

М. И. Быкова, А. В. Ковалев, Н. В. Минаева, А. И. Шашкин

ПОРОЖДЕНИЕ ПЕРЕДНИХ КРОМОК ТРЕЩИН ПРОДОЛЬНОГО И ПОПЕРЕЧНОГО СДВИГОВ ПРИ ОТРАЖЕНИИ ПРЕДЕЛЬНОЙ КРОМКИ ТРЕЩИНЫ ПРОДОЛЬНОГО СДВИГА ОТ ЖЁСТКОЙ ГРАНИЦЫ

Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия

Аннотация. Работа посвящена исследованию формирования и распространения фронта продольной и поперечно-сдвиговой трещины при взаимодействии с жесткой границей. Предлагается концепция моделирования, согласно которой передняя кромка трещины представлена распространяющейся ортогональным образом относительно фронта основной продольной волны пластического нагружения областью, где наблюдаются высокие градиенты скоростей и напряжений. Изучена зависимость интенсивности вторичных трещин простого сдвига и отрыва от угла падения первичной трещины, а также физико-механических характеристик материала. В результате исследования выявлены конкретные условия, при которых отражение отсутствует, что способствует формированию иных видов трещин, отличных от исходных продольных и поперечных сдвигов.

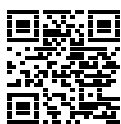
Ключевые слова: трещины, продольный сдвиг, поперечный сдвиг, отражение, пластическое нагружение

Быкова Мария Игоревна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического и прикладного анализа; e-mail: bykova_mi@amm.vsu.ru; AuthorID: 124717

Ковалев Алексей Викторович, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой механики и компьютерного моделирования; e-mail: kovalev@amm.vsu.ru; <https://orcid.org/0000-0002-3730-9621>; AuthorID: 11051

Минаева Надежда Витальевна, доктор физико-математических наук, профессор кафедры механики и компьютерного моделирования; e-mail: minaeva@yandex.ru; <https://orcid.org/0000-0002-9366-5575>; AuthorID: 11715

Шашкин Александр Иванович, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математического и прикладного анализа; e-mail: shashkin@amm.vsu.ru; <https://orcid.org/0000-0001-9925-5019>; AuthorID: 156046



для цитирования: Быкова М. И., Ковалев А. В., Минаева Н. В., Шашкин А. И. Порождение передних кромок трещин продольного и поперечного сдвигов при отражении предельной кромки трещины продольного сдвига от жёсткой границы // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2025. № 2(64). С. 168–184. DOI: 10.37972/chgpu.2025.64.2.010. EDN: JIMZGG

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0).

M. I. Bykova, A. V. Kovalev, N. V. Minaeva, A. I. Shashkin

GENERATION OF THE LEADING EDGES OF LONGITUDINAL AND TRANSVERSE SHEAR CRACKS WHEN THE LEADING EDGE OF A LONGITUDINAL SHEAR CRACK REFLECTS FROM A RIGID BOUNDARY

Voronezh State University, Voronezh, Russia

Abstract. The research focuses on studying the formation and propagation of the fronts of longitudinal and transversely sheared cracks interacting with a rigid boundary. A novel concept of modeling is proposed, according to which the leading edge of the crack is represented by a region characterized by high gradients of velocities and stresses, spreading orthogonally relative to the main front of the plastic loading wave. The investigation examines the dependency of the intensity of secondary simple-shear and tensile cracks on the angle of incidence of the initial crack and the physico-mechanical characteristics of the material. As a result of the study, specific conditions have been identified under which reflection does not occur, thus facilitating the formation of other types of cracks distinct from the original longitudinal and transverse shear ones.

