

УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЕ СОСТОЯНИЕ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ДИСКА. КУСОЧНО-ЛИНЕЙНЫЕ И ГЛАДКИЕ ФУНКЦИИ ПЛАСТИЧНОСТИ

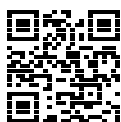
Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия

Аннотация. В рамках теории малых деформаций на примере задачи о быстровращающемся тонком диске проводится сравнение полей напряжений, перемещений и деформаций определяемых для различных математических моделей изотропного идеального упругопластического тела, включающих гладкие или кусочно-линейные функции пластичности. Обсуждаются общие положения плоского напряженного состояния. Все параметры материала являются постоянными величинами. Показано, что при выборе кусочно-линейных функций пластичности сингулярные режимы выполняются на границе раздела областей, в которых реализуются регулярные режимы пластичности. Установлено, что при увеличении параметра нагрузки происходит смещение границы выполнения сингулярного режима. По этой причине соотношения ассоциированного закона пластического течения в области смещения указанной границы интегрируются численно. Поскольку в процессе нагружения в пластической области изменение положения границы между зонами выполнения регулярных режимов мало, в работе вместо ассоциированного закона пластического течения выбирается ассоциированный закон пластического деформирования. При определении напряженного и деформированного состояния диска рассматривается степенное условие пластичности Карафиллиса-Бойса, которое является одним из обобщений условия пластичности Мизеса, а также при увеличении показателя степени компонент девиатора напряжений переходит в условие пластичности Ишлинского. Рассмотрены процессы увеличения и снятия нагрузки. Приведены графики напряжений, перемещений, деформаций и годографа вектора напряжений.

Ключевые слова: математическое моделирование, плоское напряженное состояние, вращающиеся диски, упругопластическое тело, условие пластичности Карафиллиса-Бойса, ассоциированный закон пластического деформирования, годограф вектора напряжений, вычислительный эксперимент.

Артемов Михаил Анатольевич, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой программного обеспечения и администрирования информационных систем; e-mail: artemov_m_a@mail.ru; AuthorID: 8282

Верлин Александр Андреевич, старший преподаватель кафедры программного обеспечения и администрирования информационных систем; e-mail: alexandrverlin@mail.ru



для цитирования: Артемов М. А., Верлин А. А. Упругопластическое состояние вращающегося диска. Кусочно-линейные и гладкие функции пластичности // Вестник Чувашия государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2025. № 2(64). С. 143–167. DOI: 10.37972/chgpu.2025.64.2.009. EDN: HACLNS

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0).

M. A. Artemov, A. A. Verlin

ELASTIC-PLASTIC STATE OF A ROTATING DISK. PIECEWISE LINEAR AND SMOOTH PLASTICITY FUNCTIONS

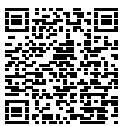
Voronezh State University, Voronezh, Russia

Abstract. Within the framework of the theory of small deformations, using the example of the problem of a rapidly rotating thin disk, a comparison is made of the fields of stresses, displacements, and deformations determined for various mathematical models of an isotropic ideal elastic-plastic body, which include smooth or piecewise-linear plasticity functions. The general principles of plane stress state are discussed. All material parameters are considered to be constant values. It is shown that when choosing piecewise-linear plasticity functions, singular modes occur at the boundary separating regions where regular plasticity modes are realized. It has been established that as the load parameter increases, the boundary for the occurrence of the singular mode shifts. For this reason, the relationships of the associated law of plastic flow in the region of the shifting boundary are integrated numerically. Since, during loading in the plastic region, the change in the position of the boundary between zones of regular modes is small, in this work, instead of the associated law of plastic flow, the associated law of plastic deformation is chosen. In determining the stress and strain state of the disk, the power condition of plasticity by Karafillis-Boyce is considered, which is one of the generalizations of von Mises' plasticity condition. Moreover, as the exponent increases, the deviatoric stress components transition to Ishlinsky's plasticity condition. The processes of increasing and removing load are examined. Graphs of stresses, displacements, deformations, and the stress vector hodograph are presented.

Keywords: mathematical modeling, plane stress state, rotating disks, elastic-plastic body, Karafillis-Boyce plasticity condition, associated law of plastic deformation, stress vector hodograph, computational experiment.

Mikhail A. Artemov, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor; e-mail: artemov_m_a@mail.ru; AuthorID: 8282

Alexandr A. Verlin, Senior Lecturer; e-mail: alexandrverlin@mail.ru



to cite this article: Artemov M. A., Verlin A. A. Elastic-plastic state of a rotating disk. Piecewise linear and smooth plasticity functions // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2025. No 2(64). p. 143–167. DOI: 10.37972/chgpu.2025.64.2.009

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение

Задача об упругопластическом состоянии тонкого вращающегося диска является одной из простейших одномерных задач плоского напряженного состояния. Тем не менее, учитывая практическую важность оценки состояния быстро вращающихся дисков, которые являются элементами многих машин и конструкций, интерес к этой задаче сохраняется до настоящего времени. В статье [1] отмечается, что одной из первых работ в этом направлении является работа Ф. Ласло 1925 г. [2], в которой рассматривались некоторые подходы к изучению деформирования вращающихся дисков. Работы, связанные с рассмотрением упругопластического состояния вращающегося диска, можно классифицировать, например, по выбору условия пластичности. Основная часть работ связана с выбором условия пластичности Треска или условием пластичности Мизеса. Выбор кусочно-линейных функций пластичности для идеально пластического тела позволяет получить аналитическое решение задачи о диске, а выбор гладких функций пластичности, в общем случае, приводит к необходимости численного решения. При этом следует отметить, что для регулярных режимов кусочно-линейных условий пластичности соотношения ассоциированного закона пластического течения интегрируются и переходят в соотношения ассоциированного закона пластического деформирования, а для сингулярных режимов эта процедура не имеет места.

При рассмотрении сплошных и кольцевых дисков под действием только сил инерции в статье [3] выполнено сравнение напряженного состояния для условий пластичности Треска и Мизеса. Отмечается, что для условия Треска, когда диск полностью переходит в пластическое состояние, значение параметра нагрузки меньше, чем для условия Мизеса. Здесь следует отметить, что в [3] в условии Треска и Мизеса выбирался предел пластичности на одноосное растяжение. Определение напряженного и деформированного состояния вращающегося диска для условия Мизеса приведено в [4]; выполнено сравнение полей напряжений и перемещений, полученных в рамках теории пластического течения и деформационной теории. Рассматривая определения не только напряженного, но и деформированного состояния при решении задачи об упругопластическом состоянии сплошного вращающегося диска в работе [5] У. Гамером было высказано суждение о неприемлемости условия пластичности Треска, поскольку это условие не позволяет получить одновременно неразрывные поля напряжений и деформаций. В работе [6] было показано, что если в центре диска для любой кусочно-линейной функции пластичности выполняется сингулярный режим, то в рамках теории пластического течения в малой окрестности центра диска происходит сильный рост пластических деформаций, что приводит к нарушению сплошности. В работе [1] было предложено условие Треска дополнить изотропным упрочением. Такой подход позволяет получить решения с непрерывными полями напряжений и перемещений. В этом случае математическая модель пластической области дополнялась определяющим соотношением для

эквивалентной пластической деформации, которое получается из представления элементарной работы напряжений на приращениях пластической деформации в виде произведения эквивалентного напряжения на приращение эквивалентной пластической деформации. Учет трансляционного упрочнения при определении напряженно-деформированного состояния диска рассматривался в [7], задача решалась методом малого параметра. Влияние пластической сжимаемости на упругопластическое состояние вращающегося диска рассмотрено в [8]. Границы зарождения пластических областей для разных условий пластичности рассматривались в [9]. В ряде работ изучалось упругопластическое состояние дисков переменной толщины. В [10] рассматривался вопрос об определении профиля равнопрочного кольцевого диска для условия Мизеса. В предположении, что все точки диска находятся в предельном состоянии пластические деформации равны нулю, деформации связаны с напряжениями согласно закону Гука. Данные условия позволяют получить уравнение для определения толщины диска. В работе [11] выполнено определение профиля равнопрочного вращающегося диска переменной толщины для анизотропного материала, имеющего разные пределы прочности при растяжении и сжатии. Интерес к определению профиля равнопрочного кольцевого вращающегося диска также связан с использованием функционально-градиентных материалов [12, 13]. В настоящей работе предлагается алгоритм определения напряженного и деформированного состояния вращающихся дисков при выборе гладких функций пластичности и на их основе объяснения некоторых особенностей решения задачи при выборе кусочно-линейных функций пластичности.

Постановка задачи

В рамках теории малых деформаций рассматривается упругопластическое квазистатическое состояние быстровращающегося тонкого кругового диска постоянной толщины. Принимается, что материал диска является идеально упругопластическим, однородным и изотропным. Также принимается гипотеза о естественном состоянии диска и приближение плоского напряженного состояния, для которого все искомые величины являются осредненными по толщине диска. Выбираются кусочно-линейные и гладкие функции пластичности. Рассматривается цилиндрическая система координат $\rho\theta z$, ось z которой проходит через центр диска $\rho = 0$, а плоскость $z = 0$ является средней плоскостью. Внешний контур диска $\rho = b$ свободен от усилий. На упругопластической границе и границах между областями, в которых реализуются разные режимы пластичности, выполняются условия непрерывности компонент тензора напряжений и вектора перемещений. При выполнении численных расчетов выбирается условие пластичности максимального приведенного напряжения [14] и степенное условие пластичности [15].

