p) \right], \\
 de_z &= \frac{1}{E} \left[d\sigma_z - \mu (d\sigma_r + d\sigma_\theta) \right] + d(\alpha T(r)) + \\
 &\quad + \frac{d\lambda}{3} \left[2\sigma_z - \sigma_r - \sigma_\theta - c(2e_z^p - e_r^p - e_\theta^p) \right].
 \end{aligned} \tag{8}$$

Выбор метода решения. Решение задачи основывается на использовании метода возмущений. Суть метода заключается в представлении физических величин в виде разложений по малому параметру δ . Для получения практически значимых результатов в рамках данной работы ограничимся учетом первых двух членов разложения. Это обеспечивает компромисс между точностью и вычислительной сложностью. Тогда все необходимые величины запишем в виде рядов:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{ij} &= \sigma_{ij}^{(0)} + \delta \sigma_{ij}^{(1)}, e_{ij} = e_{ij}^{(0)} + \delta e_{ij}^{(1)}, u = u^{(0)} + \delta u^{(1)}, \\
 \alpha &= \delta \alpha^{(1)}, \mu = \frac{1}{2} + \delta \mu^{(1)}, e_1 = \delta e_1^{(1)}, c = \delta c^{(1)} \\
 \lambda &= \lambda^{(0)} + \delta \lambda^{(1)}, k = k^{(0)} + \delta k^{(1)}(T), r_s = r_s^{(0)} + \delta r_s^{(1)},
 \end{aligned} \tag{9}$$

где $\mu^{(1)}$ – известная постоянная; $k^{(0)}$ – значение предела текучести при постоянной температуре; $k^{(1)}$ – функция, зависящая от температуры; верхние индексы (0), (1) определяют соответствующее приближение.

Решение и результаты. Принимая выбранный метод решения задачи, нам нужно получить искомые выражения в каждом приближении, а затем записать общее решение, учитывая разложения (9).

Далее, разложения, полученные методом возмущений, подставляются в систему уравнений (1)-(4), (6)-(8). В результате формируются новые системы уравнений, соответствующие различным порядкам малости параметра δ , которые решаются независимо друг от друга.

В нулевом приближении система уравнений сводится к плоской деформации несжимаемой упругопластической трубы. Решение этой задачи известно [9].

В первом приближении систему уравнений будет иметь следующий вид:
— уравнение равновесия

$$\frac{\partial \sigma_r^{(1)}}{\partial r} = \frac{\sigma_\theta^{(1)} - \sigma_r^{(1)}}{r}, \quad (10)$$

— соотношения Коши

$$\begin{aligned} e_r^{(1)} &= \frac{\partial u^{(1)}}{\partial r}, \\ e_\theta^{(1)} &= \frac{u^{(1)}}{r}, \end{aligned}$$

— выражения для деформаций в упругой области

$$\begin{aligned} e_r^{e(1)} &= \frac{1}{E} \left[\sigma_r^{(1)} - \frac{1}{2} (\sigma_\theta^{(1)} + \sigma_z^{(1)}) - \mu^{(1)} (\sigma_\theta^{(0)} + \sigma_z^{(0)}) \right] + \alpha^{(1)} T(r), \\ e_\theta^{e(1)} &= \frac{1}{E} \left[\sigma_\theta^{(1)} - \frac{1}{2} (\sigma_r^{(1)} + \sigma_z^{(1)}) - \mu^{(1)} (\sigma_r^{(0)} + \sigma_z^{(0)}) \right] + \alpha^{(1)} T(r), \\ e_z^{(1)} &= \frac{1}{E} \left[\sigma_z^{(1)} - \frac{1}{2} (\sigma_r^{(1)} + \sigma_\theta^{(1)}) - \mu^{(1)} (\sigma_r^{(0)} + \sigma_\theta^{(0)}) \right] + \alpha^{(1)} T(r), \end{aligned}$$

