

И. В. Канашин¹, А. Л. Григорьева¹, Я. Ю. Григорьев¹

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДЕФОРМАЦИЙ И ФОРМЫ ДЕФОРМИРУЕМОЙ ГРАНИЦЫ ПРИ ВДАВЛИВАНИИ КЛИНА В ЗАГОТОВКУ ВЫПУКЛОЙ ФОРМЫ

¹Комсомольский-на-Амуре государственный университет,
Комсомольск-на-Амуре, Россия

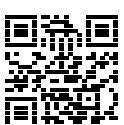
Аннотация. Целью работы является математическое моделирование пластического течения, возникающего в процессе внедрения клина в выпуклую заготовку. В ходе решения поставленной задачи были выведены: система уравнений для построения пластической области и деформированной поверхности материала в каждый момент времени; соотношение, позволяющее определить необходимую для внедрения клина нагрузку; выражения для расчёта деформаций, получаемых частицами материала на линии разрыва скоростей перемещений и в центре веера линий скольжения. Получено численное решение частного случая задачи о внедрении клина в гиперболический цилиндр, для которого: построены графики изменения угла раскрытия веера характеристик и необходимой для внедрения клина нагрузки, пластическая область и деформированная поверхность; рассчитаны деформации, получаемые частицами материала в окрестностях особенностей поля линий скольжения.

Ключевые слова: математическая модель, плоская деформация, пластическое течение, модель жесткопластического тела, тензор деформаций Альманси

Канашин Илья Валерьевич, старший преподаватель кафедры прикладной математики; e-mail: kanashin94@mail.ru; AuthorID: 1094116

Григорьева Анна Леонидовна, кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой прикладной математики; e-mail: naj198282@mail.ru; AuthorID: 166322

Григорьев Ян Юрьевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики; e-mail: prorector-ur@knastu.ru; AuthorID: 166323



для цитирования: Канашин И. В., Григорьева А. Л., Григорьев Я. Ю. Моделирование процесса определения деформаций и формы деформируемой границы при вдавливании клина в заготовку выпуклой формы // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2025. № 2(64). С. 87–104. DOI: 10.37972/chgru.2025.64.2.003. EDN: XIZORA

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0).

I. V. Kanashin¹, A. L. Grigorieva¹, Ya. Yu. Grigoriev¹

MODELLING OF THE PROCESS OF DETERMINING THE DEFORMATIONS AND THE SHAPE OF THE DEFORMED BOUNDARY DURING THE INDENTATION OF A WEDGE IN A CONVEX SHAPED WORK PIECE

¹Komsomolsk-on-Amur State University, Komsomolsk-on-Amur, Russia

Abstract. The aim of the work is the mathematical modelling of the plastic flow generated during the process of wedge insertion into a convex workpiece. In the course of solving the problem, the following equations were derived: a system of equations for the construction of the plastic region and the deformed surface of the material at each instant; a relation that allows us to determine the load required for the introduction of the wedge; expressions for calculating the deformations produced by the material particles on the displacement velocity gap line and in the center of the fan of slip lines. A numerical solution of a special case of the problem of wedge insertion in a hyperbolic cylinder has been obtained, for which: plots of the variation of the opening angle of the fan of features and of the load required for wedge insertion, of the plastic region and of the deformed surface have been constructed; deformations produced by material particles in the vicinity of the features of the slip line field have been calculated.

Keywords: mathematical model, plane deformation, plastic flow, rigid-plastic-body model, Almansi strain tensor

Ilya V. Kanashin, Senior Lecturer; e-mail: kanashin94@mail.ru; AuthorID: 1094116

Anna L. Grigorieva, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Head of Applied Mathematics Department; e-mail: naj198282@mail.ru; AuthorID: 166322

Yan Yu. Grigoriev, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of Applied Mathematics Department; e-mail: prorektor-ur@knastu.ru; AuthorID: 166323



to cite this article: Kanashin I. V., Grigorieva A. L., Grigoriev Ya. Yu. Modelling of the process of determining the deformations and the shape of the deformed boundary during the indentation of a wedge in a convex shaped work piece // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2025. No 2(64). p. 87–104.
DOI: 10.37972/chgpu.2025.64.2.003

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение. Теория пластического течения является одним из фундаментальных направлений механики деформируемого твёрдого тела. Основные положения теории [1, 2] позволяют описывать поведение материалов при различных напряжённых состояниях в условиях пластического деформирования с учётом изменения геометрии деформируемого тела. В качестве меры деформаций при этом возможно использование тензоров конечных деформаций.

Решение задачи о внедрении симметричного твёрдого недеформируемого клина в жесткопластическое полупространство при условиях текучести Треска – Сен–Бенана и Мизеса приводится в работах Хилла, Ли и Таппера [3]. Ими были исследованы положение смещённой поверхности, траектории частиц среды в пластической области (частицы движутся по направлению к внедрённой части клина), искажение первоначально квадратной сетки. Данное решение является автомодельным с точки зрения сохранения геометрического подобия пластической области относительно глубины внедрения клина.

Обобщение решения Хилла для задачи о вдавливании клина в выпуклое тело симметричной формы рассматривалось в работах Г. И. Быковцева, Д. Д. Ивлева, А. И. Хромова [4, 5]. Исследование полей деформаций на поверхностях разрыва скоростей перемещений и в центре веера характеристик в условиях плоской деформации в задаче о вдавливании клина в полупространство при условии текучести Кулона–Мора проводилось в работе [6]. В работе [7] в рамках модели идеального жесткопластического тела с учётом необратимой сжимаемости материала исследовались поля деформаций в окрестности особенностей поля скоростей перемещений в задаче о выглаживании поверхности клинообразным штампом.

В представляющей работе рассматривается аналитический вывод соотношений для построения пластической области и деформированной поверхности материала, расчёта деформаций, получаемых частицами в окрестностях особенностей поля скоростей; численное решение задачи для заготовки, форма которой задаётся уравнением гиперболического цилиндра.