Плоское напряженное состояние

Задачи о плоском напряженном и плоском деформированном состояниях относятся к общей плоской задаче. Отмечается, что задача плоского напряженного состояния не может рассматриваться как частный случай трехмерной задачи.

В общей плоской задаче, когда функция текучести зависящая от ненулевых главных компонент тензора напряжений $F(\sigma_1, \sigma_2)$, используется в качестве пластического потенциала, и $\partial F/\partial \sigma_1 + \partial F/\partial \sigma_2 = 0$. При этом осевая пластическая деформация ε_3^p не определяется [16]. В монографии Д.Д.Ивлева [17] показано, что система уравнений плоского напряженного состояния противоречивая.

В [18] показано, что процедура осреднения всех величин по толщине тонкого диска приводит к обобщенному плоскому напряженному состоянию. Процедура перехода к осредненным по толщине величинам, в частности, снимает противоречия, на которые указано в [17], а именно: осредненное осевое перемещение

$$\frac{1}{h} \int_{z=-h/2}^{z=h/2} w dz = 0,$$

осредненная осевая деформация

$$\varepsilon_z = \frac{1}{h} \int_{z=-h/2}^{z=h/2} \frac{\partial w}{\partial z} dz, \varepsilon_z = \varepsilon_z(\rho),$$

определяет изменение профиля диска.

Инкремент осредненной осевой пластической деформации определяется из соотношений ассоциированного закона пластического течения

$$d\varepsilon_3^p = \frac{\partial F/\partial \sigma_3|_{\sigma_3=0}}{\partial F/\partial \sigma_1|_{\sigma_3=0}} d\varepsilon_1^p = \frac{\partial F/\partial \sigma_3|_{\sigma_3=0}}{\partial F/\partial \sigma_2|_{\sigma_3=0}} d\varepsilon_2^p.$$

Отметим, что дифференцирование функции пластичности по компонентам тензора напряжений выполняется до осреднения соотношений ассоциированного закона пластического течения, что согласуется с подходом, приведенным в монографии А. Ю. Ишлинского и Д.Д. Ивлева [19].

Осредненные величины удовлетворяют известным предположениям о плоском напряженном состоянии (выбрана декартова система координат)

$$\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zz} = \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{xz}^e = \varepsilon_{yz}^e = \varepsilon_{xz}^p = \varepsilon_{yz}^p = 0,$$

а все ненулевые величины не зависят от осевой координаты z .

Безразмерные величины

В настоящей работе все соотношения и величины приводятся к безразмерному виду. За характерный масштаб величин, имеющих размерность напряжений, выбирается значение предела пластичности k при одноосном растяжении, за масштаб длины выбирается значение радиус диска.

Для всех величин, приведенных к безразмерному виду, сохраняются обозначения, принятые для размерных величин, что не требует использования дополнительных обозначений и улучшает восприятие формул. Таким образом, безразмерный предел пластичности обозначается символом k , значение которого равно единице, $\sigma_\rho, \sigma_\theta$ – безразмерные компоненты тензора напряжений, u – безразмерная радиальная компонента вектора перемещений, E – безразмерный модуль Юнга, $m = (\gamma\omega^2 b^2)/(gk)$ – безразмерный комплекс, составленный из

размерных величин: ω – угловая скорость вращения диска, g – ускорение свободного падения, γ – удельный вес. Компоненты тензора деформаций $\varepsilon_\rho, \varepsilon_\theta, \varepsilon_z$ и коэффициент Пуассона ν являются безразмерными величинами. Все параметры материала, входящие в определяющие уравнения, рассматриваются как постоянные величины. Перемещения и деформации умножаются на безразмерный модуль Юнга, что делает их величинами того же порядка, что и безразмерные напряжения.

Математическая модель упругой области диска

Рассмотрим случай, когда в процессе нагружения в упругой области диска имеются остаточные необратимые деформации. Тогда, полные деформации включают упругие и необратимые остаточные деформации $(\varepsilon_\rho^*, \varepsilon_\theta^*, \varepsilon_z^*)$.

Математическая модель упругой области диска включает: уравнение равновесия в собственной системе отсчета [4, 20] (уравнение движения в инерциальной системе отсчета [21])

$$\frac{d\sigma_\rho}{d\rho} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{\rho} = -m\rho; \quad (1)$$

соотношения закона Гука.

$$\begin{aligned} E\varepsilon_\rho^e &= E(\varepsilon_\rho - \varepsilon_\rho^*) = \sigma_\rho - \nu\sigma_\theta, \\ E\varepsilon_\theta^e &= E(\varepsilon_\theta - \varepsilon_\theta^*) = \sigma_\theta - \nu\sigma_\rho, \\ E\varepsilon_z^e &= E(\varepsilon_z - \varepsilon_z^*) = -\nu(\sigma_\rho + \sigma_\theta); \end{aligned} \quad (2)$$

условие совместности полных деформаций

$$\rho \frac{d\varepsilon_\theta}{d\rho} + \varepsilon_\theta - \varepsilon_\rho = 0; \quad (3)$$

соотношения Коши, определяющие деформации через перемещения

$$\varepsilon_\rho = \frac{du}{d\rho}, \varepsilon_\theta = \frac{u}{\rho}. \quad (4)$$

Из уравнений (1) – (4) методом исключения переменных можно получить систему дифференциальных уравнений для определения напряжений

$$\begin{aligned} \rho \frac{d\sigma_\rho}{d\rho} + \sigma_\rho - \sigma_\theta + m\rho^2 &= 0, \\ \rho \frac{d\sigma_\theta}{d\rho} + \sigma_\theta - \sigma_\rho + \nu m\rho^2 + E \left(\rho \frac{d\varepsilon_\theta^*}{d\rho} + \varepsilon_\theta^* - \varepsilon_\rho^* \right) &= 0. \end{aligned}$$

Исключая из этой системы σ_θ получим уравнение

$$\rho^2 \frac{d^2\sigma_\rho}{d\rho^2} + 3\rho \frac{d\sigma_\rho}{d\rho} + (3 + \nu)m\rho^2 + E \left(\rho \frac{d\varepsilon_\rho^*}{d\rho} + \varepsilon_\rho^* - \varepsilon_\rho^* \right) = 0, \quad (5)$$

или, учитывая формулы (2), (4) дифференциальное уравнение второго порядка для определения перемещений

$$\rho \frac{d^2u}{d\rho^2} + \frac{du}{d\rho} - \frac{u}{\rho} + \frac{1 - \nu^2}{E} m\rho^2 - \rho \frac{d}{d\rho} (\varepsilon_\rho^* + \nu\varepsilon_\theta^*) + (1 - \nu)(\varepsilon_\theta^* - \varepsilon_\rho^*) = 0.$$

Если в начальном состоянии (до момента нагружения) в диске необратимые деформации равны нулю, то компоненты тензора напряжений и вектора перемещений в упругой области диска определяются по формулам [20]

$$\begin{aligned}\sigma_\rho &= A - \frac{B}{\rho^2} - \frac{3+\nu}{8}m\rho^2, \\ \sigma_\theta &= A + \frac{B}{\rho^2} - \frac{1+3\nu}{8}m\rho^2, \\ Eu &= (1-\nu)A\rho + \frac{1+\nu}{\rho}B - \frac{1-\nu^2}{8}m\rho^3.\end{aligned}\tag{6}$$

Если весь диск находится в упругом состоянии, то для условий

$$\begin{aligned}\sigma_\rho|_{\rho=0} &= \sigma_\theta|_{\rho=0}, \\ \sigma_\rho|_{\rho=b} &= 0,\end{aligned}$$

на основании формул (6) получаем

$$\begin{aligned}\sigma_\rho &= \frac{3+\nu}{8}m(b^2 - \rho^2), \\ \sigma_\theta &= \frac{3+\nu}{8}m\left(b^2 - \frac{1+3\nu}{3+\nu}\rho^2\right), \\ Eu &= (1-\nu)\left(\frac{3+\nu}{8}b^2 - \frac{1+\nu^2}{8}\rho^2\right)m\rho.\end{aligned}\tag{7}$$

Обычно в центре диска указывают условие $u|_{\rho=0} = 0$. Условие $\sigma_\rho|_{\rho=0} = \sigma_\theta|_{\rho=0}$ является следствием симметрии поля напряжений в центре диска.

Если для всех условий пластичности выбран предел пластичности на одноосное растяжение k , то при увеличении нагрузки пластическая область зарождается в центре диска когда

$$\sigma_\rho|_{\rho=0} = \sigma_\theta|_{\rho=0} = k.\tag{8}$$

Из (6), (8) находим условие зарождения пластической области в центре диска

$$m = m_0 = \frac{8}{b^2} \frac{k + p_b}{3 + \nu}.$$

На основании формул (7) можно определить зависимость

$$\sigma_\theta = \frac{1+3\nu}{3+\nu}\sigma_\rho + \frac{1-\nu}{4}mb^2.\tag{9}$$

Из (9) следует, что годограф вектора напряжений $\bar{\sigma} = \{\sigma_\rho(\rho), \sigma_\theta(\rho)\}$ на плоскости $\sigma_z = 0$ в пространстве напряжений – отрезок прямой.