Keywords: cracks, longitudinal shear, transverse shear, reflection, plastic loading

Maria I. Bykova, PhD (Phys.–Math.), Associate Professor, Department of Mathematical and Applied Analysis; **e-mail:** bykova_mi@amm.vsu.ru; AuthorID: 124717

Alexey V. Kovalev, Dr. Sci. (Phys.–Math.), Professor, Head of the Department of Mechanics and Computer Modeling, Voronezh State University, Voronezh, Russia; **e-mail:** kovalev@amm.vsu.ru;

<https://orcid.org/0000-0002-3730-9621>; AuthorID: 11051

Nadezhda V. Minaeva, Dr. Sci. (Phys.–Math.), Professor, Head of the Department of Mechanics and Computer Modeling, Voronezh State University, Voronezh, Russia; **e-mail:** minaeva@yandex.ru;

<https://orcid.org/0000-0002-9366-5575>; AuthorID: 11715

Alexander I. Shashkin, Dr. Sci. (Phys.–Math.), Professor, Head of the Department of Mathematical and Applied Analysis, Voronezh State University, Voronezh, Russia; **e-mail:** shashkin@amm.vsu.ru;

<https://orcid.org/0000-0001-9925-5019>; AuthorID: 156046



to cite this article: Bykova M. I., Kovalev A. V., Minaeva N. V., Shashkin A. I. Generation of the leading edges of longitudinal and transverse shear cracks when the leading edge of a longitudinal shear crack reflects from a rigid boundary // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2025. No 2(64). p. 168–184. DOI: 10.37972/chgpu.2025.64.2.010

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Received: 01.05.25;

accepted: 10.07.25;

published: 19.12.25.

Введение. Физической трещиной в твёрдых телах будем называть поверхность S , ограниченную кривой L – кромкой трещины. Поскольку на поверхности S возможно возникновение разрывов величин перемещений и напряжений, введем обозначения сторон \hat{S} и \check{S} поверхности S , принадлежащих к двум областям тела, разделённого данной поверхностью.

Изучение эволюции трещины будем проводить путем анализа роста поверхности S вдоль ее кромки L . На расстоянии от кромки L , существенно превышающем ее линейные размеры, материал будем рассматривать как идеально упругий. В свою очередь, в непосредственной близости к вершине трещины (в окрестности кромки L), наблюдается разрушение материала посредством отрыва или сдвига, что свидетельствует о неприменимости классической упругой модели к описанию процесса в вершине трещины [1–3].

В [2] показано, что в вершине трещины в наномасштабе протекают процессы физического и химического взаимодействия частиц материала плёночного характера. Данные взаимодействия являются причиной необратимого формоизменения тела.

В окрестностях вершины трещины статические деформации могут адекватно аппроксимироваться моделью пластического течения [1–3]. При переходе к рассмотрению динамической постановке в первом приближении данный процесс может быть рассмотрен как вязкопластическое течение материала [4, 5] с учетом влияния скорости деформирования.

Экспериментальные исследования указывают на сложность определения скорости s распространения трещины ввиду сравнительно малых размеров исследуемых образцов и большим значением самой скорости, соизмеримой со скоростями c_1 или c_2 распространения продольных Σ_1 или сдвиговых Σ_2 упругих волн [3].

Теория конечных деформаций допускает существование поверхности разрыва полей напряжений и скоростей для математической модели динамического деформирования упруговязкопластического материала. Данные поверхности движутся со скоростями c_1 и c_2 упругих волн. Указанное допущение может быть использовано для описания движения передних кромок трещин продольного и поперечного сдвигов и передних кромок отрыва [6]. Процессы распространения поверхностей разрывов скоростей и напряжений рассмотрены в ряде работ [7, 8].

Интерес представляют закономерности распространения передних кромок трещин и их отражения от разного вида границ – жёстко закреплённых или с другими заданными граничными условиями.

Одной из возможных моделей динамического деформирования материала в окрестности вершины трещины, учитывающей свойства упругости, пластичности и вязкости, является модель Бингама.

1. Основные закономерности деформирования упруговязкопластического материала на передних кромках трещин. Согласно модели

упруговязкопластического материала [5–7, 9–11], используемой для описания поведения материала около вершины растущей трещины, до тех пор, пока действующие напряжения ниже предела пластичности Мизеса K , материал ведет себя исключительно упруго. После превышения указанного предела начинают возникать дополнительные пластические деформации, сопровождающиеся затухающим эффектом вязкого сопротивления.

$$\sigma_{ij} = \lambda e_{kk} \delta_{ij} + 2\mu e_{ij} - 2\mu e_{ij}^p; \quad e_{ij} = e_{ij}^e + e_{ij}^p; \quad e_{ij}^p = e_{ij}^v; \quad \varepsilon_{ij}^p = \frac{\partial e_{ij}^p}{\partial t} = \frac{(I_2 - K\sqrt{2}) \sigma'_{ij}}{I_2 \eta}. \quad (1)$$

Здесь: $e_{ij} = \frac{(u_{i,j} + u_{j,i})}{2}$ – полные деформации по Коши; $u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$; $I_2 = (\sigma'_{ij} \sigma'_{ij})^{\frac{1}{2}}$, где $\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij}$ – девиаторные компоненты тензора напряжений σ_{ij} ; λ , μ – упругие параметры Ламе; η – коэффициент вязкости.