1. Вывод соотношений. Клин с углом раствора 2θ внедряется в выпуклую заготовку криволинейной формы. В результате внедрения часть материала выдавливается, и форма заготовки изменяется. Поле линий скольжения состоит из трёх областей (рис. 1). Две из них – ABD и AEC – имеют треугольную форму, оба семейства линий скольжения в них прямолинейны; третья область – ADE – представляет собой центрированный веер.

Скорость внедрения клина V_y постоянна и полагается равной -1, так как ось y направлена вверх. Коэффициент трения μ постоянен вдоль поверхности контакта клина с заготовкой, его значение связано с углом η зависимостью

$$\mu = \frac{\cos(2\eta)}{1 + \sin(2\eta)}.$$

Решение задачи состоит в определении в каждый момент времени t : формы деформированной границы материала AFC , координат точек A и C , угла раскрытия веера $\psi(t)$. Известные значения перечисленных параметров позволяют найти необходимую для внедрения клина нагрузку.

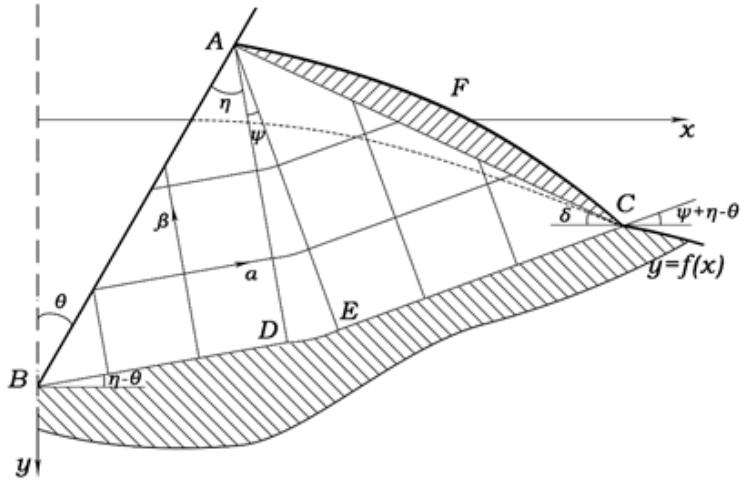


Рис. 1. Поле линий скольжения при вдавливании клина с углом раствора 2θ в выпуклую заготовку

В каждый момент времени поле скоростей определяется проекциями скорости V_y на α - и β -линии, которые равны:

$$V_\alpha = -V_y \frac{\sin(\theta)}{\cos(\eta)}, V_\beta = 0$$

Из полученного поля скоростей следует, что движение материала в области $BAFC$ происходит по направлению α -линий, при этом области ABD и $AECF$ движутся как жёсткое целое, а угол раствора веера, в силу выпуклости заготовки, монотонно уменьшается. Из этого следует, что весь процесс деформирования можно разбить на два этапа: первый происходит при $\psi > 0$, деформированная поверхность в процессе пластического течения образуется в точке C , а в точке A она подминается клином; второй начинается в момент времени t^* при обращении угла ψ в нуль, деформированная поверхность также образуется в точке C , но в точке A она уже не подминается клином и, соответственно, не оказывает влияния на пластическое течение.

На первом этапе материал в области $AECF$ движется как жёсткое целое, проекции скорости точек области на оси координат x и y равны:

$$v_x = v_\alpha \cos(\eta - \theta + \psi), v_y = v_\alpha \sin(\eta - \theta + \psi) \quad (1)$$

Интегрирование соотношений (1) даёт уравнения свободной границы деформированной поверхности AFC в виде:

$$\begin{aligned}x(t, \tau) &= v_\alpha \int_\tau^t \cos(\eta - \theta + \psi) dt + x_0(\tau), \\y(t, \tau) &= v_\alpha \int_\tau^t \sin(\eta - \theta + \psi) dt + y_0(\tau).\end{aligned}\tag{2}$$

Здесь $x = x_0(\tau)$, $y = y_0(\tau)$ – параметрическое представление границы тела до деформации; $x = x(t, \tau)$, $y = y(t, \tau)$ – параметрические уравнения деформированной части свободной поверхности AFC в момент времени t . Параметр τ выбран так, что он совпадает со временем перехода соответствующей точки с недеформированной границы на свободную поверхность выдавливаемого объёма, то есть

$$x_0(\tau) = x_C(\tau), y_0(\tau) = y_C(\tau).$$

В силу ортогональности треугольников ABD и AEC , а также равенства линий AD и AE между собой справедливо соотношение

$$|AC| = \sqrt{2}|AB|\cos(\eta).$$

Координаты точек A и C находятся как проекции прямой AB и ломаной линии BAC на оси x и y :

$$\begin{aligned}x_A &= |AB|\sin(\theta), \\y_A &= V_y t + |AB|\cos(\theta), \\x_C &= |AB|\sin(\theta) + |AC|\cos(\delta), \\y_C &= V_y t + |AB|\cos(\theta) - |AC|\sin(\delta)\end{aligned}$$

здесь $\delta = \frac{\pi}{4} - \eta + \theta - \psi$. Из полученных равенств можно вывести соотношение между координатами точки C :

$$\frac{x_C}{(1 + \omega\cos(\delta))} = \frac{(y_C + t)\operatorname{tg}(\theta)}{(1 - \omega\operatorname{tg}(\theta)\sin(\delta))},\tag{3}$$

$$\text{где } \omega = \frac{\sqrt{2}}{v_\alpha} = \frac{\sqrt{2}\sin(\theta)}{\cos(\eta)}.$$

Так как точка C лежит на недеформированной поверхности, при форме заготовки $y = f(x)$, справедливо равенство

$$y_C(t) = f(x_C(t)).\tag{4}$$

Точка A лежит на пересечении деформированной поверхности и клина, поэтому

$$\begin{aligned}x_A &= \frac{x_C}{1 + \omega\cos\delta} = v_\alpha \int_{\tau_A}^t \cos\left(\frac{\pi}{4} - \delta\right) dt + x_C(\tau_A), \\y_A &= \frac{y_C + t\omega\operatorname{tg}\theta\sin\delta}{1 - \omega\operatorname{tg}\theta\sin\delta} = v_\alpha \int_{\tau_A}^t \sin\left(\frac{\pi}{4} - \delta\right) dt + y_C(\tau_A),\end{aligned}\tag{5}$$

где τ_A – время начала движения материальной точки, имеющей в момент времени t координаты $x_A(t), y_A(t)$.