На рис.1 показано положение годографа вектора напряжений для $m < m_0$ и $m = m_0$ относительно кривых пластичности Треска, Мизеса, Ишлинского, на плоскости $\sigma_z = 0$ в пространстве главных напряжений, когда $\nu = 0.2, k = 1, b = 1, 0 \leq \rho \leq b$.

Итак, при увеличении нагрузки (параметра m) пластическая область зарождается в центре сплошного диска.

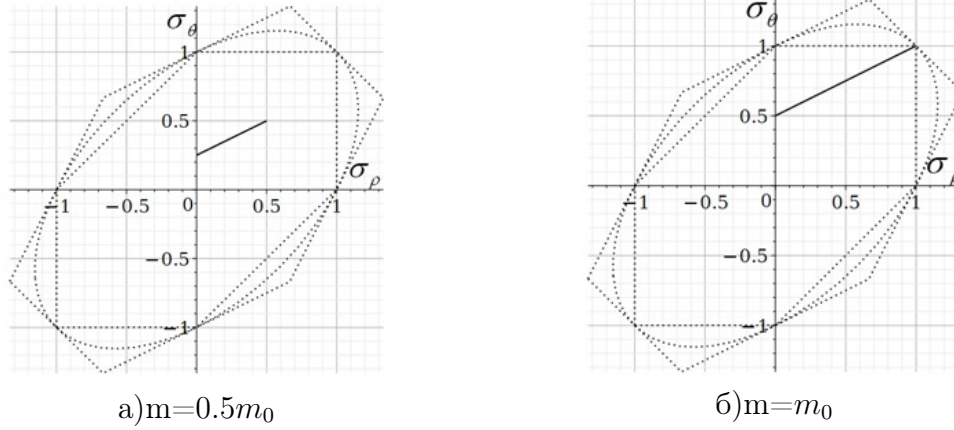


Рис. 1

Кусочно-линейные функции пластичности

При выборе кусочно-линейной функции пластичности рассмотрим регулярные и сингулярные режимы. Для любого регулярного режима имеем статически определимую задачу (i - номер стороны многоугольника пластичности)

$$\frac{d\sigma_\rho}{d\rho} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{\rho} = -m\rho, \quad (10)$$

$$F_i = \alpha_i \sigma_\theta + \beta_i \sigma_\rho = k.$$

Решение системы (10) можно записать в виде

$$\sigma_\rho = \frac{k}{\alpha_i + \beta_i} - \frac{\alpha_i}{3\alpha_i + \beta_i} m \rho^2 + C \rho^{-1-\beta_i/\alpha_i},$$

$$\sigma_\theta = \frac{k}{\alpha_i + \beta_i} + \frac{\beta_i}{3\alpha_i + \beta_i} m \rho^2 - \frac{\beta_i}{\alpha_i} C \rho^{-1-\beta_i/\alpha_i}.$$

Для сингулярного режима

$$F_i = \alpha_i \sigma_\theta + \beta_i \sigma_\rho = k, \quad F_{i+1} = \alpha_{i+1} \sigma_\theta + \beta_{i+1} \sigma_\rho = k, \quad (11)$$

задача определения напряжений является статически переопределенной, что приводит к дополнительным соотношениям между параметрами модели. Из системы (11) находим, что

$$\sigma_\theta = \sigma_\theta^{(i)} = \frac{\beta_i - \beta_{i+1}}{\beta_i \alpha_{i+1} - \beta_{i+1} \alpha_i} k, \quad (12)$$

$$\sigma_\rho = \sigma_\rho^{(i)} = \frac{\alpha_{i+1} - \alpha_i}{\beta_i \alpha_{i+1} - \beta_{i+1} \alpha_i} k.$$

Подставляя (12) в уравнение равновесия, получаем

$$\sigma_\theta^{(i)} - \sigma_\rho^{(i)} = \frac{\alpha_i - \alpha_{i+1} + \beta_i - \beta_{i+1}}{\beta_i \alpha_{i+1} - \beta_{i+1} \alpha_i} k = m \rho^2. \quad (13)$$

Из (13) следует формула, определяющая взаимно однозначное соответствие между радиальной координатой точек диска и значением параметра m

$$\rho = \rho_i = \sqrt{\frac{\alpha_i - \alpha_{i+1} + \beta_i - \beta_{i+1}}{\beta_i \alpha_{i+1} - \beta_{i+1} \alpha_i} \frac{k}{m}}. \quad (14)$$

Из формулы (14) следует, что радиус границы $\rho = \rho_i$ уменьшается при увеличении значения параметра m . Будет происходить изменение положения границы между областями с разными регулярными режимами. Таким образом, в рамках теории пластического течения в области перемещения границы $\rho = \rho_i$ необходимо учитывать изменение пластических деформаций.

Для регулярных режимов из соотношения ассоциированного закона пластического течения следуют пропорции

$$\frac{d\varepsilon_\rho^p}{\partial F / \partial \sigma_\rho} = \frac{d\varepsilon_\theta^p}{\partial F / \partial \sigma_\theta} = \frac{d\varepsilon_z^p}{\partial F / \partial \sigma_z}. \quad (15)$$

В силу линейной зависимости пластического потенциала от компонент тензора напряжений, интегрируя (15) переходим к соотношениям ассоциированного закона пластического деформирования [22]

$$\frac{\Delta \varepsilon_\rho^p}{\partial F / \partial \sigma_\rho} = \frac{\Delta \varepsilon_\theta^p}{\partial F / \partial \sigma_\theta} = \frac{\Delta \varepsilon_z^p}{\partial F / \partial \sigma_z},$$

где $\Delta \varepsilon_\rho^p, \Delta \varepsilon_\theta^p, \Delta \varepsilon_z^p$ - приращения пластических деформаций на каждом этапе нагружения. Для рассматриваемых регулярных режимов в процессе нагружения направляющий тензор пластических деформаций не зависит от времени [23].

Условие пластичности Ишлинского

При рассмотрении вопросов, связанных с описанием пластического состояния тел в работе [14] дано обоснование введения условия пластичности максимального приведенного напряжения. В частности показано, что все поверхности пластичности идеально пластического тела, когда выбирается предел пластичности на одноосное растяжение-сжатие, будут располагаться между поверхностью пластичности максимального касательного и максимального приведенного напряжения.

В пластической области один режим условия Ишлинского

Рассмотрим случай, когда выбирается условие пластичности Ишлинского и выполняется только один режим

$$\sigma_\rho + \sigma_\theta = 2k. \quad (16)$$

Учитывая, что в центре диска выполняется условие (8), решая систему уравнений (1), (16) находим

$$\sigma_\rho = k - \frac{m\rho^2}{4}, \quad \sigma_\theta = k + \frac{m\rho^2}{4}. \quad (17)$$

Упругие деформации определяются соотношениям закона Гука

$$E\varepsilon_\rho^e = (1 - \nu)k - \frac{1 + \nu}{4}m\rho^2, \quad E\varepsilon_\theta^e = (1 - \nu)k + \frac{1 + \nu}{4}m\rho^2. \quad (18)$$

Из соотношений ассоциированного закона пластического деформирования и формул Коши, получаем дифференциальное уравнение для определения перемещений в пластической области

$$\frac{dEu}{d\rho} - \frac{Eu}{\rho} + \frac{1 + \nu}{2}m\rho^2 = 0. \quad (19)$$

Решая уравнение (19), находим

$$Eu = \left(C - \frac{1 + \nu}{4}m\rho^2\right)\rho. \quad (20)$$

Из условия равенства нулю пластических деформаций на упругопластической границе следует, что

$$C = \frac{1 + \nu}{4}mc^2 + (1 - \nu)k. \quad (21)$$

Учитывая (21), формула (20) примет вид

$$Eu = \left(\frac{1 + \nu}{2}m(2c^2 - \rho^2) + (1 - \nu)k\right)\rho.$$

Пластические деформации

$$E\varepsilon_\rho^p = E\varepsilon_\theta^p = \frac{1 + \nu}{2}m(c^2 - \rho^2), \quad \varepsilon_z^p = -2\varepsilon_\theta^p.$$

На упругопластической границе $\rho = c$ из (19) следует, что

$$\sigma_\rho|_{\rho=c} = k - \frac{mc^2}{4}, \quad \sigma_\theta|_{\rho=c} = k + \frac{mc^2}{4}.$$

Учитывая условия непрерывности напряжений на упругопластической границе

$$[\sigma_\rho]|_{\rho=c} = 0, \quad [\sigma_\theta]|_{\rho=c} = 0,$$

определяем величины A, B в формулах (7)

$$A = k + \frac{1 + \nu}{4}mc^2, \quad B = \frac{1 + \nu}{8}mc^4.$$

Поэтому напряжения в упругой области

$$\sigma_\rho = k + \frac{1 + \nu}{4}\left(1 - \frac{c^2}{2\rho^2}\right)mc^2 - \frac{3 + \nu}{8}m\rho^2,$$

$$\sigma_\theta = k + \frac{1 + \nu}{4}\left(1 + \frac{c^2}{2\rho^2}\right)mc^2 - \frac{1 + 3\nu}{8}m\rho^2.$$