— условие пластичности

$$\begin{aligned} & \left(\sigma_\theta^{(0)} - \sigma_r^{(0)} \right) \left(\sigma_\theta^{(1)} - \sigma_r^{(1)} - c^{(1)} (e_\theta^{p(0)} - e_r^{p(0)}) \right) + \\ & + \left(\sigma_\theta^{(0)} - \sigma_z^{(0)} \right) \left(\sigma_\theta^{(1)} - \sigma_z^{(1)} - c^{(1)} (e_\theta^{p(0)} - e_z^{p(0)}) \right) + \\ & + \left(\sigma_r^{(0)} - \sigma_z^{(0)} \right) \left(\sigma_r^{(1)} - \sigma_z^{(1)} - c^{(1)} (e_r^{p(0)} - e_z^{p(0)}) \right) = 6k^{(0)} k^{(1)}, \end{aligned} \quad (11)$$

— полные деформации в пластической области

$$\begin{aligned}
de_r^{(1)} &= \frac{1}{E} \left[d\sigma_r^{(1)} - \frac{1}{2} \left(d\sigma_\theta^{(1)} + d\sigma_z^{(1)} \right) - \mu^{(1)} \left(\sigma_\theta^{(0)} + \sigma_z^{(0)} \right) \right] + \alpha^{(1)} dT(r) + \\
&\quad + \frac{d\lambda^{(0)}}{3} \left[2\sigma_r^{(1)} - \sigma_\theta^{(1)} - \sigma_z^{(1)} - c^{(1)} \left(2e_r^{p(0)} - e_\theta^{p(0)} - e_z^{p(0)} \right) \right] + \\
&\quad + \frac{d\lambda^{(1)}}{3} \left[2\sigma_r^{(0)} - \sigma_\theta^{(0)} - \sigma_z^{(0)} \right], \\
de_\theta^{(1)} &= \frac{1}{E} \left[d\sigma_\theta^{(1)} - \frac{1}{2} \left(d\sigma_r^{(1)} + d\sigma_z^{(1)} \right) - \mu^{(1)} \left(\sigma_r^{(0)} + \sigma_z^{(0)} \right) \right] + \alpha^{(1)} dT(r) + \\
&\quad + \frac{d\lambda^{(0)}}{3} \left[2\sigma_\theta^{(1)} - \sigma_r^{(1)} - \sigma_z^{(1)} - c^{(1)} \left(2e_\theta^{p(0)} - e_r^{p(0)} - e_z^{p(0)} \right) \right] + \\
&\quad + \frac{d\lambda^{(1)}}{3} \left[2\sigma_\theta^{(0)} - \sigma_r^{(0)} - \sigma_z^{(0)} \right], \\
de_z^{(1)} &= \frac{1}{E} \left[d\sigma_z^{(1)} - \frac{1}{2} \left(d\sigma_r^{(1)} + d\sigma_\theta^{(1)} \right) - \mu^{(1)} \left(\sigma_r^{(0)} + \sigma_\theta^{(0)} \right) \right] + \alpha^{(1)} dT(r) + \\
&\quad + \frac{d\lambda^{(0)}}{3} \left[2\sigma_z^{(1)} - \sigma_r^{(1)} - \sigma_\theta^{(1)} - c^{(1)} \left(2e_z^{p(0)} - e_r^{p(0)} - e_\theta^{p(0)} \right) \right] + \\
&\quad + \frac{d\lambda^{(1)}}{3} \left[2\sigma_z^{(0)} - \sigma_r^{(0)} - \sigma_\theta^{(0)} \right],
\end{aligned} \tag{12}$$

— граничные условия

$$\sigma_r^{(1)} \Big|_{r=a} = \sigma_r^{(1)} \Big|_{r=b} = 0, \tag{13}$$

— условия сопряжений

$$\left[\sigma_r^{(1)} + \frac{d\sigma_r^{(0)}}{dr} r_s^{(1)} \right] = \left[\sigma_\theta^{(1)} + \frac{d\sigma_\theta^{(0)}}{dr} r_s^{(1)} \right] = \left[u^{(1)} + \frac{du^{(0)}}{dr} r_s^{(1)} \right] = 0. \tag{14}$$

Получим выражений для компоненты напряжений $\sigma_z^{(1)}$.