Соотношения (3) – (5) представляют собой систему четырёх уравнений с четырьмя неизвестными функциями: $x_C(t), y_C(t), \delta(t), \tau_A(t)$.

Дифференцированием по t эта система может быть приведена к системе дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом:

$$\begin{aligned} y'_C(t) - f'(x_C)x'_C &= 0, \\ x'_C z_1 - y'_C z_2 - \omega \psi' [x_C \sin \delta z_1^2 - (y_C + t) \cos \delta z_2^2] &= z_2, \\ x'_C z_1 - \psi' x_C z_1^2 \omega \sin \delta + \tau'_A [v_\alpha \cos(\eta - \theta + \psi(\tau_A)) - x'_C(\tau_A)] \\ &= v_\alpha \cos(\eta - \theta + \psi), \\ y'_C \frac{z_2}{\operatorname{tg}\theta} - \omega \cos \delta \frac{z_2}{\operatorname{tg}\theta} \psi' [t \operatorname{tg}\theta + z_2(y_C + t \omega \operatorname{tg}\theta \sin \delta)] + \\ + \tau'_A [v_\alpha \sin(\eta - \theta + \psi(\tau_A)) - y'_C(\tau_A)] &= v_\alpha \sin(\eta - \theta + \psi) - \omega \sin \delta z_2. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь $z_1 = \frac{1}{1 + \omega \cos(\delta)}$, $z_2 = \frac{\operatorname{tg}(\theta)}{1 - \omega \operatorname{tg}(\theta) \sin(\delta)}$. В момент начала процесса деформирования

$$\begin{aligned} t = 0, x_C = 0, y_C = 0, \tau_A = 0, \delta_0 &= \frac{\pi}{4} - \eta + \theta - \psi(0), \\ z_{10} = \frac{1}{1 + \omega \cos \delta_0}, z_{20} &= \frac{\operatorname{tg}\theta}{1 - \omega \operatorname{tg}\theta \sin \delta_0}, \end{aligned} \quad (7)$$

и система (6) примет вид

$$\begin{aligned} y'_C - f'(0)x'_C &= 0, \\ x'_C z_{10} - y'_C z_{20} &= z_{20}, \\ x'_C + \frac{\tau'_A}{z_{10}} [v_\alpha \cos\left(\frac{\pi}{4} - \delta_0\right) - x'_C] &= \frac{v_\alpha}{z_{10}} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \delta_0\right) \\ y'_C + \frac{\tau'_A \operatorname{tg}\theta}{z_{20}} [v_\alpha \sin\left(\frac{\pi}{4} - \delta_0\right) - y'_C] &= \frac{v_\alpha \operatorname{tg}\theta}{z_{20}} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \delta_0\right) - \omega \operatorname{tg}\theta \sin \delta_0. \end{aligned} \quad (8)$$

(8) – система четырёх уравнений с тремя неизвестными – x'_C, y'_C, τ'_A . Условие совместности этой системы

$$f'(0) = \frac{z_{10} [(v_\alpha \cos(\frac{\pi}{4} - \delta) z_{10} - z_{20}) (z_{20} - \operatorname{tg}(\theta)) - z_{20} v_\alpha \sin(\frac{\pi}{4} - \delta) \operatorname{tg}(\theta) (z_{10} - 1)]}{z_{20} [v_\alpha \cos(\frac{\pi}{4} - \delta) (z_{20} - \operatorname{tg}(\theta)) z_{10} + z_{20} \operatorname{tg}(\theta) (1 - z_{10}) (1 + v_\alpha \sin(\frac{\pi}{4} - \delta))]}$$

определяет начальное значение функции $\delta(t)$. При $f'_x(0) = 0$ это условие совпадает с уравнением, связывающим углы раствора клина θ и раскрытия веера ψ в задаче о внедрении клина в полупространство:

$$\cos(2\theta - \psi_0) = \frac{\cos \psi_0}{1 + \sin \psi_0}. \quad (9)$$

Форма деформированной границы на этом этапе определяется функцией, являющейся решением системы (6) и имеющей вид

$$y = F(x).$$

Поскольку область $AECF$ движется как жёсткое целое, поле напряжений в этой области в рамках теории идеального жесткопластического тела не определено. Приведённое на (рис. 1) поле прямолинейных характеристик определяет напряжённое состояние, которое может рассматриваться как возможное, статически допустимое продолжение поля напряжений в эту область. Оно имеет вид

$$\sigma_1 = 0, \sigma_2 = -2k.$$

Прямая линия AC является линией разрыва напряжений, на ней выполняется условие

$$n_j \sigma_{ij} = 0,$$

а в области AFC

$$\sigma_{ij} = 0.$$

поэтому граничные условия на деформированной свободной поверхности выполняются.