Реологические соотношения, представленные системой уравнений (1), включающую в себя линейные уравнения в частных производных и полулинейные уравнения для скоростей пластических деформаций $\varepsilon_{ij}^p = \frac{\partial e_{ij}^p}{\partial t}$. Критерий начала пластических процессов определяется условием пластичности Мизеса, которое выражено следующим образом:

$$\varepsilon_{ij}^p = 0, \text{ если } \sigma_{ij}^p \sigma_{ij}^p - 2K^2 < 0; \quad \varepsilon_{ij}^p \neq 0, \text{ если } \sigma_{ij}^p \sigma_{ij}^p - 2K^2 \geq 0. \quad (2)$$

Модель динамических деформаций упруговязкопластичного материала в области передней кромки трещины отрыва представлена полным набором уравнений, число которых строго соответствует количеству неизвестных функций, необходимых для полного описания напряженно-деформированного состояния. Основой данной модели служат реологические уравнения, устанавливающие связь между механическими характеристиками материала и действующими внешними силами, дополненные уравнениями движения, выраженными через напряжения.

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + b_i; \quad \text{где } b_i \text{ — массовые силы} \quad (3)$$

и уравнением неразрывности $\rho = \rho_0 = \text{const}$ где ρ – плотность среды.

Рассмотрим систему уравнений (1)–(3), содержащую частные производные по x и времени t , на переднем фронте пластического предвестника трещины Σ_δ . Для этого преобразуем данную систему, записав её в подвижной системе координат, где y – криволинейные координаты в локальной подвижной системе координат,

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial n} n_i + g^{\alpha\beta} \frac{\partial x_i}{\partial y_\beta} \cdot \frac{\partial f}{\partial y_\alpha}, \quad \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\delta f}{\delta t} - c \frac{\partial f}{\partial n}, \quad (i = 1, 2, 3; \alpha, \beta = 1, 2). \quad (4)$$

Здесь $\frac{\delta f}{\delta t}$ – локальная производная по времени t от функции, заданной на подвижной поверхности Σ ; $g^{\alpha\beta} = \frac{\partial x_i}{\partial y_\alpha} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial y_\beta}$ – метрический тензор.

Реологические уравнения (1) и уравнения движения (3), записанные в подвижной системе координат, связанной с подвижной передней кромкой трещины, принимают вид

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= \lambda e_{kk} \delta_{ij} + 2\mu (e_{ij} - e_{ij}^p), \\ \varepsilon_{ij}^p &= \frac{\partial e_{ij}^p}{\partial t} = \frac{\delta e_{ij}^p}{\delta t} - c \frac{\partial e_{ij}^p}{\partial n} = \frac{I_2 - K\sqrt{2}}{I_2 \eta} \sigma'_{ij}, \\ e_{ij} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial n} n_j + \frac{\partial u_j}{\partial n} n_i + g^{\alpha\beta} \frac{\partial x_j}{\partial y_\beta} \frac{\partial u_i}{\partial y_\alpha} + g^{\alpha\beta} \frac{\partial x_i}{\partial y_\beta} \frac{\partial u_j}{\partial y_\alpha} \right), \\ v_i &= \frac{\partial u_i}{\partial t} = \frac{\delta u_i}{\delta t} - c \frac{\partial u_i}{\partial n}, \\ \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} &= \rho \frac{\delta v_i}{\delta t} - c \frac{\partial v_i}{\partial n} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial n} n_j + g^{\alpha\beta} \frac{\partial x_i}{\partial y_\beta} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial y_\alpha} + b_i.\end{aligned}\quad (5)$$

Здесь использована связь полной и локальной производных на переднем фронте трещины.