Ввиду того, что

$$2e_z^{p(0)} - e_r^{p(0)} - e_\theta^{p(0)} = 0,$$

третье уравнение соотношения (12) можно записать в виде:

$$\begin{aligned}
d\sigma_z^{(1)} - \frac{1}{2} \left(d\sigma_r^{(1)} + d\sigma_\theta^{(1)} \right) - \mu^{(1)} \left(\sigma_r^{(0)} + \sigma_\theta^{(0)} \right) + E\alpha^{(1)} dT(r) + \\
+ \frac{Ed\lambda^{(0)}}{3} \left[2\sigma_z^{(1)} - \sigma_r^{(1)} - \sigma_\theta^{(1)} \right] = 0.
\end{aligned}$$

Обозначим $\chi^{(1)} = 2\sigma_z^{(1)} - \sigma_r^{(1)} - \sigma_\theta^{(1)}$. Тогда, предыдущее выражение примет вид

$$\frac{d\chi^{(1)}}{d\lambda^{(0)}} + \frac{2E}{3} \chi^{(1)} = 4\mu^{(1)} \frac{d\sigma_z^{(0)}}{d\lambda^{(0)}} - 2E\alpha^{(1)} \frac{dT(r)}{d\lambda^{(0)}}. \tag{15}$$

Решение дифференциального уравнения (15) имеет вид:

$$\chi^{(1)} = e^{-\frac{2}{3}E\lambda^{(0)}} \int_0^{\lambda^{(0)}} \left[4\mu^{(1)} \frac{d\sigma_z^{(0)}}{d\lambda^{(0)}} - 2E\alpha^{(1)} \frac{dT(r)}{d\lambda^{(0)}} - \right] e^{\frac{2}{3}E\lambda^{(0)}} d\lambda^{(0)} + \chi_e^{(1)},$$

где $\chi_e^{(1)} = 4\mu^{(1)}\sigma_z^{(0)} - 2E\alpha^{(1)}T(r) + 2Ee_1^{(1)}$.

Из введенного обозначения можем получить выражение для компоненты напряжений $\sigma_z^{(1)}$, где величина $\chi^{(1)}$ определяется из предыдущего уравнения:

$$\sigma_z^{(1)} = \frac{1}{2} \left(\sigma_r^{(1)} + \sigma_\theta^{(1)} + \chi^{(1)} \right).$$

Компоненты тензора напряжений и радиальное перемещение в упругой области аналогичны выражениям для задачи без упрочнения [12], с точностью до постоянной, и имеют вид.

$$\begin{aligned} u^{e(1)} &= \frac{3}{E}\mu^{(1)} \left(q - \frac{k^{(0)}r_s^{(0)}}{b^2} \right) r + \frac{3\alpha^{(1)}}{r} \int T(r)rdr - \frac{1}{2}e_1r + \frac{D}{r}, \\ \sigma_r^{e(1)} &= -\frac{2}{3}\mu^{(1)}k^{(0)}r_s^{(0)2} \left[\frac{1}{b^2} - \frac{1}{r^2} \right] - \int_r^b \frac{4E\alpha^{(1)}}{r^3} \int T(r)rdrdr + \\ &\quad + \int_r^b \frac{2E\alpha^{(1)}T(r)}{r} dr + \frac{2ED}{3} \left[\frac{1}{b^2} - \frac{1}{r^2} \right], \\ \sigma_\theta^{e(1)} &= -\frac{2}{3}\mu^{(1)}k^{(0)}r_s^{(0)2} \left[\frac{1}{b^2} + \frac{1}{r^2} \right] - \int_r^b \frac{4E\alpha^{(1)}}{r^3} \int T(r)rdrdr + \\ &\quad + \int_r^b \frac{2E\alpha^{(1)}T(r)}{r} dr + \frac{4E\alpha^{(1)}}{r^2} \int T(r)rdr - 2E\alpha^{(1)}T + \frac{2ED}{3} \left[\frac{1}{b^2} + \frac{1}{r^2} \right]. \end{aligned} \quad (16)$$

Чтобы получить соотношения для компонент напряжений $\sigma_r^{(1)}, \sigma_\theta^{(1)}$ в пластической области подставим в условие пластичности (11) введенное обозначение и учтем нулевое решение. Тогда, получим следующее выражение:

$$\sigma_\theta^{(1)} - \sigma_r^{(1)} = 2k^{(1)} + c^{(1)} \left(e_\theta^{p(0)} - e_r^{p(0)} \right). \quad (17)$$

