DOI: 10.37972/chgpu.2025.63.1.009 *EDN: NHERMI*

Научная статья *УДК: 531.36*

К. Н. Пестов[1,2], *М. А. Гузев*[3], *О. Н. Любимова*[4,2]

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА УРАВНЕНИЙ БЕЛЬТРАМИ-МИТЧЕЛЛА

[1]*Владивостокский филиал Российской таможенной академии, Владивосток, Россия*

[2]*Хабаровское отделение Института прикладной математики ДВО РАН, Хабаровск, Россия*

[3]*Институт прикладной математики ДВО РАН, Владивосток, Россия*

[4]*Дальневосточный федеральный университет, Владивосток, Россия*

Аннотация. В работе показано, что классические уравнения в напряжениях теории упругости – уравнения Бельтрами-Митчелла, являются компонентами тензора Риччи в линейном порядке по деформациям при условии выполнения уравнений равновесия, закона Гука, а так же гипотезы о евклидовости пространства метриального континуума. Доказана что дивергенция этого тензора равна нулю. Получена связь тензора Риччи с тензором деформаций, актуальная для описания структурно-деформационных особенностей механического поведения различных материалов на основе неевклидовой геометрии. Показано, что в классическом упругом случае тензор Риччи совпадает с тензором Энштейна.

Ключевые слова: тензор Риччи, тензор Эйнштейна, уравнения Бельтрами-Митчелла, условия совместности Сен-Венана.

Пестов Константин Николаевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры информатики и информационных таможенных технологий ВФ РТА; `e-mail:` kopestov@yandex.ru; `https://orcid.org/0009-0005-4669-3070`; AuthorID: 589056

Гузев Михаил Александрович, доктор физико-математических наук, академик РАН, профессор, директор ИПМ ДВО РАН; `e-mail:` guzev@iam.dvo.ru; `https://orcid.org/0000-0001-9344-154X`; AuthorID: 3404

Любимова Ольга Николаевна, доктор физико-математических наук, профессор, профессор Политехнического института и Института математики и компьютерных технологий ДВФУ; `e-mail:` lyubimova@dvfu.ru; `https://orcid.org/0000-0003-4802-7352`; AuthorID: 372335

для цитирования: *Пестов К. Н., Гузев М. А., Любимова О. Н.* Геометрическая структура уравнений Бельтрами-Митчелла // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2025. № 1(63). С. 100–108. DOI: 10.37972/chgpu.2025.63.1.009. EDN: NHERMI

Поступила: 01.02.25; *принята в печать: 14.04.25;* *опубликована: 17.06.25.*

Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost.

DOI: 10.37972/chgpu.2025.63.1.009 *EDN: NHERMI*

Research Article

K. N. Pestov[1,2], *M. A. Guzev*[3], *O. N. Luybimova*[4,2]

GEOMETRIC STRUCTURE OF THE BELTRAMI-MITCHELL EQUATIONS

[1]*I.N Russian Customs Academy Vladivostok Branch, Vladivostok, Russia*

[2]*I.N. Khabarovsk Division of the Institute of Applied Mathematics, Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences, Vladivostok, Russia*

[3]*I.N. Institute for Applied Mathematics Far Eastern Branch of Russian Academy Sciences, Vladivostok, Russia*

[4]*I.N. Far Eastern Federal University, Vladivostok, Russia*

Abstract. The paper demonstrates that the classical equations of stress in elasticity theory, known as the Beltrami–Mitchell equations, can be expressed as components of the Ricci tensor when considering linear deformations. This is provided that the conditions of equilibrium, Hooke's law, and the assumption of a Euclidean space for the material continuum are satisfied. It is proven that the divergence of the Ricci tensor is zero in this case. A relationship between the Ricci tensor and the strain tensor is derived, which is significant for describing the structural and deformational characteristics of the mechanical behavior of materials based on non-Euclidean geometries. It is demonstrated that in the elastic case, the Ricci tensor equals the Einstein tensor.