Представление решений для скоростей и напряжений в виде степенного ряда с разрывом первого рода при $n = 0$

$$f(n, y_1, y_2, t) = \Sigma \frac{1}{l!} \cdot \frac{\partial^l f(0, y_1, y_2, t)}{\partial n^l} n^l. \quad (6)$$

относится к классу обобщённых функций, не имеющих нормальной производной в точке разрыва и подчиняющихся дифференциальным законам (5) в интегральной форме. Последовательно применяя интегрирование уравнений (5) по n на отрезке от $-\varepsilon$ до $+\varepsilon$ и переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$ [12], получим следующие уравнения:

$$-\rho c [v_i] = [\sigma_{ij}] n_j, [e_{ij}^p] = 0, \quad \left[\frac{\partial e_{ij}^p}{\partial n} \right] \neq 0. \quad (7)$$

Физический смысл второго уравнения в (7) заключается в следующем: пластические деформации e_{ij}^p непрерывны на поверхности Σ_δ , являющейся предвестником трещины. При этом возникает градиент пластических деформаций:

$$[e_{ij}^p] = 0; \quad \left[\frac{\partial e_{ij}^p}{\partial n} \right] \neq 0. \quad (8)$$

Система уравнений (7) в части реологических уравнений и выражений для деформаций e_{ij} и скоростей v_i , записанная в терминах разрывов основных величин на поверхности предвестника Σ_δ , принимает вид

$$\begin{aligned}[\sigma_{ij}] &= \lambda [e_{kk}] \delta_{ij} + 2\mu ([e_{ij}] - [e_{ij}^p]); \quad [v_i] = \frac{\delta [u_i]}{\delta t} - c \left[\frac{\partial u_i}{\partial n} \right]; \\ [e_{ij}] &= \frac{1}{2} \left([u_{i,j}] + [u_{j,i}] + g^{\alpha\beta} x_{j,\beta} \left[\frac{\partial u_i}{\partial y_\alpha} \right] + g^{\alpha\beta} x_{i,\beta} \left[\frac{\partial u_j}{\partial y_\alpha} \right] \right).\end{aligned}\quad (9)$$

Нетрудно видеть, что система уравнений (7)-(9) является однородной системой линейных алгебраических уравнений. Неизвестными величинами в ней являются скачки скоростей $[v_i]$, градиентов перемещений $\left[\frac{\partial u_i}{\partial n} \right]$, напряжений $[\sigma_{ij}]$, перемещений $[u_i]$ и градиентов перемещений $\left[\frac{\partial u_i}{\partial y_\alpha} \right]$ вдоль y_α .

Система (5)-(9) может быть дополнена условиями сплошности материала и непрерывности перемещений вдоль Σ_δ по y_α , которые записываются в форме

$$\frac{\delta [u_i]}{\delta t} = 0; \quad \left[\frac{\partial u_i}{\partial y_\alpha} \right] = \frac{\partial [u_i]}{\partial y_\alpha} = 0. \quad (10)$$

Исключая $[\sigma_{ij}]$, $[e_{ij}]$, $[u_{i,j}]$ из уравнений (7) получаем

$$\rho c^2 [v_i] = (\lambda + \mu) [v_j] n_i n_j + \mu [v_i]. \quad (11)$$

Существует только два отличных от нуля решения для $[v_i]$:

$$[v_i] n_i = \omega_n, \text{ при условии } \rho c_1^2 = \lambda + 2\mu. \quad (12)$$

$$[v_i] \tau_i = \omega_\tau, \text{ при условии } \rho c_2^2 = \mu. \quad (13)$$

Решение разрывного типа, характеризуемое наличием резких изменений нормальной составляющей скорости $[v_n] = \omega_n$ на границе движущегося со скоростью c_1 фронта Σ_1 и тангенциальной составляющей скорости $[v_\tau] = \omega_\tau$ на фронте Σ_2 , перемещающемся со скоростью c_2 , реализуется исключительно вблизи краев развивающихся трещин.

Описанный подход учитывает особенности кинематики перемещения частиц материала в непосредственной близости от областей образования трещин продольного сдвига, отрыва и антиплоской деформации. Благодаря этому удастся уточнить математическую модель, позволяющую описать движение частиц среды возле кромки трехмерной трещины, используя формализованные понятия скорости перемещения отдельных элементов вещества.