Усилие, необходимое для внедрения клина, рассчитывается по формуле

$$p = 4k(1 + \psi) |AB| \sin \theta. \quad (10)$$

Схема пластического течения на втором этапе деформирования представлена на рис. 2

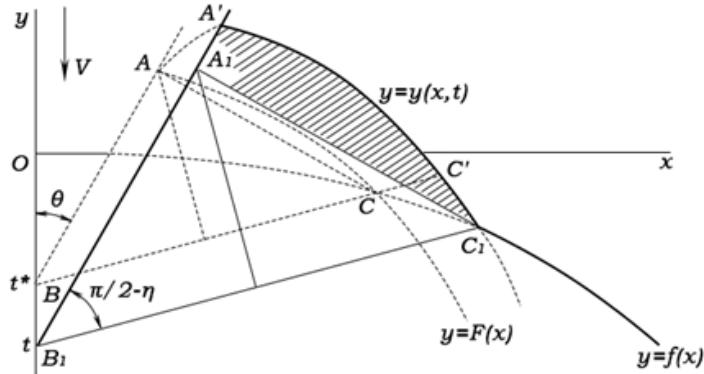


Рис. 2. Схема пластического течения при $\psi = 0$

Все точки области $A'C'C_1B_1A_1$ в каждый момент времени t ($t \geq t^*$) движутся с одной и той же скоростью v , проекции которой на оси координат равны:

$$v_x = v_\alpha \cos(\eta - \theta), v_y = v_\alpha \sin(\eta - \theta).$$

Уравнение подвижной границы $A'C'C_1$ определяется функцией $y = F(x)$, которая является решением системы (6), и имеет вид

$$y(x, t) = F(x - v_\alpha(t - t^*) \cos(\eta - \theta)) + v_\alpha(t - t^*) \sin(\eta - \theta). \quad (11)$$

На рис. 3 представлено пластическое течение в окрестности точки C . В результате вдавливания клина точка C , в момент времени t находившаяся на недеформированной поверхности, при $t + \Delta t$ займёт положение C' , а дуга CC_1 перейдёт в дугу $C'C_1$. В силу равномерного движения области $A'C'C_1B_1A_1$ по направлению α -линии:

$$CC' = v_\alpha \Delta t.$$

Если рассматривать Δt как бесконечно малый промежуток времени, то дуги CC_1 и $C'C_1$ можно считать прямолинейными.

На рис. 3 выполнены дополнительные построения: отрезки CH и $C'E$ построены параллельно оси y , а отрезки C_1F и CG параллельны оси x . Из треугольников $CC'G$, FHC_1 , CFC_1 следует:

$$\begin{aligned} |C_1E| &= |CC_1| \cos \phi - |CC'| \cos(\eta - \theta), \\ |C'E| &= |CC_1| \sin \phi + |CC'| \sin(\eta - \theta), \\ |CC_1| &= \frac{\Delta t}{\sin \phi + \cos \phi \operatorname{tg}(\eta - \theta)}. \end{aligned}$$

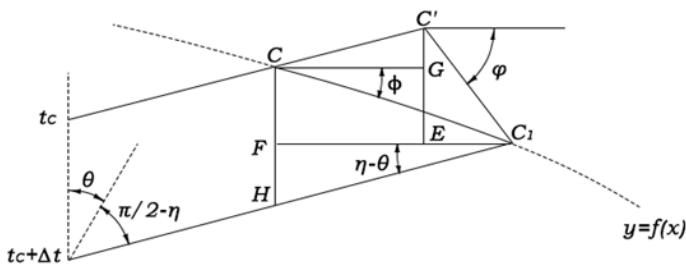


Рис. 3. Пластическое течение в окрестности точки C

В силу того, что $v_\alpha \Delta t = \operatorname{tg} \varphi$:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{1 + v_\alpha \sin(\eta - \theta) [1 + \operatorname{tg}(\eta - \theta) \operatorname{ctg} \phi]}{\operatorname{ctg} \phi - v_\alpha \cos(\eta - \theta) - v_\alpha \sin(\eta - \theta) \operatorname{ctg} \phi}. \quad (12)$$

При $\Delta t \rightarrow 0$ хорда CC_1 станет касательной к недеформированной поверхности $y = f(x)$ в точке C , а хорда $C'C_1$ – касательной к деформированной поверхности $y = y(x, t)$ в той же точке C , поэтому

$$\operatorname{tg}\phi = -f'(x_C), \quad (13)$$

$$\operatorname{tg}\varphi = -\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{(x,t)=(x_C,t_C)} = -F'(x_C), \quad (14)$$

где t_C – время начала движения точки C .

Положение точки C определяется пересечением недеформированной поверхности $y = f(x)$ с линией

$$y = x \operatorname{tg}(\eta - \theta) + V_y t_C,$$

откуда следует равенство

$$x_C \operatorname{tg}(\eta - \theta) - t_C = f(x_C). \quad (15)$$

Введение новой переменной

$$\tilde{x} = x_C - v_\alpha(t - t_C) \cos(\eta - \theta) \quad (16)$$

и подстановка (13) и (14) в (12) приводят к уравнению

$$F'(\tilde{x}) = \frac{f'(x_C) - v_\alpha \sin(\eta - \theta) [\operatorname{tg}(\eta - \theta) - f'(x_C)]}{v_\alpha \sin(\eta - \theta) - v_\alpha \cos(\eta - \theta) f'(x_C) - 1}. \quad (17)$$

Система уравнений (15) – (17) при условии $F(x_C) = y_C$ определяет ниже точки C некоторую проходящую через эту точку кривую $y = F(x)$, которая, перемещаясь вдоль линии скольжения со скоростью v_α , образует деформированную границу на втором этапе деформирования. Выполненная замена переменных эквивалентна обратному перемещению деформированной границы из положения $A'C'$, которое она занимала в момент времени t (рис. 2) в положение AC , занимаемое ею в момент времени t^* .