Keywords: Ricci tensor, Einstein tensor, Beltrami-Mitchell equations, compatibility conditions of Saint-Venant.

Konstantin N. Pestov, Candidate of Physical and Mathematical Sciences; `e-mail:` kopestov@yandex.ru;
`https://orcid.org/0009-0005-4669-3070`; AuthorID: 589056

Mihail A. Guzev, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor; `e-mail:` guzev@iam.dvo.ru;
`https://orcid.org/0000-0001-9344-154X`; AuthorID: 3404

Olga N. Lyubimova, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor; `e-mail:` lyubimova@dvfu.ru;
`https://orcid.org/0000-0003-4802-7352`; AuthorID: 372335

to cite this article: *Pestov K. N., Guzev M. A., Luybimova O. N.* Geometric structure of the Beltrami-Mitchell equations // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2025. No 1(63). p. 100–108. DOI: 10.37972/chgpu.2025.63.1.009

Received: 01.02.25; *accepted: 14.04.25;* *published: 17.06.25.*

Введение. Классическими тензорными объектами, описывающими состояние сплошной среды в теории упругости, являются вектор перемещения, тензоры деформаций и напряжений. Но уже в присутствии различных дефектных структур возникает необходимость в расширении гипотез механики сплошной среды и во введении новых тензорных объектов. В классических моделях континуальное рассмотрение сплошной среды равносильно гипотезе евклидовости материального континуума, что соответствует тривиальности тензора Римана, в линейном приближении по деформациям это совпадает с уравнениями совместности Сен-Венана [1,2]. Следствием совместности деформаций, линейности упругого континуума являются уравнения Бельтрами-Митчелла [3]

$$\Delta\hat{\sigma} + \frac{1}{1+\nu}\nabla\nabla Tr(\hat{\sigma}) + \nabla\vec{F} + (\nabla\vec{F})^T + \frac{\nu}{1-\nu}\hat{g}\nabla\cdot\vec{F} = 0, \tag{1}$$

где ν - коэффициент Пуассона, $\hat{\sigma}$ тензор напряжений, $\vec{F}$ - вектор внешних объемных сил, $(\nabla\vec{F})^T$ - транспонированный тензор к $\nabla\vec{F}$, $\hat{g}$ - метрический тензор, ∇, Δ - соответственно операторы Гамильтона и Лапласа, $(\cdot\,)$ - скалярное произведение.

Уравнения (1) в классических учебниках [1,2] являются результатом, дифференцирования, группировки и комбинации уравнений равновесия, совместности и закона Гука, в [4] получены из вариационного принципа Кастильяно. В работе [5] делается попытка обобщения этих уравнений для римановых пространств с неевклидовой метрикой в отчетной конфигурации путем преобразования компонент тензора Римана, но как и для классического случая в условиях совместности деформаций.

Однако, известно, что упругая деформация в общем случае не является совместной [6]. Тогда возникает естественная задача рассмотреть как изменятся классические уравнения Бельтрами-Митчелла для несовместных упругих деформаций. Так как условия Сен-Венана эквивалентны тривиальности тензора Римана, то соответственно отказ от их выполнения приводит к необходимости анализа его ненулевых компонент. Для трехмерного пространства тензор кривизны Римана полностью определяется симметричным тензором второго ранга - тензором Риччи $\hat{R}$ [7].

$$R_{ij} = R^k{}_{ijk},$$
$$R_{ijkl} = R_{ik}g_{jl} - R_{il}g_{jk} + R_{jl}g_{ik} - R_{jk}g_{il} + \frac{R}{2}\left(g_{il}g_{jk} - g_{ik}g_{jl}\right), i, j, k, l = 1, 2, 3,$$

где $R = Tr(\hat{R}) = R_{mn}g^{mn}$ - след тензора Риччи (скалярная кривизна),g_{jk} - компоненты $\hat{g}$. Следовательно, необходим анализ связи тензора Риччи с тензорами деформаций и напряжений.