Если на границе $\rho = b$ задано условие $\sigma_\rho|_{\rho=b} = -p_b$, то из него следует, что

$$c = b\sqrt{1 - \sqrt{\frac{2}{1 + \nu}\left(4\frac{k + p_b}{mb^2} - 1\right)}},$$

$$m = \frac{8(k + p_b)b^2}{(1 + \nu)(b^2 - c^2)^2 + 2b^4}.$$

Когда в пластической области реализуется только режим (16) и на упругопластической границе компоненты тензора напряжений

$$\sigma_\rho|_{\rho=c} = \frac{2k}{3}, \quad \sigma_\theta|_{\rho=c} = \frac{4k}{3}, \quad (22)$$

то из условия $\sigma_\rho|_{\rho=b} = -p_b$ определяем

$$m = m_1 = \frac{4}{3b^2} \frac{3p_b + (4 + \nu)k + \sqrt{(13 + 4\nu)k^2 + 6(4 + \nu)kp_b + 9p_b^2}}{3 + \nu}.$$

При выполнении (22), учитывая формулы (17) находим, что

$$mc^2 = \frac{4k}{3}.$$

Поэтому значение радиуса упругопластической границы, когда $m = m_1$ будет определяться по формуле

$$c = c_1 = b \sqrt{\frac{(3 + \nu)k}{(4 + \nu)k + 3p_b + \sqrt{(13 + 4\nu)k^2 + 6(4 + \nu)kp_b + 9p_b^2}}}.$$

Если $p_b = 0$, то

$$m = m_1 = \frac{4k}{3b^2} \frac{4 + \nu + \sqrt{13 + 4\nu}}{3 + \nu},$$

$$c = c_1 = b \sqrt{\frac{3 + \nu}{4 + \nu + \sqrt{13 + 4\nu}}}.$$

На рис.2 показаны графики напряжений, перемещений, пластических деформаций и годографа вектора напряжений когда $k = 1, b = 1, \nu = 0.25, m = m_1 = 3.2786$.

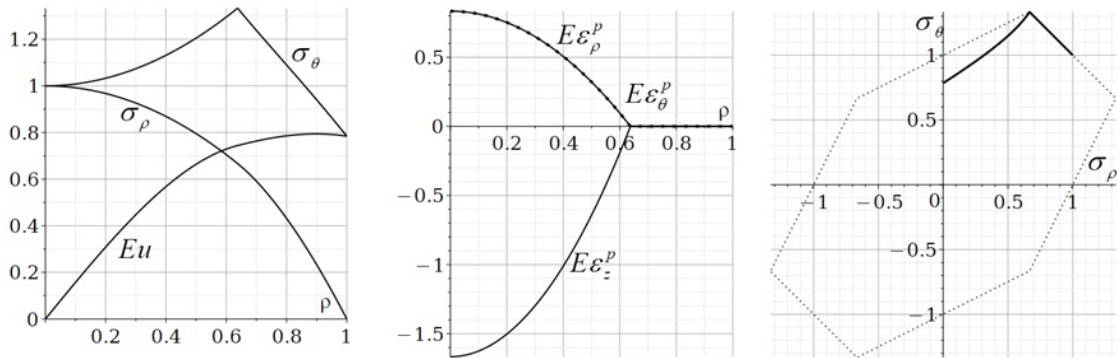


Рис. 2

В пластической области реализуются три режима условия Ишлинского

Рассмотрим случай, когда $m > m_1$ и $p_b = 0$. В пластической области $0 \leq \rho \leq c$ реализуются три режима. Первый режим

$$1) \begin{cases} \sigma_\theta + \sigma_\rho = 2k, \\ \frac{2k}{3} \leq \sigma_\rho \leq \frac{4k}{3} \end{cases}$$

реализуется в области $0 \leq \rho \leq c_1$. Второй режим

$$2) \begin{cases} 2\sigma_\theta - \sigma_\rho = 2k, \\ -\frac{2k}{3} \leq \sigma_\rho \leq \frac{2k}{3} \end{cases}$$

реализуется в области $c_1 \leq \rho \leq c$. Третий режим

$$3) \begin{cases} \sigma_\theta + \sigma_\rho = 2k, \\ 2\sigma_\theta - \sigma_\rho = 2k \end{cases}$$

выполняется только на границе $\rho = c_1$.

Первый режим

Для этого режима справедливы соотношения (17) – (20). На границе $\rho = c_1$

$$mc_1^2 = \frac{4k}{3}.$$

Поэтому на границе $\rho = c_1$, учитывая (20), получаем

$$Eu|_{\rho=c_1} = \left(C - \frac{1+\nu}{3}k\right)c_1. \quad (23)$$

Неизвестная величина C определяется, например, из условия непрерывности перемещений на границе $\rho = c_1$.

Второй режим

Для второго режима учитывая, что на границе $\rho = c_1$

$$\sigma_\rho|_{\rho=c_1} = \frac{2k}{3},$$

напряжения в пластической области $c_1 \leq \rho \leq c$

$$\begin{aligned} \sigma_\rho &= 2\left(k - \frac{m\rho^2}{5} + \frac{3mc_1^2 - 10k}{15} \frac{\sqrt{c_1}}{\sqrt{\rho}}\right), \\ \sigma_\theta &= 2k - \frac{m\rho^2}{5} + \frac{3mc_1^2 - 10k}{15} \frac{\sqrt{c_1}}{\sqrt{\rho}}. \end{aligned} \quad (24)$$

Упругие деформации определяются согласно соотношениям закона Гука

$$\begin{aligned} E\varepsilon_\rho^e &= 2(1-\nu)k + \frac{2-\nu}{5} \left(\frac{3mc_1^2 - 10k}{3} \frac{\sqrt{c_1}}{\sqrt{\rho}} - m\rho^2\right), \\ E\varepsilon_\theta^e &= 2(1-\nu)k + \frac{1-2\nu}{5} \left(\frac{3mc_1^2 - 10k}{3} \frac{\sqrt{c_1}}{\sqrt{\rho}} - m\rho^2\right). \end{aligned}$$

Учитывая соотношения ассоциированного закона пластического деформирования и формулы Коши, получаем уравнение для перемещений в пластической области

$$2\frac{dEu}{d\rho} + \frac{Eu}{\rho} + \frac{5-4\nu}{\rho^{1/2}} \left(\frac{\rho^{5/2} - c_1^{5/2}}{5} m + \frac{2c_1^{1/2}}{3} k \right) - 6(1-\nu)k = 0.$$

Решение этого уравнения представим в виде

$$Eu = 2(1-\nu)k\rho + (5-4\nu) \left(\frac{c_1^{1/2}}{\rho^{1/2}} \left(\frac{mc_1^2}{10} - \frac{k}{3} \right) - \frac{m\rho^2}{35} \right) \rho + \frac{C_1}{\rho^{1/2}}. \quad (25)$$

Полные деформации находим по формулам Коши

$$E\varepsilon_\rho = 2(1-\nu)k + (5-4\nu) \left(\frac{c_1^{1/2}}{2\rho^{1/2}} \left(\frac{mc_1^2}{10} - \frac{k}{3} \right) - \frac{3m\rho^2}{35} \right) - \frac{C_1}{2\rho^{3/2}},$$

$$E\varepsilon_\theta = 2(1-\nu)k + (5-4\nu) \left(\frac{c_1^{1/2}}{\rho^{1/2}} \left(\frac{mc_1^2}{10} - \frac{k}{3} \right) - \frac{m\rho^2}{35} \right) + \frac{C_1}{2\rho^{3/2}}.$$

Пластические деформации

$$E\varepsilon_\rho^p = \frac{c_1^{1/2}k}{2\rho^{1/2}} - \left(\frac{1-5\nu}{7}\rho^2 + \frac{3c_1^{5/2}}{4\rho^{1/2}} \right) \frac{m}{5} - \frac{C_1}{2\rho^{3/2}}, \quad (26)$$

$$E\varepsilon_\theta^p = -\frac{c_1^{1/2}k}{2\rho^{1/2}} + \left(2\frac{1-5\nu}{7}\rho^2 + \frac{3c_1^{5/2}}{2\rho^{1/2}} \right) \frac{m}{5} + \frac{C_1}{2\rho^{3/2}}.$$

Из условия равенства нулю пластических деформаций на упругопластической границе $\rho = c$ находим

$$C_1 = c_1^{1/2}ck - \left(2\frac{1-5\nu}{35}c^{5/2} + \frac{3c_1^{5/2}}{10} \right) mc. \quad (27)$$

Подстановка (27) в (25) дает

$$Eu = (5-4\nu) \left(\frac{c_1^{1/2}}{\rho^{1/2}} \left(\frac{mc_1^2}{10} - \frac{k}{3} \right) - \frac{m\rho^2}{35} \right) \rho + 2(1-\nu)k\rho - \left(2\frac{1-5\nu}{35}c^{5/2} + \frac{3c_1^{5/2}}{10} \right) \frac{mc}{\rho^{1/2}} + \frac{c_1^{1/2}}{\rho^{1/2}}ck.$$

На границе $\rho = c_1$

$$Eu|_{\rho=c_1} = (5-4\nu) \left(\frac{mc_1^2}{14} - \frac{k}{3} \right) c_1 + 2(1-\nu)kc_1 - \left(2\frac{1-5\nu}{35} \frac{c^{5/2}}{c_1^{1/2}} + \frac{3c_1^2}{10} \right) mc + ck. \quad (28)$$