При $\psi = 0$ процесс деформирования происходит только вдоль линии разрыва скоростей B_1C_1 и вся область $B_1A_1A'C_1$ движется как жёсткое целое. В качестве возможного статически допустимого продолжения поля напряжений в эту область можно рассматривать однородное напряжённое состояние

$$\sigma_1 = 0, \sigma_2 = -2k.$$

Так как материал в области $A_1A'C'C_1$ свободен от напряжений и не оказывает давления на клин, то при расчёте усилия, необходимого для внедрения клина, учитывается только часть площади контакта B_1A_1 :

$$p = 4k |A_1B_1| \sin \theta.$$

Рассмотренное решение задачи о внедрении клина в выпуклую заготовку имеет место при условии

$$\eta \geq \theta$$

и будет полным, если существует статически допустимое продолжение поля напряжений ниже линии $BDEC$.

Необходимо найти распределение деформаций в окрестности особенностей поля линий скольжения: линии разрыва скоростей перемещений ($BDEC$) и центра веера характеристик (точка A).

Деформации на линии разрыва скоростей определяются величиной удельной диссипации энергии \bar{W} , которая зависит от нормальной $V_n = 0$ и касательной $[V_\tau] = V^+ - V^- = \frac{\sin \theta}{\cos \eta}$ составляющих скорости, а также нормальной скорости распространения линии $BDEC - G$ [8, 9].

Скорость G определяется соотношением

$$G = \frac{1}{|grad f|} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}, \quad (18)$$

где $f(x, y) = t$ – функция, определяющая уравнение линии разрыва скоростей перемещений.

Уравнения для составляющих линии $BDEC$ имеют вид:

- линия BD : $-[y - tg(\eta - \theta)x] = t$;
- линия DE : $\begin{cases} x = x_A + R \cos \xi \\ y = y_A + R \sin \xi \end{cases}, R = |AE|, \xi = \alpha - \frac{\pi}{2}$;
- линия EC : $y = xt g\left(\frac{\pi}{4} - \delta\right) + y_C - x_C t g\left(\frac{\pi}{4} - \delta\right)$.

Тогда из (18):

$$G = \begin{cases} \frac{dx_A}{dt} \cos \xi + \frac{dy_A}{dt} \sin \xi + \frac{dR}{dt}, \xi \in \left[\eta - \theta - \frac{\pi}{2}; \eta - \theta - \frac{\pi}{2} + \psi\right] \\ \frac{(x_C - x)\delta'}{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \delta\right)} + \cos\left(\frac{\pi}{4} - \delta\right) \left[y'_C - x'_C t g\left(\frac{\pi}{4} - \delta\right)\right] \end{cases} \quad (19)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \frac{dx_A}{dt} &= \frac{x'_C (1 + \omega \cos \delta) + x_C \omega \sin \delta \delta'}{(1 + \omega \cos \delta)^2}, \\ \frac{dR}{dt} &= \frac{x'_C \cos \eta \sin \theta (1 + \omega \cos \delta) + x_C \cos \eta \omega \sin \theta \sin \delta \delta'}{(\sin \theta)^2 (1 + \omega \cos \delta)^2} \\ \frac{dy_A}{dt} &= \frac{[y'_C + \omega t g \theta (\sin \delta + t \cos \delta \delta')] (1 - \omega t g \theta \sin \delta) + (y_C + t \omega t g \theta \sin \delta) \omega g \theta \cos \delta \delta'}{(1 - \omega t g \theta \sin \delta)^2}. \end{aligned}$$

Полученные значения скорости G позволяют определить величину объёмной плотности диссипации энергии

$$\overline{W} = \frac{[V_\tau]}{G - V_n},$$

от которой зависит первое главное значение тензора конечных деформаций Альманси

$$E_1 = \frac{\overline{W}^2}{4} \left[\sqrt{1 + \frac{4}{\overline{W}^2}} - 1 \right].$$

Деформации в окрестности центра веера определяются решением системы уравнений

$$\begin{aligned} \frac{da_{11}}{d\alpha} \overline{A} - a_{11} \sin \alpha \cos \alpha + a_{21} (\cos \alpha)^2 &= 0, \\ \frac{da_{12}}{d\alpha} \overline{A} - a_{12} \sin \alpha \cos \alpha + a_{22} (\cos \alpha)^2 &= 0, \\ \frac{da_{21}}{d\alpha} \overline{A} - a_{11} (\sin \alpha)^2 + a_{21} \sin \alpha \cos \alpha &= 0, \\ \frac{da_{22}}{d\alpha} \overline{A} - a_{12} (\sin \alpha)^2 + a_{22} \sin \alpha \cos \alpha &= 0. \end{aligned}$$

Здесь a_{ij} – компоненты тензора дисторсии, $\overline{A} = \frac{v_\alpha - a' \cos \alpha - b' \sin \alpha}{v_\alpha}$, $a' = \frac{dx_A}{dt}$, $b' = \frac{dy_A}{dt}$ – закон движения центра веера линий скольжения. Приведённая система может быть решена методом Рунге-Кутты IV порядка; в силу того, что частица попадающая в веер получает начальные деформации на линии EC , решение системы должно удовлетворять начальным условиям

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \overline{W}_{EC} & 1 \end{bmatrix}.$$

2. Численное решение. Пусть абсолютно твёрдый клин $y = |x| \operatorname{ctg}(\theta)$ внедряется в заготовку, имеющую форму гиперболического цилиндра $\frac{(y-a)^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$. Для данной задачи возможны три варианта пластического течения.

В первом случае угол раскрытия веера $\psi(t)$ в течение всего процесса пластического течения будет больше нуля. Вследствие наличия у гиперболы асимптот $y = \pm \frac{a}{b}x$ процесс будет стремиться к некоторому автомодельному режиму, соответствующему вдавливанию клина $y = |x| \operatorname{ctg}(\theta)$ в клин $y = \frac{a}{b}|x|$. Форма подвижной границы в этом случае находится из решения системы уравнений (6).