Основная идея получения тензора Риччи в напряжениях через последовательное вычисление метрики, связности при условии линейных реологических соотношений для деформированного состояния и определило структуру настоящей работы. В результате, во-первых, показано, что в классическом случае условия равенства нулю компонент тензора Риччи являются уравнениями Бельтрами-Митчелла. Во-вторых, получено обобщение уравнений Бельтрами-Митчелла на неевклидовые модели.

1. Связь тензора Риччи с тензорным полем деформаций. Пусть сплошная среда в недеформированном состоянии описывается в некоторой криволинейной системе координат (x^1, x^2, x^3) с компонентами метрического тензора g_{ij} и компонентами связности Леви-Чивита Γ^i_{kl}, компоненты тензора Риччи R_{jk} в данном случае равны нулю.

В деформированном состоянии компоненты метрического тензора $\tilde{g}_{ij}$ и компоненты связности $\tilde{\Gamma}^i_{kl}$, ассоциированной с этой метрикой, определяют тензор Риччи с компонентами

$$\tilde{R}_{jk} = \frac{\partial \tilde{\Gamma}^i_{ji}}{\partial x^k} - \frac{\partial \tilde{\Gamma}^i_{jk}}{\partial x^i} + \tilde{\Gamma}^i_{km}\tilde{\Gamma}^m_{ji} - \tilde{\Gamma}^i_{im}\tilde{\Gamma}^m_{jk}, \tag{2}$$

где компоненты связности Леви-Чивита равны

$$\tilde{\Gamma}^i_{kl} = \frac{1}{2}\tilde{g}^{im}\left(\frac{\partial \tilde{g}_{mk}}{\partial x^l} + \frac{\partial \tilde{g}_{ml}}{\partial x^k} - \frac{\partial \tilde{g}_{kl}}{\partial x^m}\right). \tag{3}$$

Компоненты метрических тензоров в деформированном и недеформированном состояниях связаны через компоненты тензора деформации ε_{ij} [8]

$$\tilde{g}_{ij} = g_{ij} + 2\varepsilon_{ij}. \tag{4}$$

Компоненты обратной метрики в линейном приближении

$$\tilde{g}^{ij} = g^{ij} - 2\varepsilon^{ij}. \tag{5}$$

Подставляя (4) и (5) в (3) и ограничиваясь первым порядком по деформациям, имеет место равенство

$$\begin{gathered}\tilde{\Gamma}^i_{kl} = \frac{1}{2}g^{im}\left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{ml}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m}\right) + g^{im}\left(\frac{\partial \varepsilon_{mk}}{\partial x^l} + \frac{\partial \varepsilon_{ml}}{\partial x^k} - \frac{\partial \varepsilon_{kl}}{\partial x^m}\right) - \\ -\varepsilon^{im}\left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{ml}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m}\right) = \Gamma^i_{kl} + g^{im}\left(\frac{\partial \varepsilon_{mk}}{\partial x^l} + \frac{\partial \varepsilon_{ml}}{\partial x^k} - \frac{\partial \varepsilon_{kl}}{\partial x^m}\right) - 2\varepsilon^{im}\Gamma_{mkl}.\end{gathered} \tag{6}$$