Из условия непрерывности перемещений на границе $\rho = c_1$, учитывая (25), (28), находим

$$C = \left(\frac{1-2\nu}{3} + \frac{c}{c_1} \right) k + \left(\frac{17-\nu}{28}c_1^2 - \frac{3c_1c}{10} - 2\frac{1-5\nu}{35} \frac{c^{7/2}}{c_1^{3/2}} \right) m.$$

Упругая область

На упругопластической границе $\rho = c$ из (24) следует, что

$$\sigma_\rho|_{\rho=c} = 2 \left(k - \frac{mc^2}{5} + \frac{3mc_1^2 - 10k}{15} \frac{\sqrt{c_1}}{\sqrt{c}} \right),$$

$$\sigma_\theta|_{\rho=c} = 2k - \frac{mc^2}{5} + \frac{3mc_1^2 - 10k}{15} \frac{\sqrt{c_1}}{\sqrt{c}}.$$

Учитывая условия непрерывности напряжений на упругопластической границе

$$[\sigma_\rho]|_{\rho=c} = 0, [\sigma_\theta]|_{\rho=c} = 0$$

определяем величины A, B входящие в формулы (6) для определения напряжений в упругой области

$$A = 2k + \frac{3mc_1 - 10k}{10} \frac{c_1^{1/2}}{c^{1/2}} + \frac{5\nu - 1}{20} mc^2,$$

$$B = \left(\left(\frac{k}{3} - \frac{mc_1^2}{10} \right) \frac{c_1^{1/2}}{c^{1/2}} + \frac{5\nu - 1}{40} mc^2 \right) c^2.$$

На границе $\rho = b$

$$\sigma_\rho|_{\rho=b} = 2k + \left(\frac{5\nu - 1}{10} \left(1 - \frac{c^2}{2b^2} \right) c^2 + \left(3 + \frac{c^2}{b^2} \right) \frac{c_1^{5/2}}{5c^{1/2}} - \frac{3 + \nu}{4} b^2 \right) \frac{m}{2} - \left(1 + \frac{c^2}{3b^2} \right) \frac{c_1^{1/2}}{c^{1/2}} k.$$

Из условия $\sigma_\rho|_{\rho=b} = 0$ численно находим радиус упругопластической границы.

Третий режим

Третий режим реализуется только на границе $\rho = c_1$, где

$$\sigma_\rho = \frac{2k}{3}, \quad \sigma_\theta = \frac{4k}{3}.$$

На рис. 3 показаны графики напряжений, перемещений пластических деформаций и годографа напряжений, когда $k = 1, b = 1, m = 3.4036, c_1 = 0.6259, c = 0.87020, \nu = 0.25$.

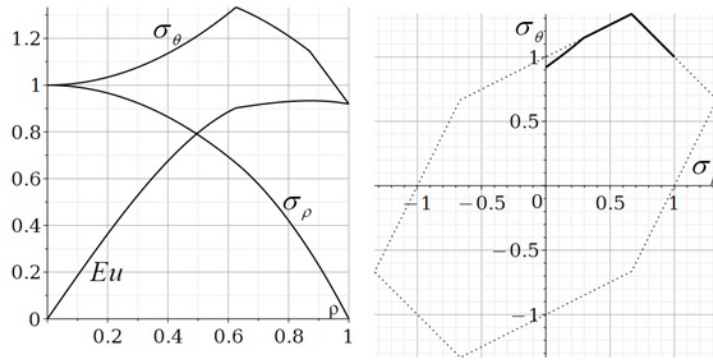


Рис. 3

Предельное состояние диска

Рассмотрим случай, когда диск находится в предельном состоянии. Весь диск находится в пластическом состоянии, но пластического течения нет; пластические деформации на внешнем контуре диска $\rho = b$ равны нулю. В области

$0 \leq \rho \leq c_1$ реализуется режим 1, в области $c_1 \leq \rho \leq b$ выполняется режим 2. Если $p_b = 0$, то в области $c_1 \leq \rho \leq b$ напряжения

$$\sigma_\rho = \frac{2}{5} \left(\frac{b^{5/2}}{\rho^{1/2}} - \rho^2 \right) m + 2 \left(1 - \frac{b^{1/2}}{\rho^{1/2}} \right) k,$$

$$\sigma_\theta = \frac{1}{5} \left(\frac{b^{5/2}}{\rho^{1/2}} - \rho^2 \right) m + \left(2 - \frac{b^{1/2}}{\rho^{1/2}} \right) k.$$

упругие деформации

$$E\varepsilon_\rho^e = \frac{2-\nu}{5} \left(\frac{b^{5/2}}{\rho^{1/2}} - \rho^2 \right) m + 2(1-\nu)k - (2-\nu)\frac{b^{1/2}}{\rho^{1/2}}k,$$

$$E\varepsilon_\theta^e = \frac{1-2\nu}{5} \left(\frac{b^{5/2}}{\rho^{1/2}} - \rho^2 \right) m + 2(1-\nu)k - (1-2\nu)\frac{b^{1/2}}{\rho^{1/2}}k.$$

Из соотношений ассоциированного закона пластического деформирования, учитывая связь полных упругих и пластических напряжений и соотношений закона Гука получаем уравнение

$$2\frac{dEu}{d\rho} + \frac{Eu}{\rho} + \frac{5-4\nu}{5} \left(\rho^2 - \frac{b^{5/2}}{\rho^{1/2}} \right) m + (5-4\nu)\frac{b^{1/2}}{\rho^{1/2}}k - 6(1-\nu)k = 0.$$

Решая это уравнение получим

$$Eu = \frac{5-4\nu}{10} \left(b^{5/2}\rho^{1/2} - \frac{2}{7}\rho^3 \right) m + \left(2(1-\nu)\rho - \frac{3}{2}b^{1/2}\rho^{1/2} \right) k + \frac{C_1}{\rho^{1/2}} = 0.$$

Из равенства пластических деформаций на границе $\rho = b$ находим

$$C_1 = \frac{5-4\nu}{14} (7k - b^2m)b^{3/2}.$$

На рис. 4 показаны графики напряжений, перемещений, пластических деформаций и годографа напряжений, когда $m = 3.4196$, $c = b$, $\nu = 0.25$.

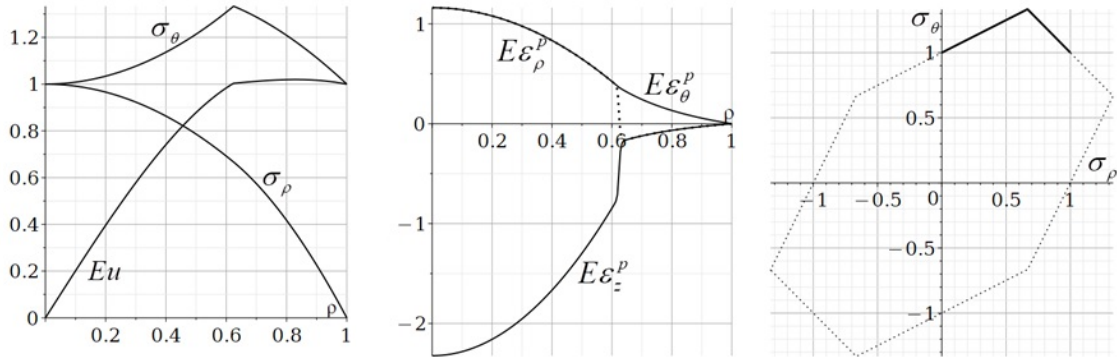


Рис. 4

Изменение нагрузки

При рассмотрении комбинированной нагрузки можно говорить об изменении нагрузки в целом, уточняя увеличение или уменьшении каждого параметра нагрузки в отдельности. В пространстве параметров нагрузки можно рассматривать траекторию изменения нагрузки. В данной статье определяется один параметр нагрузки - m . При изменении упругопластического состояния диска, обусловленного уменьшением значения параметра m , в общем случае, в разных точках пластической области может происходить как разгрузка (уменьшение значения эквивалентного напряжения) так и нагружение, которое может привести к повторному пластическому деформированию, а следовательно к изменению значения начальных необратимых (пластических) деформаций. После снятия нагрузки ($m = 0$) в диске остаются и упругие и пластические деформации.