Второй случай имеет место, если выполняется условие

$$\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \eta + \theta \right) \geq \frac{a}{b}.$$

В данном случае при малых глубинах внедрения клина течение происходит при ненулевом ψ . Форма подвижной границы определяется решением системы (6). При дальнейшем внедрении клина угол раскрытия веера обращается в нуль и процесс деформирования стремится к автомодельному режиму. Форма деформированной границы определяется из решения системы (15) – (17).

Третий случай имеет место при

$$\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \eta + \theta \right) < \frac{a}{b}.$$

Тогда решение может быть построено только до момента, когда прямая линия AC займёт положение касательной к гиперболе в точке C . Для данной схемы это предельное положение линии AC , позволяющее построить статически допустимое продолжение поля напряжений в жёсткую область.

Пусть гиперболический цилиндр задаётся уравнением

$$\frac{(y - \sqrt{2})^2}{2} - \frac{x^2}{2} = 1,$$

угол раствора клина равен $\frac{\pi}{4}$, коэффициент трения $\mu = 0.12$, то есть $\eta \approx 0.67$ радиан, тогда уравнение недеформированной поверхности примет вид

$$y_C = \sqrt{2} - \sqrt{x_C^2 + 2}.$$

При введении обозначений:

$$x_C z_1^2 \sin \delta - (y_C + t) z_2^2 \cos \delta = A,$$

$$x_C z_1^2 \omega \sin \delta = B,$$

$$v_\alpha \cos(\eta - \theta + \psi(\tau_A)) - x'_C(\tau_A) = C,$$

$$\frac{\omega \cos \delta z_2}{\operatorname{tg} \theta} [t \operatorname{tg} \theta + z_2(y_C + t \omega \operatorname{tg} \theta \sin \delta)] = D,$$

$$v_\alpha \sin(\eta - \theta + \psi(\tau_A)) - y'_C(\tau_A) = E,$$

$$v_\alpha \sin(\eta - \theta + \psi) - \omega \sin \delta z_2 = G,$$

система (6) запишется в виде

$$\begin{aligned}
 y'_C &= \frac{-x_C x'_C}{\sqrt{x_C^2 + 2}}, \\
 x'_C z_1 - y'_C z_2 + A\omega\delta' &= z_2, \\
 x'_C z_1 + B\delta' + C\tau'_A &= v_\alpha \cos\left(\frac{\pi}{4} - \delta\right), \\
 y'_C \frac{z_2}{\operatorname{tg}\theta} + D\delta' + E\tau'_A &= G.
 \end{aligned}$$

Полученная система может быть сведена к одному дифференциальному уравнению с запаздывающим аргументом относительно $\delta' = -\psi'$. Это уравнение имеет вид

$$\delta' = \frac{(v_\alpha \cos\left(\frac{\pi}{4} - \delta\right) E - CG) \operatorname{tg}\theta \left(z_1 \sqrt{x_C^2 + 2} + z_2 x_C\right) - z_1 z_2 E \operatorname{tg}\theta \sqrt{x_C^2 + 2} - C z_2^2 x_C}{(BE - CD) \operatorname{tg}\theta \left(z_1 \sqrt{x_C^2 + 2} + z_2 x_C\right) - z_1 A\omega E \operatorname{tg}\theta \sqrt{x_C^2 + 2} - C z_2 x_C A\omega}.$$

Данное уравнение решается методом последовательного интегрирования [10]. Отрезок времени на котором определяется неизвестная функция разбивается на n шагов. Функции, зависящие от параметра запаздывания на первом шаге определяются начальными условиями для системы (6), на каждом i -м шаге – решением, полученным на $(i-1)$ -м шаге.

Решение уравнения на каждом из шагов находится с помощью численных методов (например, метод Адамса) с последующей интерполяцией функции $\psi(t)$.

Значения неизвестных функций в окрестности $t = 0$ для первого шага: $\delta(\tau_A) = \delta_0$, $y'_C(\tau_A) = y'_C(0) = 0$, $x'_C(\tau_A) = x'_C(0) = \frac{z_{20}}{z_{10}}$.

На рис. 4 приведён график изменения угла раскрытия веера с течением времени. Угол веера обращается в нуль и процесс течения переходит ко второму этапу при $t \approx 0.523$.

Геометрическое представление пластической области и деформированной поверхности материала дано на рис. 5.

На рис. 6 приводится сравнительное построение деформированных поверхностей для задачи с учётом (сплошная линия) и без учёта коэффициента трения (пунктирная линия). При учёте коэффициента трения образование деформированной поверхности происходит на большей части образца, чем в случае отсутствия трения.

На рис. 7 представлен график изменения удельного усилия, необходимого для внедрения клина.

На рис. 8 приведено распределение деформаций на линии разрыва скоростей перемещений $BDEC$ и в окрестности центра веера линий скольжения в момент времени $t = 0.3$. Из рисунка видно, что наибольшие деформации наблюдаются в окрестности центра веера линий скольжения.

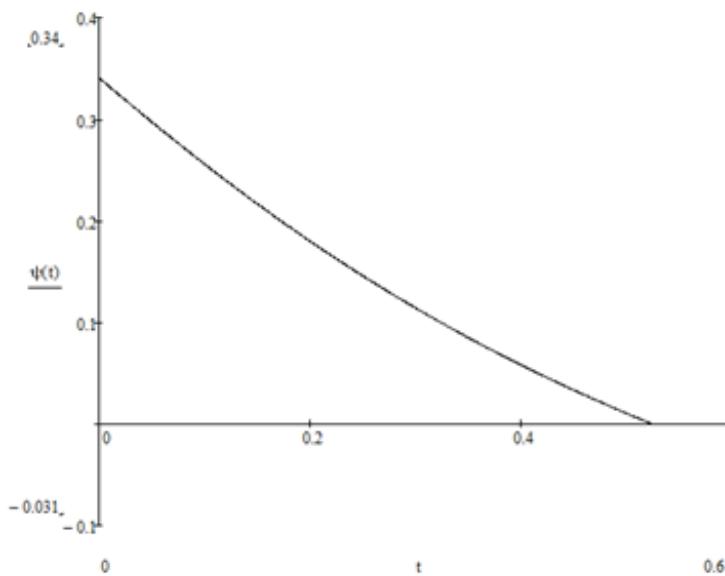


Рис. 4. График зависимости угла раскрытия веера характеристик от времени $\psi(t)$