Используя операции поднятия и опускания индексов

$$\varepsilon^{im}\Gamma_{mkl} = \varepsilon_{mp}g^{im}\Gamma^p_{kl}$$

выражение (6) преобразуется к виду

$$\tilde{\Gamma}^i_{kl} = \Gamma^i_{kl} + g^{im}\left(\underbrace{\frac{\partial \varepsilon_{mk}}{\partial x^l} - \Gamma^p_{kl}\varepsilon_{mp} - \Gamma^p_{ml}\varepsilon_{pk}}_{\nabla_l \varepsilon_{mk}} + \underbrace{\frac{\partial \varepsilon_{ml}}{\partial x^k} - \Gamma^p_{kl}\varepsilon_{mp} - \Gamma^p_{km}\varepsilon_{pl}}_{\nabla_k \varepsilon_{ml}}\right) -$$
$$-g^{im}\underbrace{\left(\frac{\partial \varepsilon_{kl}}{\partial x^p} - \Gamma^p_{km}\varepsilon_{pl} - \Gamma^p_{ml}\varepsilon_{pk}\right)}_{\nabla_m \varepsilon_{kl}} = \Gamma^i_{kl} + \nabla_l \varepsilon^i_k + \nabla_k \varepsilon^i_l - \nabla^i \varepsilon_{kl}.$$

Обозначая симметричный по нижним индексам тензор аффинной деформации [9]

$$E^i_{kl} = \nabla_l \varepsilon^i_k + \nabla_k \varepsilon^i_l - \nabla^i \varepsilon_{kl}, \tag{7}$$

получается

$$\tilde{\Gamma}^i_{kl} = \Gamma^i_{kl} + E^i_{kl} \tag{8}$$

Подставляя (8) в формулу компонент тензора Риччи (2) и проводя вычисления

$$\tilde{R}_{jk} = \frac{\partial(\Gamma^i_{ji} + E^i_{ji})}{\partial x^k} - \frac{\partial(\Gamma^i_{jk} + E^i_{jk})}{\partial x^i} + \left(\Gamma^i_{km} + E^i_{km}\right)\left(\Gamma^m_{ji} + E^m_{jl}\right) - \left(\Gamma^i_{im} + E^i_{im}\right)\left(\Gamma^m_{jk} + E^m_{jk}\right) =$$
$$= R_{jk} + \frac{\partial E^i_{ji}}{\partial x^k} - \frac{\partial E^i_{jk}}{\partial x^i} + \Gamma^i_{km}E^m_{ji} + \Gamma^m_{ji}E^i_{km} - \Gamma^m_{jk}E^i_{im} - \Gamma^i_{im}E^m_{jk} + E^i_{km}E^m_{ji} - E^m_{jk}E^i_{im} =$$
$$= \frac{\partial E^i_{ji}}{\partial x^k} - \Gamma^m_{jk}E^i_{im} - \left(\frac{\partial E^i_{jk}}{\partial x^i} - \Gamma^i_{km}E^m_{ji} - \Gamma^m_{ji}E^i_{km} + \Gamma^i_{im}E^m_{jk}\right) + E^i_{km}E^m_{ji} + E^m_{jk}E^i_{im} =$$
$$= \nabla_k E^i_{ji} - \nabla_i E^i_{jk} + E^i_{km}E^m_{ji} - E^m_{jk}E^i_{im},$$

или в тензорной форме

$$\tilde{\hat{R}} = \nabla Tr(\hat{E}) - \nabla\cdot \hat{E} + \hat{E}\cdot\cdot \hat{E} - \hat{E}\cdot Tr(\hat{E}). \tag{9}$$

Формула (9) аналогична выражению для закона преобразования тензора Римана при деформации метрики без кручения [9], ограничиваясь первым порядком, имеем

$$\tilde{R}_{jk} = \nabla_k E^i_{ji} - \nabla_i E^i_{jk}.$$

Возвращаясь к деформациям по формулам (7)

$$\tilde{R}_{jk} = \nabla_k\left(\nabla_j \varepsilon^i_i + \nabla_i \varepsilon^i_j - \nabla^i \varepsilon_{ij}\right) - \nabla_i\left(\nabla_j \varepsilon^i_k + \nabla_k \varepsilon^i_j - \nabla^i \varepsilon_{jk}\right) =$$
$$= \nabla_k\nabla_j \varepsilon^i_i + \nabla_k\nabla_i \varepsilon^i_j - \nabla_k\nabla^i \varepsilon_{ij} - \nabla_i\nabla_j \varepsilon^i_k - \nabla_i\nabla_k \varepsilon^i_j + \nabla_i\nabla^i \varepsilon_{jk} =$$
$$= \nabla_k\nabla_j \varepsilon^i_i + \nabla_i\nabla^i \varepsilon_{jk} - \left(\nabla^i\nabla_j \varepsilon_{ik} + \nabla^i\nabla_k \varepsilon_{ij}\right).$$