Величина $k^{(1)}$ в (17) является функцией температуры, которая, в свою очередь, зависит от радиуса r . Разность пластических деформаций $e_\theta^{p(0)}$ и $e_r^{p(0)}$ получим из нулевого приближения. Таким образом, подставляя в (10) разность окружных и радиальных напряжений (17) учитывая граничные условия (13)

при определении постоянной интегрирования, получим уравнения для определения компонент напряжений в пластической области:

$$\begin{aligned}\sigma_r^{p(1)} &= \int_a^r \frac{2k^{(1)}}{r} dr + \frac{3k^{(0)}c^{(1)}}{E} \int_a^r \left(\frac{r_s^{(0)2}}{r^3} - \frac{1}{r} \right) dr, \\ \sigma_\theta^{p(1)} &= 2k^{(1)} + \int_a^r \frac{2k^{(1)}}{r} dr + \frac{3k^{(0)}c^{(1)}}{E} \left[\int_a^r \left(\frac{r_s^{(0)2}}{r^3} - \frac{1}{r} \right) dr + \frac{r_s^{(0)2}}{r^2} - 1 \right].\end{aligned}\quad (18)$$

Радиальное перемещение в пластической области получается из суммирования первых двух уравнений соотношения (12) и решения получившегося дифференциального уравнения:

$$u^{p(1)} = -\frac{3}{E}\mu^{(1)} \left(-p + 2k^{(0)} \ln \left(\frac{r}{a} \right) \right) r + \frac{3\alpha^{(1)}}{r} \int T(r)r dr - \frac{1}{2}e_1 r + \frac{N}{r}. \quad (19)$$

Постоянные D и N и радиус упругопластической границы определим из условия сопряжений (14):

$$\begin{aligned}D &= \frac{\mu^{(1)}}{E} k^{(0)} r_s^{(0)2} + \frac{3}{2E} \left[\int_{r_s^{(0)}}^b \frac{4E\alpha^{(1)}}{r^3} \int T(r)r dr dr - \int_{r_s^{(0)}}^b \frac{2E\alpha^{(1)}T(r)}{r} dr + \right. \\ &\quad \left. + \int_a^{r_s^{(0)}} \frac{2k^{(1)}}{r} dr + \frac{3k^{(0)}c^{(1)}}{E} \int_a^{r_s^{(0)}} \left(\frac{r_s^{(0)2}}{r^3} - \frac{1}{r} \right) dr \right] \frac{r_s^{(0)2} b^2}{r_s^{(0)2} - b^2}, \\ N &= -\frac{2\mu^{(1)}}{E} k^{(0)} r_s^{(0)2} + \frac{3}{2E} \left[\int_{r_s^{(0)}}^b \frac{4E\alpha^{(1)}}{r^3} \int T(r)r dr dr - \right. \\ &\quad \left. - \int_{r_s^{(0)}}^b \frac{2E\alpha^{(1)}T(r)}{r} dr + \int_a^{r_s^{(0)}} \frac{2k^{(1)}}{r} dr + \frac{3k^{(0)}c^{(1)}}{E} \int_a^{r_s^{(0)}} \left(\frac{r_s^{(0)2}}{r^3} - \frac{1}{r} \right) dr \right] \frac{r_s^{(0)2} b^2}{r_s^{(0)2} - b^2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r_s^{(1)} = & \left\{ \left[\int_{r_s^{(0)}}^b \frac{4E\alpha^{(1)}}{r^3} \int T(r)r dr dr - \int_{r_s^{(0)}}^b \frac{2E\alpha^{(1)}T(r)}{r} dr + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{3k^{(0)}c^{(1)}}{E} \int_a^r \left(\frac{r_s^{(0)2}}{r^3} - \frac{1}{r} \right) dr \right] \frac{2b^2}{r_s^{(0)2} - b^2} + \right. \\
& \left. + \int_{r=r_s^{(0)}} \frac{4E\alpha^{(1)}}{r_s^{(0)}} T(r)r dr - 2E\alpha^{(1)}T(r_s^{(0)}) - \int_a^{r_s^{(0)}} \frac{2k^{(1)}}{r} dr - 2k^{(1)}(r_s^{(0)}) \right\} \frac{r_s^{(0)}}{4k^{(0)}}.
\end{aligned}$$