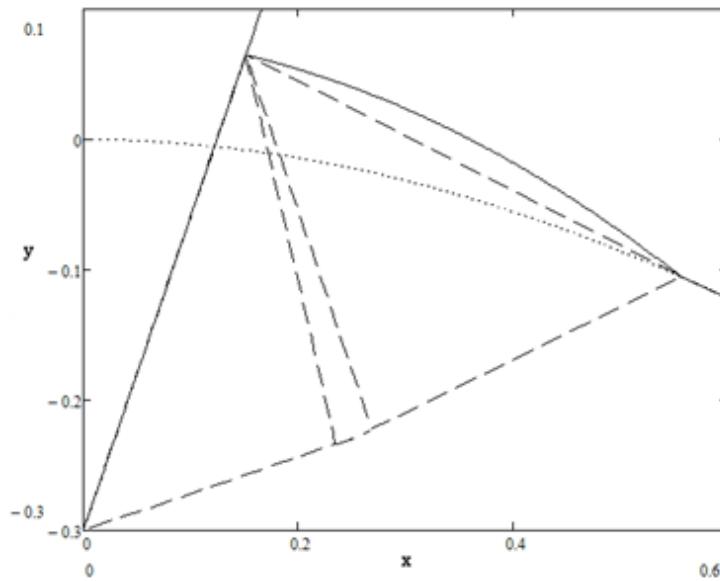


Рис. 5. Пластическая область и деформированная поверхность в задаче о вдавливании клина $y = |x| \operatorname{ctg}(\theta)$ с углом раствора $22^{\circ}31'2''$ в гиперболический цилиндр $y = \sqrt{2} - \sqrt{x^2 + 2}$

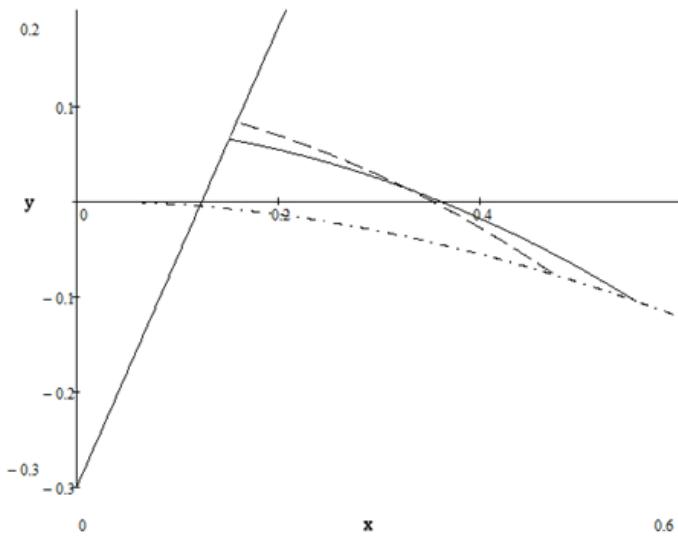


Рис. 6. Деформированная поверхность с учётом и без учёта коэффициента трения

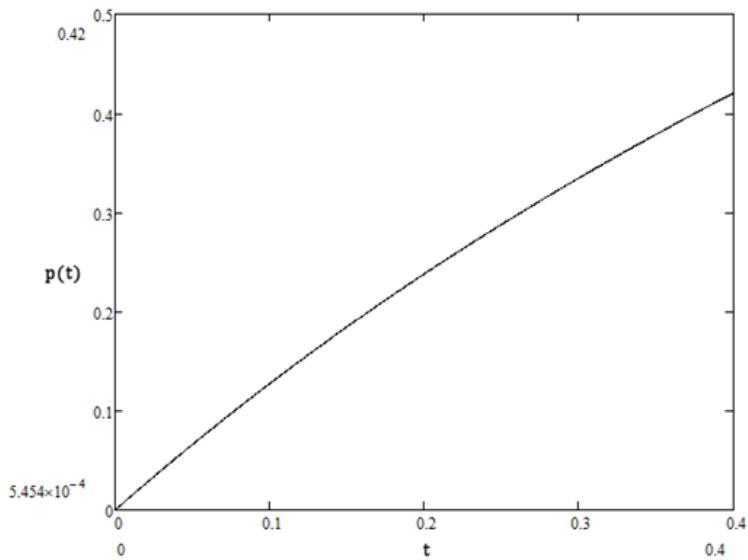


Рис. 7. График зависимости удельного усилия, необходимого для внедрения клина, от времени $p(t)$

3. Выводы. В данной работе для задачи о внедрении клина в выпуклую заготовку были выведены: система уравнений для определения параметров пластической области и деформированной поверхности материала в каждый момент времени; выражение, позволяющее вычислить необходимую для внедрения клина нагрузку; соотношения для расчёта деформаций, получаемых

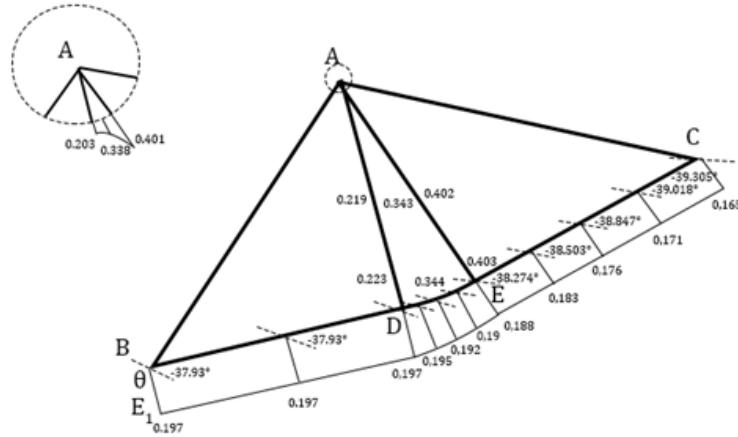


Рис. 8. Распределение деформаций на линии разрыва скоростей перемещений и в окрестности центра веера линий скольжения при $t = 0.3$

частичами материала на линии разрыва скоростей перемещений и в центре веера характеристик.