Тензор Риччи может быть переписан в виде

$$\tilde{\hat{R}} = \Delta\hat{\varepsilon} + \nabla\nabla Tr(\hat{\varepsilon}) - \nabla(\nabla\cdot\hat{\varepsilon}) - \left(\nabla(\nabla\cdot\hat{\varepsilon})\right)^T. \tag{10}$$

Симметричность правой части обеспечивается симметричностью тензора деформаций, евклидовостью исходного пространства, в котором ковариантные производные коммутируют, а также симметризацией выражения $\nabla\left(\nabla\cdot\hat{\varepsilon}\right)$.

2. Связь тензора Риччи с полем напряжений. Закон Гука через коэффициенты Ламэ в тензорном виде

$$\hat{\varepsilon}=\frac{1}{2\mu}\left(\hat{\sigma}-\frac{\lambda}{3\lambda+2\mu}Tr(\hat{\sigma})\hat{g}\right).$$

Тогда тензор Риччи (10) приводится к виду

$$\hat{R}=\frac{1}{2\mu}\left(\Delta\hat{\sigma}+\frac{2\lambda+2\mu}{3\lambda+2\mu}\nabla\nabla Tr(\hat{\sigma})-\frac{\lambda}{3\lambda+2\mu}\Delta Tr(\hat{\sigma})\hat{g}-\nabla(\nabla\cdot\hat{\sigma})-\left(\nabla(\nabla\cdot\hat{\sigma})\right)^{T}\right), \tag{11}$$

что аналогично покомпонентной связи тензора Риччи с напряжениями полученной для декартовой системе координат в работе [10].

3. Уравнения Бельтрами-Митчелла. При выполнении уравнений равновесия

$$\nabla\cdot\hat{\sigma}+\vec{F}=0$$

тензор Риччи (11) преобразуется в

$$\hat{R}=\frac{1}{2\mu}\left(\Delta\hat{\sigma}+\frac{2\lambda+2\mu}{3\lambda+2\mu}\nabla\nabla Tr(\hat{\sigma})-\frac{\lambda}{3\lambda+2\mu}\Delta Tr(\hat{\sigma})\hat{g}+\nabla\vec{F}+\left(\nabla\vec{F}\right)^{T}\right). \tag{12}$$

В механике сплошной среды хорошо известно, что шесть компонент тензора деформаций удовлетворяют дополнительным ограничениям, которые называются условиями совместности Сен-Венана. Эти условия сводятся к тому, что тензор Римана вычисленный для метрического тензора деформированного состояния и соответствующие ему тензор Риччи и скалярная кривизна обращаются в нуль. Используя условие равенства скалярной кривизны нулю

$$\frac{1}{\mu}\left(\frac{\lambda+2\mu}{3\lambda+2\mu}\Delta Tr(\hat{\sigma})-\nabla\cdot\left(\nabla\cdot\hat{\sigma}\right)\right)=0 \tag{13}$$

в компонентах тензора Риччи (12) можно исключить слагаемое $\Delta Tr(\hat{\sigma})$ и получить

$$\hat{R}=\frac{1}{2\mu}\left(\Delta\hat{\sigma}+\frac{2\lambda+2\mu}{3\lambda+2\mu}\nabla\nabla Tr(\hat{\sigma})+\nabla\vec{F}+\left(\nabla\vec{F}\right)^{T}+\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\hat{g}\nabla\cdot\vec{F}\right). \tag{14}$$