Подставим постоянные D и N в искомые выражения. Таким образом, имея необходимые выражения в нулевом приближении, выведенные соотношения (16), (18), (19) в первом приближении, согласно введенному разложению (9), можем получить искомые соотношения для полей напряжений и перемещения в упругой и пластической областях в виде:

— радиальная и окружная компоненты тензора напряжений в пластической области

$$\sigma_r^p = -p + 2k^{(0)} \ln \left(\frac{r}{a} \right) + \delta \left[\int_a^r \frac{2k^{(1)}}{r} dr + \frac{3k^{(0)}c^{(1)}}{E} \int_a^r \left(\frac{r_s^{(0)2}}{r^3} - \frac{1}{r} \right) dr \right],$$

$$\begin{aligned}
\sigma_\theta^p = & -p + 2k^{(0)} \left(1 + \ln \left(\frac{r}{a} \right) \right) + \\
& + \delta \left[2k^{(1)} + \int_a^r \frac{2k^{(1)}}{r} dr + \frac{3k^{(0)}c^{(1)}}{E} \left[\int_a^r \left(\frac{r_s^{(0)2}}{r^3} - \frac{1}{r} \right) dr + \frac{r_s^{(0)2}}{r^2} - 1 \right] \right],
\end{aligned}$$

— радиальная и окружная компоненты тензора напряжений в упругой области

$$\begin{aligned}
\sigma_r^e = & -q + k^{(0)}r_s^{(0)2} \left[\frac{1}{b^2} - \frac{1}{r^2} \right] + \delta \left\{ \left[\int_{r_s^{(0)}}^b \frac{4E\alpha^{(1)}}{r^3} \int T(r)r dr dr - \int_{r_s^{(0)}}^b \frac{2E\alpha^{(1)}T(r)}{r} dr \right. \right. \\
& + \int_a^{r_s^{(0)}} \frac{2k^{(1)}}{r} dr + \frac{3k^{(0)}c^{(1)}}{E} \int_a^{r_s^{(0)}} \left(\frac{r_s^{(0)2}}{r^3} - \frac{1}{r} \right) dr \left. \right] \frac{r_s^{(0)2}}{r^2} \frac{r^2 - b^2}{r_s^{(0)2} - b^2} - \\
& \left. - \int_r^b \frac{4E\alpha^{(1)}}{r^3} \int T(r)r dr dr + \int_r^b \frac{2E\alpha^{(1)}T(r)}{r} dr \right\},
\end{aligned}$$

$$\sigma_{\theta}^e = -q + k^{(0)} r_s^{(0)2} \left[\frac{1}{b^2} + \frac{1}{r^2} \right] + \delta \left\{ \left[\int_{r_s^{(0)}}^b \frac{4E\alpha^{(1)}}{r^3} \int T(r) r dr dr - \int_{r_s^{(0)}}^b \frac{2E\alpha^{(1)} T(r)}{r} dr + \right. \right. \\ \left. \left. + \int_a^{r_s^{(0)}} \frac{2k^{(1)}}{r} dr + \frac{3k^{(0)} c^{(1)}}{E} \int_a^{r_s^{(0)}} \left(\frac{r_s^{(0)2}}{r^3} - \frac{1}{r} \right) dr \right] \frac{r_s^{(0)2}}{r^2} \frac{r^2 + b^2}{r_s^{(0)2} - b^2} - \right. \\ \left. - \int_r^b \frac{4E\alpha^{(1)}}{r^3} \int T(r) r dr dr + \int_r^b \frac{2E\alpha^{(1)} T(r)}{r} dr + \frac{4E\alpha^{(1)}}{r^2} \int T(r) r dr - 2E\alpha^{(1)} T(r) \right\},$$