Построены графики изменения угла раскрытия веера характеристик и необходимой для внедрения клина нагрузки, построены пластическая область и деформированная поверхность, рассчитаны получаемые частицами материала деформации для задачи о внедрении клина с углом раствора $22^{\circ}31'2''$ в гиперболический цилиндр $\frac{(y - \sqrt{2})^2}{2} - \frac{x^2}{2} = 1$ с коэффициентом трения $\mu = 0.12$.

Учёт коэффициента трения приводит к тому, что деформирование материала происходит на большей части поверхности заготовки, чем при отсутствии трения.

Из полученного распределения деформаций следует, что наибольшие деформации частицы материала получают в окрестности центра веера характеристик, то есть точки, в которой деформированная поверхность подминается клином.

ДОПОЛНИТЕЛЬНО

Вклад авторов. И. В. Канашин написание текста рукописи, А. Л. Григорьева редактирование текста рукописи, согласование финальной версии рукописи, Я. Ю. Григорьев редактирование текста рукописи, согласование финальной версии рукописи

Конфликт интересов. Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

Источник финансирования. Авторы заявляют об отсутствии внешнего финансирования при проведении исследования.

ADDITIONAL INFORMATION

Authors' contribution. I. V. Kanashin writing the text of the manuscript, A. L. Grigorieva editing the text of the manuscript, agreeing on the final version of the manuscript, Ya. Yu. Grigoriev editing the text of the manuscript, agreeing on the final version of the manuscript

Competing interests. The authors declare that they have no competing interests.

Funding. This study was not supported by any external sources of funding.

ЛИТЕРАТУРА

1. Качанов Л. М. Основы теории пластичности. – Москва : Наука, 1969. – 420 с.
2. Соколовский В. В. Теория пластичности. – Москва : Высшая школа, 1969. – 608 с.
3. Хилл Р. Математическая теория пластичности. – Москва : Гостехиздат, 1956. – 407 с.
4. Быковцев Г. И., Ивлев Д. Д. Теория пластичности. – Владивосток : Дальннаука, 1998. – 528 с.
5. Хромов А. И. Деформация и разрушение жесткопластических тел. – Владивосток : Дальннаука, 1996. – 183 с.
6. Анисимов А. Н., Хромов А. И. Внедрение клина в полупространство при условии текучести Кулона–Мора // Вестник Самарского государственного технического университета. Физико-математические науки. – 2007. – № 1. – С. 44–49.
7. Анисимов А. Н., Хромов А. И. Выглаживание жесткопластической поверхности клинообразным штампом при условии текучести Кулона–Мора // Прикладная механика и техническая физика. – 2010. – Т. 51, № 2. – С. 176–182.
8. Буханько А. А., Хромов А. И. Поля деформаций при внедрении клинообразных и плоских штампов // Дальневосточный математический журнал. – 2002. – Т. 3, № 2. – С. 311–319.
9. Хромов А. И., Козлова О. В. Разрушение жесткопластических тел. Константы разрушения. – Владивосток : Дальннаука, 2005. – 157 с.
10. Труфанова Т. В., Ходченко Е. В. Дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом // Вестник Амурского государственного университета. Серия: Естественные и экономические науки. – 2012. – № 59. – С. 3–7.

REFERENCES

1. Kachanov L. M. Foundations Of The Theory Of Plasticity. – Moscow : Nauka, 1969. – 420 p.
2. Sokolovsky V. V. Theory of plasticity. – Moscow : Vyshaya Shkola, 1969. – 608 p. – (in Russian).
3. Hill R. The mathematical theory of plasticity. – Moscow : Gostekhizdat, 1956. – 407 p. – (in Russian).
4. Bykovtsev G. I., Ivlev D. D. Theory of plasticity. – Vladivostok : Dalnauka, 1998. – 528 p. – (in Russian).
5. Khromov A. I. Deformation and fracture of rigid-plastic bodies. – Vladivostok : Dalnauka, 1996. – 183 p. – (in Russian).
6. Anisimov A. N., Khromov A. I. Wedge embedding in a half-space under the Coulomb–Mohr flow condition // Vestnik of Samara State Technical University. Physical and mathematical sciences. – 2007. – 1(14). – P. 44–49. – (in Russian).
7. Anisimov A. N., Khromov A. I. Smoothing of a rigid-plastic surface with a wedge-shaped die under the Coulomb–Mohr yield condition // Applied mechanics and technical physics. – 2010. – Vol. 51, 2(300). – P. 176–182. – (in Russian).

8. *Bukhanko A. A., Khromov A. I.* Deformation fields at introduction of wedge-shaped and flat dies // Far Eastern Mathematical Journal. – 2002. – Vol. 3, no. 2. – P. 311–319. – (in Russian).
9. *Khromov A. I., Kozlova O. V.* Fracture of rigid-plastic bodies. Fracture constants. – Vladivostok : Dalnauka, 2005. – 157 p. – (in Russian).
10. *Trufanova T. V., Khodchenko E. V.* Differential equations with delayed argument // Vestnik of Amur State University. Series: Natural and Economic Sciences. – 2012. – No. 59. – P. 3–7. – (in Russian).