Равенство нулю тензора Риччи (14) и есть уравнения Бельтрами-Митчелла

$$\Delta\hat{\sigma}+\frac{2\lambda+2\mu}{3\lambda+2\mu}\nabla\nabla Tr(\hat{\sigma})+\nabla\vec{F}+\left(\nabla\vec{F}\right)^{T}+\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\hat{g}\nabla\cdot\vec{F}=0. \tag{15}$$

Итак, компоненты тензора Риччи в линейной теории упругости в напряжениях имеют вид ненулевых составляющих уравнений Бельтрами-Митчелла.

4. Структура уравнений Бельтрами-Митчелла При отсутствии объемных сил уравнение (15) сведется к

$$\hat{R}^e = \frac{1}{2\mu}\left(\Delta\hat{\sigma} + \frac{2\lambda+2\mu}{3\lambda+2\mu}\nabla\nabla Tr(\hat{\sigma})\right) = 0.$$

Естественным образом, возникает вопрос о том, является ли симметричный тензор второго ранга

$$\hat{R}^f = \frac{1}{2\mu}\left(\nabla\vec{F} + \left(\nabla\vec{F}\right)^T + \frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\hat{g}\nabla\cdot\vec{F}\right)$$

тензором Риччи. Для выяснения этого необходимо проверить дифференциальное тождество Бианки

$$\nabla\cdot\hat{R} = \frac{1}{2}\nabla Tr(\hat{R}). \tag{16}$$

Вычисление правой части (16) дает

$$\frac{1}{2}\nabla R^f = \frac{1}{4\mu}\nabla\left(\nabla^i F_i + \nabla^i F_i + \frac{\lambda}{\lambda+2\mu}g_i^i\nabla^k F_k\right) = \frac{5\lambda+4\mu}{4\mu(\lambda+2\mu)}\nabla(\nabla\cdot\vec{F}).$$

Вычисление левой части (16) дает

$$\nabla\cdot\hat{R}^f = \frac{1}{2\mu}\left(\Delta\vec{F} + \frac{2\lambda+2\mu}{\lambda+2\mu}\nabla(\nabla\cdot\vec{F})\right).$$

Очевидно, равенство (16) не выполняется, из чего следует что тензор Риччи (14) не может быть аддитивно представлен как сумма тензоров $\hat{R}^e + \hat{R}^f$ без потери структуры.

Таким образом, запись уравнений Бельтрами-Митчелла в виде (1) теряет структуру тензора Риччи, в то время как вид (14) сохраняет ее в части выполнения тождества (16).

Используя тензор Риччи в виде (11), можно вычислить тензор Эйнштейна

$$\hat{G} = \hat{R} - \frac{R}{2}\hat{g},$$

который обладает тем свойством, что его дивергенция равна нулю

$$\nabla\cdot\hat{G} = 0. \tag{17}$$

В классическом евклидовом случае с учетом (12) и тензор Эйнштейна совпадает с тензором Риччи.

Нетрудно проверить, что (17) с учетом (13) тождественно выполняется для (14)

$$\nabla\cdot\hat{G} = \frac{1}{2\mu}\nabla\cdot\left(\Delta\hat{\sigma} + \frac{2\lambda+2\mu}{3\lambda+2\mu}\nabla\nabla Tr(\hat{\sigma}) + \nabla\vec{F} + \left(\nabla\vec{F}\right)^T + \frac{\lambda}{\lambda+2\mu}(\nabla\cdot\vec{F})\hat{g}\right) =$$

$$= \frac{1}{2\mu}\left(\Delta(\nabla\cdot\hat{\sigma}) + \Delta\vec{F} + \frac{2\lambda+2\mu}{3\lambda+2\mu}\nabla\left(-\frac{3\lambda+2\mu}{\lambda+2\mu}\nabla\cdot\vec{F}\right) + \nabla(\nabla\cdot\vec{F}) + \frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\nabla(\nabla\cdot\vec{F})\right) = 0.$$

Таким образом, показано, что (16) и (17) тождественно выполняются для уравнений Бельтрами-Митчелла.