Рассмотрим процесс, когда значение параметра m уменьшается от m_2 – значение, при котором диск находится в предельном состоянии, до нуля. При этом контролируем изменение значения эквивалентного напряжения. В момент уменьшения значения параметра m весь диск переходит в упругое состояние. В области $0 \leq \rho \leq c_1$ остаются необратимые деформации $\varepsilon_\rho^p, \varepsilon_\theta^p, \varepsilon_z^p$, вычисляемые по формулам (26), в которых надо полагать

$$m = m_2.$$

В области $0 \leq \rho \leq c_1$ полные деформации

$$\begin{aligned}\varepsilon_\rho &= \varepsilon_\rho^e + \varepsilon_\rho^p, \\ \varepsilon_\theta &= \varepsilon_\theta^e + \varepsilon_\theta^p, \\ \varepsilon_z &= \varepsilon_z^e + \varepsilon_z^p,\end{aligned}\tag{29}$$

должны удовлетворять условиям совместности. Из уравнения равновесия следует, что

$$\sigma_\theta = \rho \frac{d\sigma_\rho}{d\rho} + \sigma_\rho + m\rho^2.\tag{30}$$

Учитывая соотношения закона Гука, равенство (30), подставляя (29) в (3), приходим к уравнению

$$\rho^2 \frac{d^2 \sigma_\rho}{d\rho^2} + 3\rho \frac{d\sigma_\rho}{d\rho} + (3 + \nu)m\rho^2 - \rho \frac{d\sigma_\theta^{(0)}}{d\rho} - \sigma_\theta^{(0)} + \sigma_\rho^{(0)} - \nu m_2 \rho^2 = 0.\tag{31}$$

Решая уравнение (31) и учитывая (30), находим

$$\begin{aligned}\sigma_\rho &= C_1 - \frac{C_2}{\rho^2} + \frac{1 + \nu}{8} m_1 \rho^2 - \frac{3 + \nu}{8} m \rho^2, \\ \sigma_\theta &= C_1 + \frac{C_2}{\rho^2} + 3 \frac{1 + \nu}{8} m_1 \rho^2 - \frac{1 - 3\nu}{8} m \rho^2.\end{aligned}$$

Неизвестная величина $C_2 = 0$.

В области $c \leq \rho \leq b$ напряжения и перемещения определяются по формулам (6). Из условия $\sigma_\rho|_{\rho=b} = 0$ получаем, что

$$A = \frac{3+\nu}{8}mb^2 + \frac{B}{b^2}.$$

Величины A, C_1 определяются из условия непрерывности напряжений на границе $\rho = c$.

На рис.5, рис.6 приведены графики годографа вектора напряжений, перемещений и полных остаточных деформаций, включающие пластические и остаточные упругие деформации, для $\nu = 0.25, n = 500$, при уменьшении значения параметра нагрузки.

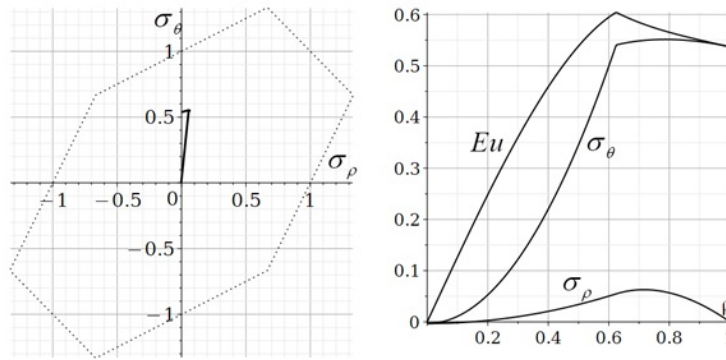


Рис. 5. $m=0.95$.

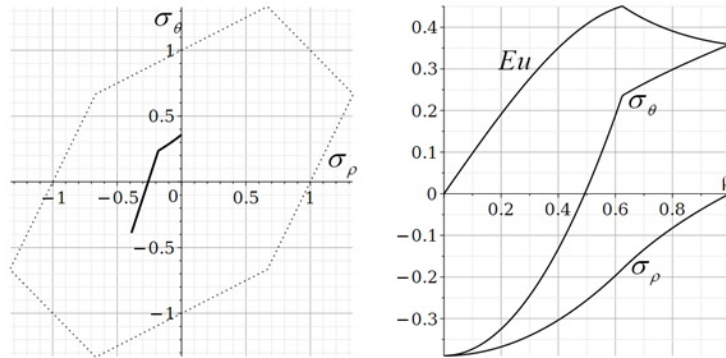


Рис. 6. $m=0$.

Изменения эквивалентного напряжения показывает, что при уменьшении параметра t до нуля в диске не происходит повторного пластического деформирования.

Гладкие функции пластичности

Рассмотрим случай, когда функция пластичности является гладкой. Выбор конкретной функции пластичности не имеет принципиального значения. В работе [15] была предложена степенная функция пластичности

$$F = \left(\frac{(2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3)^{2n} + (2\sigma_2 - \sigma_3 - \sigma_1)^{2n} + (2\sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_2)^{2n}}{2 + 2^{2n}} \right)^{1/2n} = k. \quad (32)$$

При $n = 1$ условие (32) переходит в условие пластичности Мизеса [24], при $n \rightarrow \infty$ условие (32) переходит в условие пластичности Ишлинского.

Для задачи о диске

$$F(\sigma_\rho, \sigma_\theta, \sigma_z)|_{\sigma_z=0} = f(\sigma_\rho, \sigma_\theta) = \left(\frac{(2\sigma_\rho - \sigma_\theta)^{2n} + (2\sigma_\theta - \sigma_\rho)^{2n} + (\sigma_\rho + \sigma_\theta)^{2n}}{2 + 2^{2n}} \right)^{1/2n} = k.$$

Связь пластических деформаций и напряжений устанавливает ассоциированным законом пластического деформирования. Из этого закона следуют пропорции

$$\frac{\varepsilon_\rho^p}{\partial F / \partial \sigma_\rho|_{\sigma_z=0}} = \frac{\varepsilon_\theta^p}{\partial F / \partial \sigma_\theta|_{\sigma_z=0}} = \frac{\varepsilon_z^p}{\partial F / \partial \sigma_z|_{\sigma_z=0}}. \quad (33)$$

Функция пластичности в (32) зависит только от второго и третьего инвариантов девиатора напряжений. Поэтому осредненную по толщине диска осевую компоненту тензора пластических деформаций можно непосредственно определять из условия пластической несжимаемости

$$\varepsilon_z^p = -(\varepsilon_\rho^p + \varepsilon_\theta^p).$$

Ассоциированный закон пластического деформирования, в общем случае, не является следствием ассоциированного закона пластического течения. Также (33) отличается от варианта деформационной теории при рассмотрении гладких поверхностей нагружения в [23].

Напряжения в пластической области $0 \leq \rho \leq c$ определяем из системы

$$\frac{d\sigma_\rho}{d\rho} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{\rho} = -m\rho, \quad F = k. \quad (34)$$

Решение (34) находим численно с учетом условий (8).

Напряжения и перемещения в упругой области определяются согласно (5). Неизвестные величины A, B в (5) и радиус упругопластической границы $\rho = c$ определяем из условий непрерывности напряжений на упругопластической границе и граничного условия на внешнем контуре диска $\rho = c$

$$\sigma_\rho|_{\rho=c} = -p_b.$$

Из ассоциированного закона пластического деформирования, учитывая соотношения (21), соотношения закона Гука и формулы Коши, следует уравнение для определения радиальной компоненты вектора перемещений

$$\frac{dEu}{d\rho} - \sigma_\rho + \nu\sigma_\theta - \frac{\partial F / \partial \sigma_\rho|_{\sigma_z=0}}{\partial F / \partial \sigma_\theta|_{\sigma_z=0}} \left(\frac{Eu}{\rho} - \sigma_\theta + \nu\sigma_\rho \right) = 0.$$

Для изотропного тела функции пластичности является симметрической относительно главных компонент тензора напряжений [19, 25]. Поскольку в центре диска

$$\sigma_\rho|_{\rho=0} = \sigma_\theta|_{\rho=0}$$

то

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \partial F / \partial \sigma_\rho|_{\sigma_z=0} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \partial F / \partial \sigma_\theta|_{\sigma_z=0}.$$

Для гладких функций пластичности в центре диска радиальная деформация $\varepsilon_\rho = \frac{du}{d\rho}$ принимает конечное значение. Поскольку в центре диска $u|_{\rho=0}$, то в малой окрестности точки $\rho = 0$ ($\rho \leq \delta$) приближенно можно полагать $u = \mu\rho$ [4]. В зависимости от выбранного алгоритма решения задачи величину μ определяем, например, из условия непрерывности перемещений на упругопластической границе или из других граничных условий. При выполнении численных расчетов принималось, что $\delta = 10^{-10}$.

Из сравнения рис.7 и рис.8 видно, что вблизи границы $\rho = c_1$, на которой для условия максимального приведенного напряжений реализуется сингулярный режим, при увеличении значения параметра n происходит рост градиента радиальной компоненты тензора пластических деформаций.

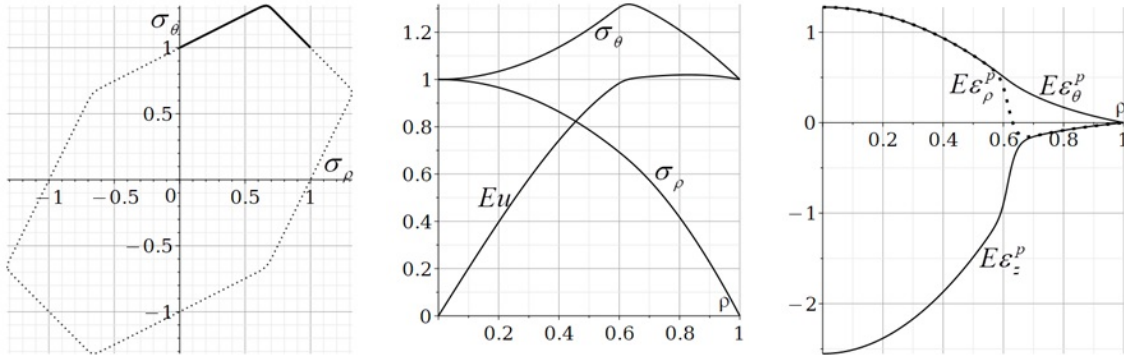


Рис. 7. $n=30$, $m=3.4177$.