2. Математическая модель передней кромки трещины. Для исследования процессов, происходящих вблизи передней кромки L трещины, выделим ее δ – окрестность, имеющую цилиндрическую форму с криволинейной осью L . Граница Σ_δ этой области представляет собой поверхность слабых разрывов, возникающих вследствие начальных возмущений при зарождении процесса трещинообразования. Кривую L_δ , расположенную на Σ_δ , примем за предвестник появления передней трещины.

Пространственная траектория продвижения фронта волны-предвестника характеризуется кривой L_δ , лежащей на поверхности Σ_δ . Символы \wedge и \vee будут использоваться для обозначения значений функций выше и ниже следа L_δ трещины соответственно.

Анализ соответствия кинематики движения частиц материала вблизи вершины трещины в перемещениях и кинематики поведения среды вблизи фронтов продольных и сдвиговых волн в скоростях перемещений позволяет сделать выводы:

- (1) Передняя кромка предвестника пространственной трещины L развивается вдоль направления, ортогонального волновой поверхности Σ_δ с принадлежащей ей линией L_δ , характеризующаяся разрывами скоростей и напряжений.

- Развитие трещины, вызванной продольным сдвигом, происходит со скоростью c_1 , соответствующей скорости распространения продольных волн в упругом материале.
 - Движение фронта трещины, обусловленное антиплоским сдвигом или отрывом, протекает со скоростью c_2 , равной скорости сдвиговых волн в среде.
- (2) В целях удобства введём характеристику интенсивности передней кромки трещины L_δ , определяемой изменением скорости при прохождении через границу S .
- В случае трещины продольного сдвига на Σ_1 интенсивность рассчитывается следующим образом

$$\omega_{nL} = \left(\hat{v}_n - \check{v}_n \right) \Big|_L = [v_n]_L. \quad (14)$$

- Для трещины антиплоского сдвига на Σ_2 справедлива формула

$$\omega_{2L} = \left(\hat{v}_{\tau_2} - \check{v}_{\tau_2} \right) \Big|_L = [v_{\tau_2}]_L. \quad (15)$$

- Для трещины отрыва на Σ_2 может быть использовано равенство

$$\omega_{1L} = \left(\hat{v}_{\tau_1} - \check{v}_{\tau_1} \right) \Big|_L = [v_{\tau_1}]_L. \quad (16)$$

Таким образом, классификация типа трещины основывается на типе предвестника Σ_1 или Σ_2 , сам факт существования передней кромки определяется интенсивностью фронта, обусловленной превышением динамического второго инварианта девиатора тензора напряжений над пределом пластичности K : $\sigma'_{ij}\sigma'_{ij} \geq K^2$.

Покажем, что интенсивность трещины ω_L (14)-(16) определяется интенсивностью соответствующих волн сильного разрыва Σ_1 и Σ_2

В окрестности предвестника L трещины на Σ имеют место выражения

$$\begin{aligned} \hat{v} &= v^+ - \left[\hat{v} \right]; & \check{v} &= v^+ - \left[\check{v} \right]; \\ \omega_L &= \hat{v} - \check{v} = - \left[\hat{v} \right] + \left[\check{v} \right]. \end{aligned}$$

Предложим следующую концепцию оценки наличия и развития трещины в твёрдом теле: трещина возникает и распространяется, если на одной или обеих сторонах её передней кромки L наблюдается пластическое деформирование материала. Данный подход предполагает исследование механизма формирования и эволюции трещин путём подробного изучения напряжённо-деформированного состояния среды, находящегося за фронтом волн сильного разрыва.

3. Кинематика отражения предельной пластической волны предельного сдвига от жёсткой границы. Теоретические расчеты наряду с результатами экспериментальных наблюдений [3] подтверждают, что передние края трещин, находящиеся на границах волновых фронтов, формируются как ортогональные траектории распространения самих фронтов. Установлено, что

скорость продвижения этих краев абсолютно соответствует скоростям распространения продольных или сдвиговых волн в изучаемой среде.

$$c_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}. \quad (17)$$

Процесс распространения передней кромки трещины описывается δ -окрестностью пластичной зоны, которая создает механизм направленного распространения трещины перпендикулярно направлению движения фронта пластического нагружения. Например, для продольно-направленной трещины предполагается наличие разрывов скорости за фронтом продольной волны, пересекающей плоскость трещины.