ДОПОЛНИТЕЛЬНО

Вклад авторов. Вклад авторов равноценен.
Конфликт интересов. Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.
Источник финансирования. Работа выполнена в рамках государственного задания ИПМ ДВО РАН № 075-00459-25-00.

ADDITIONAL INFORMATION

Authors' contribution. The authors' contributions are equal.
Competing interests. The authors declare that they have no competing interests.
Funding. The research was carried out within the state assignment for IAM FEB RAS N 075-00459-25-00.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Работнов Ю. Н. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1988.
[2] Годунов С. К. Раменский Е. И. Элементы механики сплошных сред и законы сохранения. Новосибирск. Научная книга, 1998.
[3] Елисеев В. В. Механика упругих тел. СПб.:Изд-во СПбГТУ, 1999
[4] Немцев Е. А., Галимов К. З. Вывод динамических условий совместности напряжений из вариационного принципа Кастильяно // Исслед. по теор.пластин и оболочек. 1973. № 10. С. 332–337
[5] Азанов Н. П. Уравнения совместности Сен-Венана и Бельтрами–Митчелла в римановом пространств // Тр. геом. сем. 1989. № 19. С. 9–13
[6] Мясников В. П., Гузев М. А. Геометрическая модель дефектной структуры упругопластической сплошной среды // Прикл. мех. техн. физ. 1999. № 40(2). С. 163–173
[7] Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия: Методы и приложения. М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986
[8] Седов Л. И. Математические методы построения новых моделей сплошных сред // УМН. 1965. № 20(5). С. 121–180
[9] Норден А. П. Пространства аффинной связности. М.: Наука. 1976
[10] Гузев М. А., Мясников В. П. Неевклидова структура поля внутренних напряжений сплошной среды // Дальневост. матем. журн. 2001. № 2(2). С. 29–44

REFERENCES

[1] Rabotnov Yu. N. Mekhanika deformiruemogo tverdogo tela. M.: Nauka, 1988.
[2] Godunov S. K. Ramenskiy E. I. Elementy mekhaniki sploshnyh sred i zakony sohraneniya. Novosibirsk. Nauchnaya kniga, 1998.
[3] Eliseev V. V. Mekhanika uprugih tel. SPb.:Izd-vo SPbGTU, 1999
[4] Nemcev E. A., Galimov K. Z. Vyvod dinamicheskih uslovij sovmestnosti napryazhenij iz variacionnogo principa Kastil'yano // Issled. po teor.plastin i obolochek. 1973. № 10. P. 332–337
[5] Azanov N. P. Uravneniya sovmestnosti Sen-Venana i Bel'trami–Mitchella v rimanovom prostranstv // Tr. geom. sem. 1989. № 19. P. 9–13
[6] Myasnikov V. P., Guzev M. A. Geometricheskaya model' defektnoj struktury uprugoplasticheskoj sploshnoj sredy // Prikl. mekh. tekhn. fiz. 1999. № 40(2). P. 163–173
[7] Dubrovin B. A., Novikov S. P., Fomenko A. T. Sovremennaja geometrija: Metody i prilozhenija. M.: Nauka, Glavnaja redakcija fiziko-matematicheskoj literatury, 1986
[8] Sedov L. I. Mathematical methods for constructing new models of continuous media // UMN. 1965. № 20(5). P. 121–180
[9] Norden A. P. Prostranstva affinnoj svjaznosti. M.: Nauka. 1976
[10] Guzev M. A., Myasnikov V. P. Noneuclidean structure of internal stress in continuumы // Far Eastern Mathematical Journal. 2001. № 2(2). P. 29–44