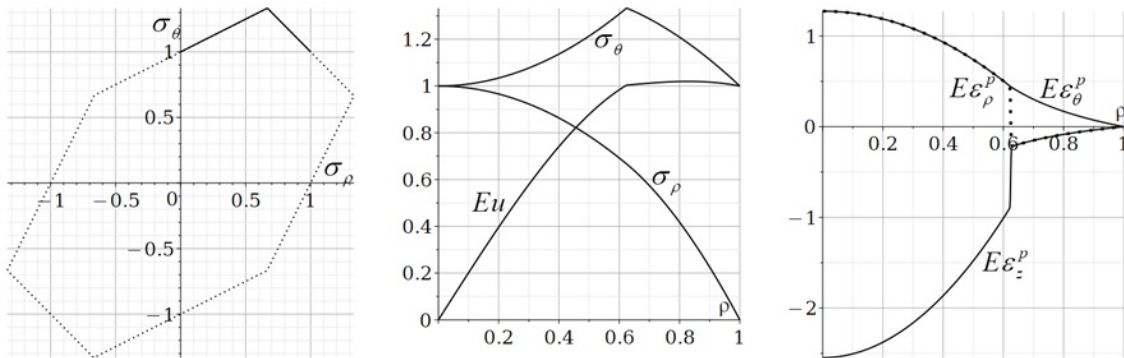


Рис. 8. $n=500$, $m=3.4177$.

Учет пластической сжимаемости

Влияние первого инварианта тензора напряжений на пластическое состояние диска рассматривалось, например, в [8]. Для изотропного идеально пластического тела функция пластичности является функцией инвариантов тензора напряжений [17, 21, 24]. Когда функция пластичности не зависит от первого инварианта тензора напряжений, тогда из ассоциированного закона следует, что след тензора пластических деформаций равен нулю [17, 24]. В этом случае функцию пластичности можно представить в виде функции главных значений девиатора напряжений или второго и третьего инвариантов девиатора напряжений. Наиболее известными условиями пластичности, не зависящими от первого инварианта тензора напряжений и определяющие выпуклые поверхности пластичности, является условие Треска [24], Ишлинского [14], Мизеса [25], Поля [26], Карафиллиса-Бойса [15] и их комбинации.

Рассмотрим вариант, когда в функцию пластичности Карафиллиса-Бойса [15] аддитивно добавлен первый инвариант тензора напряжений

$$F = \left(\frac{(2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3)^{2n} + (2\sigma_2 - \sigma_3 - \sigma_1)^{2n} + (2\sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_2)^{2n}}{2 + 2^{2n}} \right)^{1/2n} + \alpha(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = (1 + \alpha)k.$$

В данном случае согласно ассоциированному закону пластического деформирования имеем

$$\frac{\varepsilon_\rho^p}{\partial F / \partial \sigma_\rho |_{\sigma_z=0}} = \frac{\varepsilon_\theta^p}{\partial F / \partial \sigma_\theta |_{\sigma_z=0}} = \frac{\varepsilon_z^p}{\partial F / \partial \sigma_z |_{\sigma_z=0}}. \quad (36)$$

Поэтому осредненная осевая пластическая деформация определяется из пропорций (36)

$$\varepsilon_z^p = \frac{\partial F / \partial \sigma_z |_{\sigma_z=0}}{\partial F / \partial \sigma_\rho |_{\sigma_z=0}} \varepsilon_\rho^p = \frac{\partial F / \partial \sigma_z |_{\sigma_z=0}}{\partial F / \partial \sigma_\theta |_{\sigma_z=0}} \varepsilon_\theta^p.$$

На рис.9 показаны графики, годографа напряжений, напряжений, пластических деформаций и средней пластической деформации $\varepsilon = (\varepsilon_\rho^p + \varepsilon_\theta^p + \varepsilon_z^p)/3$.

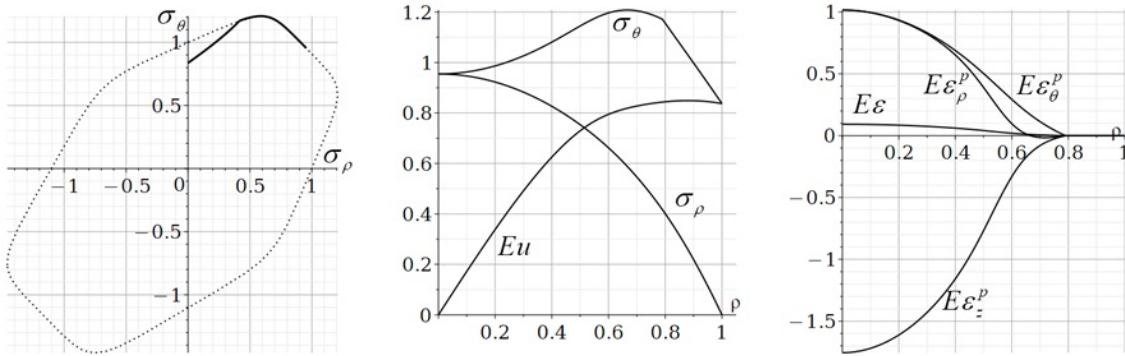


Рис. 9. $n = 6, \alpha = 0.05, m = 3.1984, c = 0.79$.

Заключение

Переход от трехмерной модели к обобщенному плоскому напряженному состоянию, когда рассматриваются осредненные по толщине диска параметры математической модели, при учете пластической сжимаемости, позволяет определить компоненту осевой пластической деформации из осредненных соотношений ассоциированного закона пластического течения или пластического деформирования.

Алгоритм решения задачи о тонком быстровращающемся диске в рамках теории малых деформаций, рассмотренный в данной работе, позволяет выбирать любые функции пластичности. В качестве примера рассматривались условия пластичности максимального приведенного напряжения, условие пластичности Карафиллиса-Бойса и его модификация для учета пластической сжимаемости.

Полученные результаты показывают, что в зависимости от значения параметра нагрузки m , в пластической области выполняться один или три режима условия пластичности максимального приведенного напряжения. При этом сингулярный режим не будет выполняться в некоторой 2D области, а реализуется только на границе перехода от одного регулярного режима к другому. При увеличении значения параметра нагрузки m , когда в пластической области реализуются сингулярный режим, образуется область повторного пластического деформирования и в рамках теории пластического течения при интегрировании соотношений ассоциированного закона, необходимо это учитывать.

В рамках деформационной теории пластического деформирования получаем аналитическое решение задачи. При этом алгоритм решения задачи требует рассмотрение каждого режима в отдельности с учетом сопряжения значения искомых величин на границе перехода к другому режиму, что делает алгоритм решения задачи несколько громоздким.

Если с диска, находящегося в предельном состоянии полностью снять нагрузку, то он полностью переходит в упругое состояние, то есть не возникает зоны повторного пластического деформирования.

При выборе гладкой функции пластичности задача в пластической области решается численно. Увеличение значения параметра n в условии пластичности Карафиллиса-Бойса позволяет получить кривую пластичности, которая с необходимой точностью позволяет аппроксимировать шестиугольник Ишлинского. При этом будет выполняться непрерывность радиальных пластических деформаций. Также, при увеличении, в условии пластичности Карафиллиса-Бойса значения параметра n , в окрестности линии выполнения сингулярного режима условия Ишлинского, появляется область сильного изменения радиальной компоненты тензора пластических деформаций. При $n \rightarrow \infty$ кривая пластичности Карафиллиса-Бойса совпадает с шестиугольником пластичности Ишлинского; при выборе ассоциированного закона пластического деформирования в пластической области появляется линия разрыва значений радиальной компоненты тензора пластических деформаций.

ДОПОЛНИТЕЛЬНО

Вклад авторов. Авторы внесли равный вклад в проведение исследований и написание рукописи.

Конфликт интересов. Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

Источник финансирования. Авторы заявляют об отсутствии внешнего финансирования при проведении исследования.

ADDITIONAL INFORMATION

Authors' contribution. The authors made an equal contribution to the research and writing of the manuscript.

Competing interests. The authors declare that they have no competing interests.