— радиальное перемещение в пластической области

$$u^p = \frac{3k^{(0)} r_s^{(0)2}}{2Er} + \delta \left[-\frac{3}{E} \mu^{(1)} \left(-p + 2k^{(0)} \ln \left(\frac{r}{a} \right) \right) r + \frac{3\alpha^{(1)}}{r} \int T(r) r dr - \frac{1}{2} e_1 r + \right. \\ \left. + \frac{1}{r} \left\{ -\frac{2\mu^{(1)}}{E} k^{(0)} r_s^{(0)2} + \frac{3}{2E} \left[4E\alpha^{(1)} \int_{r_s^{(0)}}^b \frac{1}{r^3} \int T(r) r dr dr - \right. \right. \right. \\ \left. \left. - 2E\alpha^{(1)} \int_{r_s^{(0)}}^b \frac{T(r)}{r} dr + \int_a^{r_s^{(0)}} \frac{2k^{(1)}}{r} dr + \frac{3k^{(0)} c^{(1)}}{E} \int_a^r \left(\frac{r_s^{(0)2}}{r^3} - \frac{1}{r} \right) dr \right] \frac{r_s^{(0)2} b^2}{r_s^{(0)2} - b^2} \right\} \right].$$

— радиальное перемещение в упругой области

$$u^e = \frac{3k^{(0)} r_s^{(0)2}}{2Er} + \delta \left[\frac{3}{E} \mu^{(1)} \left(q - \frac{k^{(0)} r_s^{(0)}}{b^2} \right) r + \frac{3\alpha^{(1)}}{r} \int T(r) r dr - \frac{1}{2} e_1 r + \right. \\ \left. + \frac{1}{r} \left\{ \frac{\mu^{(1)}}{E} k^{(0)} r_s^{(0)2} + \frac{3}{2E} \left[4E\alpha^{(1)} \int_{r_s^{(0)}}^b \frac{1}{r^3} \int T(r) r dr dr - \right. \right. \right. \\ \left. \left. - 2E\alpha^{(1)} \int_{r_s^{(0)}}^b \frac{T(r)}{r} dr + \int_a^{r_s^{(0)}} \frac{2k^{(1)}}{r} dr + \frac{3k^{(0)} c^{(1)}}{E} \int_a^r \left(\frac{r_s^{(0)2}}{r^3} - \frac{1}{r} \right) dr \right] \frac{r_s^{(0)2} b^2}{r_s^{(0)2} - b^2} \right\} \right].$$

Заключение В ходе проведенного исследования получены выражения для компонент напряжений, перемещений и радиуса упругопластической границы упрочняющейся трубы при радиальном изменении температуры. Полученные решения, представленные в нулевом и первом приближениях, позволяют оценить влияние температурных эффектов на механическое поведение трубы. Данные результаты могут быть использованы для повышения точности расчетов и

проектирования конструкций, работающих в условиях сложных термомеханических нагрузок. В случае, когда предел текучести принимается постоянным, результаты соответствуют известным решениям. Дальнейшие исследования могут быть направлены на учет других факторов, таких как зависимость модуля упругости от температуры или рассмотрение более сложных геометрий.

ДОПОЛНИТЕЛЬНО

Вклад авторов. А. В. Ковалев – постановка задачи, редактирование текста рукописи, Ю. В. Малыгина – построение математической модели, решение поставленной задачи, написание текста рукописи

Конфликт интересов. Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

Источник финансирования. Авторы заявляют об отсутствии внешнего финансирования при проведении исследования.

ADDITIONAL INFORMATION

Authors' contribution. A. V. Kovalev building a mathematical model, editing the text of the manuscript, Y. V. Malygina building a mathematical model, solving the problem, writing the text of the manuscript.

Competing interests. The authors declare that they have no competing interests.

Funding. This study was not supported by any external sources of funding.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ткачева А. В. Влияние выбора зависимости предела текучести от температуры на объёмы необратимого деформирования в материалах сборки, полученной в результате горячей посадки // Материалы Всероссийской научно-технической конференции студентов, аспирантов и молодых учёных. Томск : В-Спектр, 2015. С. 34–37.
- [2] Дац Е. П., Ткачева А. В. Математическая модель процесса горячей посадки цилиндрических деталей // Материалы VIII Всероссийской конференции по механике деформируемого твёрдого тела. Чебоксары : Чувашский государственный педагогический университет им. И.Я. Яковлева, 2014. С. 198–200.
- [3] Даниловская В. И. Упругопластическая симметричная деформация толстостенной трубы с учётом неравномерности распределения температуры вдоль радиуса // Прикладная механика. 1965. № 6. С. 8–13.
- [4] Ковалев А.В., Малыгина Ю.В. К определению напряженно-деформированного состояния в упрочняющейся упругопластической трубе с учетом температуры и сжимаемости материала // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики : сборник трудов Международной научной конференции. Воронеж : Воронежский государственный университет, 2021. С. 1306–1311.
- [5] Гоцев Д.В., Ковалев А.В., Малыгина Ю.В. К расчету упрочняющейся сжимаемой упругопластической трубы с учетом температуры // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики : сборник трудов Международной научной конференции. Воронеж : Воронежский государственный университет, 2022. С. 1191–1195.
- [6] Ковалев А. В., Малыгина Ю.В. Об учете зависимости предела текучести от температуры при решении задачи о термдеформировании трубы // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2023. № 3(57). С. 74–83.
- [7] Паркус Г. Неустановившиеся температурные напряжения. Перевод с немецкого. Москва : Физматлит, 1963. 253 с.