Funding. This study was not supported by any external sources of funding.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Gamer U.* Elastic-plastic deformation of the rotating solid disk // *Ingenieur-Archiv*. – 1984. – Vol. 54, no. 3. – P. 345–354.
2. *Laszlo F.* Geschleuderte Umdrehungskörper im Gebiet bleibender Deformation // *ZAMM*. – 1925. – Vol. 5, no. 4. – P. 281–293.
3. *Rees D. W. A.* Elastic-Plastic Stresses in Rotating Discs by von Mises and Tresca // *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik (ZAMM)*. – 1999. – Vol. 7, no. 4. – P. 281–288.
4. *Соколовский В.* Теория пластичности. – Москва : Высшая школа, 1969. – 608 с.
5. *Gamer U.* Tresca's Yield Condition and the Rotating Disk // *Transactions ASME: Journal of Applied Mechanics*. – 1983. – Vol. 50, no. 2. – P. 676–678.
6. *Semka E., Artemov M., Babkina Y.* Mathematical modeling of rotating disk states // *Journal of Physics: Conference Series*. – 2020. – Vol. 1479. – DOI: 10.1088/1742-6596/1479/1/012122.
7. *Артемов М., Якубенко А.* Математическое моделирование механического поведения вращающегося диска // *Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика*. – 2014. – № 1. – С. 30–38.
8. *Lomakin E., Alexandrov S., Jeng Y.* Stress and strain fields in rotating elastic/plastic annular discs // *Archive of Applied Mechanics*. – 2016. – Vol. 86, no. 1/2. – P. 235–244. – DOI: 10.1007/s00419-015-1101-9.
9. *Артемов М., Барановский Е., Меджидов Р.* О появлении пластических областей во вращающемся диске // *Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния*. – 2024. – № 1. – С. 21–39.
10. *Лямина Е., Новожилова О.* Дизайн равнопрочного вращающегося диска // *Инновационные транспортные системы и технологии*. – 2023. – Т. 9, № 1. – С. 122–134.
11. *Прокудин А.* Расчет профиля равнопрочного вращающегося диска переменной толщины с учетом анизотропии и разной прочности при растяжении и сжатии // *Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Физико-математические науки»*. – 2024. – Т. 28, № 4. – С. 701–720.
12. *Alexandrov S., Rynkovskaya M., Jeng Y.-R.* Design of equi-strength annular disks made of functionally graded materials // *Mechanics Based Design of Structures and*

- Machines. – 2023. – Vol. 52, no. 9. – P. 7045–7062. – DOI: 10.1080/15397734.2023.2297241.
13. On the best volume fraction distributions for functionally graded cylinders, spheres and disks – A pseudospectral approach / H. Abdalla [et al.] // Computational Structures. – 2023. – Vol. 311. – P. 116784. – DOI: 10.1016/j.compstruct.2023.116784.
 14. Ишлинский А. Гипотеза прочности формоизменения // Ученые записки МГУ. – Механика. – 1940. – Т. 46. – С. 117–124.
 15. Karafillis A., Boyce M. A general anisotropic yield criterion using bounds and a transformation weighting tensor // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. – 1993. – Vol. 41, no. 12. – P. 1859–1886.
 16. Freudenthal A., Geiringer H. The Mathematical Theories of the Inelastic Continuum // Elasticity and Plasticity (Elastizität und Plastizität): Handbuch der Physik (Encyclopedia of Physics). 3(6) / ed. by S. Flügge. – Berlin, Heidelberg : Springer, 1958. – P. 229–433.
 17. Ивлев Д. Теория идеальной пластичности. – Москва : Наука, 1966. – 232 с.
 18. Новацкий В. Теория упругости. – Москва : Мир, 1975. – 872 с.
 19. Ишлинский А., Ивлев Д. Математическая теория пластичности. – Москва : Физматлит, 2001. – 704 с.
 20. Timoshenko S., Goodier J. Theory of Elasticity. – 3rd. – New York : McGraw-Hill, 1970. – 591 p.
 21. Chakrabarty J. Theory of Plasticity. – Elsevier Butterworth-Heinemann, 2006. – 882 p.
 22. Aleksandrova N., Artemov M., Baranovskii E. Stress/strain state in a rotating disk // Journal of Physics: Conference Series. – 2018. – Vol. 1203. – DOI: 10.1088/1742-6596/1203/1/012001. – International Conference "Applied Mathematics, Computational Science and Mechanics: Current Problems", Voronezh State University.
 23. Ивлев Д., Быковцев Г. Теория упрочняющегося пластического тела. – Москва : Наука, 1971. – 232 с.
 24. Tresca H. Mémoire sur l'écoulement des corps solides soumis à de fortes pressions // C. R. Acad. Sci. Paris. – 1864. – Vol. 59. – P. 754–758.
 25. Kachanov L. Fundamentals of the Theory of Plasticity. – Moscow : Mir Publishers, 1974. – 482 p.
 26. Paul B. Mathematical criteria of plastic flow and fracture // Fracture. Vol. 2 / ed. by H. Liebovitz. – New York, London, 1968. – P. 336–520.

REFERENCES

1. Gamer U. Elastic-plastic deformation of the rotating solid disk // Ingenieur-Archiv. – 1984. – Vol. 54, no. 3. – P. 345–354.
2. Laszlo F. Geschleuderte Umdrehungskörper im Gebiet bleibender Deformation // ZAMM. – 1925. – Vol. 5, no. 4. – P. 281–293.
3. Rees D. W. A. Elastic-Plastic Stresses in Rotating Discs by von Mises and Tresca // Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik (ZAMM). – 1999. – Vol. 7, no. 4. – P. 281–288.
4. Sokolovsky V. Theory of plasticity. – Moscow : Higher school, 1969. – 608 p.

5. *Gamer U.* Tresca's Yield Condition and the Rotating Disk // Transactions ASME: Journal of Applied Mechanics. – 1983. – Vol. 50, no. 2. – P. 676–678.
6. *Semka E., Artemov M., Babkina Y.* Mathematical modeling of rotating disk states // Journal of Physics: Conference Series. – 2020. – Vol. 1479. – DOI: 10.1088/1742-6596/1479/1/012122.
7. *Artemov M., Yakubenko A.* Mathematical modeling of mechanical behavior of a rotating disk // Bulletin of the Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics. – 2014. – No. 1. – P. 30–38.
8. *Lomakin E., Alexandrov S., Jeng Y.* Stress and strain fields in rotating elastic/plastic annular discs // Archive of Applied Mechanics. – 2016. – Vol. 86, no. 1/2. – P. 235–244. – DOI: 10.1007/s00419-015-1101-9.
9. *Artemov M., Baranovsky E., Medzhidov R.* On the appearance of plastic regions in a rotating disk // Bulletin of the Chuvash State Pedagogical University named after I. Ya. Yakovlev. Series: Limit State Mechanics. – 2024. – Vol. 59, no. 1. – P. 21–39.
10. *Lyamina E., Novozhilova O.* Design of an equal-strength rotating disk // Innovative transport systems and technologies. – 2023. – Vol. 9, no. 1. – P. 122–134.
11. *Prokudin A.* Calculation of the profile of an equal-strength rotating disk of variable thickness taking into account anisotropy and different strength under tension and compression // Bulletin of Samara State Technical University. Series: Physical and Mathematical Sciences. – 2024. – Vol. 28, no. 4. – P. 701–720.
12. *Alexandrov S., Rynkovskaya M., Jeng Y.-R.* Design of equi-strength annular disks made of functionally graded materials // Mechanics Based Design of Structures and Machines. – 2023. – Vol. 52, no. 9. – P. 7045–7062. – DOI: 10.1080/15397734.2023.2297241.
13. On the best volume fraction distributions for functionally graded cylinders, spheres and disks – A pseudospectral approach / H. Abdalla [et al.] // Computational Structures. – 2023. – Vol. 311. – P. 116784. – DOI: 10.1016/j.compstruct.2023.116784.
14. *Ishlinsky A.* Hypothesis of strength of deformation // Scientific Notes of Moscow State University. Mechanics. – 1940. – Vol. 46. – P. 117–124.
15. *Karafillis A., Boyce M.* A general anisotropic yield criterion using bounds and a transformation weighting tensor // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. – 1993. – Vol. 41, no. 12. – P. 1859–1886.
16. *Freudenthal A., Geiringer H.* The Mathematical Theories of the Inelastic Continuum // Elasticity and Plasticity (Elastizität und Plastizität): Handbuch der Physik (Encyclopedia of Physics). 3(6) / ed. by S. Flügge. – Berlin, Heidelberg : Springer, 1958. – P. 229–433.
17. *Ivlev D.* Theory of ideal plasticity. – Moscow : Nauka, 1966. – 232 p.
18. *Novatsky V.* Theory of elasticity. – Moscow : Mir, 1975. – 872 p.
19. *Ishlinsky A., Ivlev D.* Mathematical theory of plasticity. – Moscow : Fizmatlit, 2001. – 704 p.
20. *Timoshenko S., Goodier J.* Theory of Elasticity. – 3rd. – New York : McGraw-Hill, 1970. – 591 p.
21. *Chakrabarty J.* Theory of Plasticity. – Elsevier Butterworth-Heinemann, 2006. – 882 p.

22. *Aleksandrova N., Artemov M., Baranovskii E.* Stress/strain state in a rotating disk // Journal of Physics: Conference Series. – 2018. – Vol. 1203. – DOI: 10.1088/1742-6596/1203/1/012001. – International Conference Applied Mathematics, Computational Science and Mechanics: Current Problems, Voronezh State University.
23. *Ivlev D., Bykovtsev G.* Theory of a hardening plastic body. – Moscow : Nauka, 1971. – 232 p.
24. *Tresca H.* Mémoire sur l'écoulement des corps solides soumis à de fortes pressions // C. R. Acad. Sci. Paris. – 1864. – Vol. 59. – P. 754–758.
25. *Kachanov L.* Fundamentals of the Theory of Plasticity. – Moscow : Mir Publishers, 1974. – 482 p.
26. *Paul B.* Mathematical criteria of plastic flow and fracture // Fracture. Vol. 2 / ed. by H. Liebovitz. – New York, London, 1968. – P. 336–520.