- [8] Мелан Э., Паркус Г. Температурные напряжения, вызываемые стационарными температурными полями. Москва : Физматгиз, 1958. 167 с.
- [9] Ивлев Д. Д., Ершов Л. В. Метод возмущений в теории упругопластического тела. Москва : Наука, 1978. 208 с.

REFERENCES

- [1] Tkacheva A. V. The influence of the choice of the dependence of the yield strength on temperature on the volume of irreversible deformation in the materials of the assembly obtained as a result of shrink fit // Materials of the All-Russian Scientific and Technical Conference of Students, Postgraduate Students and Young Scientists. Tomsk : V-Spectrum, 2015. C. 34–37.
- [2] Dats E. P., Tkacheva A. V. Mathematical model of the process of hot fitting of cylindrical parts // Proceedings of the VIII All-Russian Conference on Mechanics of Deformable Solids. Cheboksary : Bulletin of the Chuvash State Pedagogical University named after. AND I. Yakovleva. Series: Limit State Mechanics, 2014. C. 198–200.
- [3] Danilovskaya V. I. Elastoplastic symmetric deformation of a thick-walled tube with consideration of non-uniform temperature distribution along the radius // Applied Mechanics. 1965. № 6. C. 8–13.
- [4] Kovalev A.V., Malygina Y.V. Determination of the stress-strain state in a hardening elastic-plastic tube with regard to temperature and compressibility of the material // International Conference "Applied Mathematics, Computational Science and Mechanics: Current Problems AMCSM. Voronezh : Voronezh State University, 2021. C. 1306–1311.
- [5] Gotsev D.V., Kovalev A.V., Malygina Y.V. Calculation of hardening compressible elastic-plastic pipe with consideration of temperature // International Conference "Applied Mathematics, Computational Science and Mechanics: Current Problems AMCSM. Voronezh, 2022. C. 1191–1195.
- [6] Kovalev A.V., Malygina Y.V. On taking into account the temperature dependence of yield strength when solving the problem of thermal deformation of a pipe // Bulletin of I.Y. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State. 2023. № 3(57). C. 74–83.
- [7] Parkus G. Nonsteady Temperature Stresses. Moscow : Fizmatlit, 1963. 253 с.
- [8] Melan E., Parkus G. Thermoelastic stresses caused by stationary temperature fields. Moscow : Fizmatgiz, 1958. 167 с.
- [9] Ivlev D.D., Yershov L.V. Perturbing approximation in theory of elastoplastic body. Moscow : Science, 1978. 208 с.
- [10] Ivlev D. D., Makarov E. V., Marushkey Yu. M. On the plasticity conditions of a compressible elastoplastic material under plane strain // A Journal of Russian Academy of Sciences. 1978. № 4. C. 80–87.
- [11] Andreeva Y. V., Vnukov A. N., Kovalev A. V. Determining the stress state of elastoplastic pipe considering temperature effects and compressibility // All-Russian Scientific School-Conference "Mechanics of Marginal State and Related Issues dedicated to the 85th anniversary of Professor D.D. Ivlev. Чебоксары : I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, 2015. C. 167–172.
- [12] Andreeva Y. V., Vnukov A. N., Kovalev A. V. To the calculation of a compressible elastic-plastic pipe // International Conference "Applied Mathematics, Computational Science and Mechanics: Current Problems AMCSM. Voronezh : Voronezh State University, 2016. C. 153–155.