Интенсивность передней кромки трещины оценивается через разницу продольных скоростей, рассчитанных выше и ниже плоскости самой трещины (14). Скорости за фронтом волны подчиняются фундаментальным законам вязкоупругопластического деформирования материала (11) и тесно связаны с характером отражения волновых фронтов от граничных поверхностей объекта. Такая постановка задачи позволяет выявить точные количественные связи, характерные для каждой отдельной ситуации распространения трещины.

Обозначим области за падающими и отражёнными волнами Σ_1, Σ_2 как (1), (2) и (3) [12]. Исходя из условия одновременного присутствия в конкретной точке пространства трёх взаимодействующих волн Σ_1, Σ'_1 и Σ'_2 (штрихом обозначен фронт отраженной волны), можно заметить, что углы падения и отражения волн подчиняются закону Снеллиуса:

$$\frac{c_1}{\sin \varphi} = \frac{c_1}{\sin \varphi'} = \frac{c_2}{\sin \psi'}. \quad (18)$$

Из этого положения получаем соотношение углов

$$\sin \psi' = \frac{c_2}{c_1} \sin \varphi, \quad \varphi' = \varphi. \quad (19)$$

Условия совместности для напряжений и скоростей на фронте сильной волны перед Σ_1 имеют вид:

$$-c_1 [\sigma_{ij}] = (\lambda \delta_{ij} + 2\mu n_i n_j) \omega_n, \quad (20)$$

где ω_n – скачок нормальной компоненты скорости на фронте волны и $\omega_n = [v_i] n_i$.

Условия (12) и (13) подчеркивают важный факт: источником фронта Σ_δ предвестника пространственной трещины выступает волна продольной деформации для трещины продольного сдвига, распространяющаяся со скоростью c_1 ($\rho c_1^2 = \lambda + 2\mu$), и волна сдвиговой деформации для трещин отрыва или поперечного сдвига, распространяющаяся со скоростью c_2 ($\rho c_2^2 = \mu$).

Связь между скачками напряжений и скачком скорости выражается таким образом:

$$[\sigma_{ij}] = -\frac{1}{c} \lambda [v_n] \delta_{ij} - \frac{1}{c} \mu ([v_i] n_j + [v_j] n_i).$$

Наконец, обратимся к рассмотрению траектории движения передней кромки трещины на фронте Σ_δ волнового предвестника, которая представляется в виде пространственной кривой L_δ , расположенной на поверхности Σ_δ .

Рассмотрим след передней кромки трещины на фронте Σ_δ волнового предвестника, который представлен пространственной кривой L_δ , принадлежащей поверхности Σ_δ .

Скачки скоростей и напряжений на отраженных волнах Σ'_1 и Σ'_2 связаны соотношениями

$$-c_1 [\sigma_{ij}]_1 = \left(\lambda \delta_{ij} + 2\mu n_i^{(1)} n_j^{(1)} \right) \omega_1, \quad [v_i]_1 = \omega_1 \cdot n_i^{(1)}. \quad (21)$$

$$-c_2 [\sigma_{ij}]_2 = \mu \left(\tau_i^{(2)} n_j^{(2)} + \tau_j^{(2)} n_i^{(2)} \right) \omega_\tau, \quad [v_i]_2 = \omega_\tau \tau_i^{(2)} \quad (22)$$

Систему уравнений (20)-(22) дополним граничными условиями

$$v_i^{(3)} \cdot n_i = 0, \text{ где } v_i^{(3)} - \text{ скорость материала на границе в зоне (3)}. \quad (23)$$

Приведём выражения для компонент векторов \bar{n} , $\bar{n}^{(1)}$, $\bar{n}^{(2)}$, $\bar{\tau}^{(2)}$, \bar{N} , \bar{T} :

$$\begin{aligned} \bar{n} &= (\sin \varphi, \cos \varphi, 0); \quad \bar{n}^{(1)} = (\sin \varphi', -\cos \varphi', 0) \\ \bar{n}^{(2)} &= (\sin \psi', -\cos \psi', 0); \quad \bar{\tau}^{(2)} = (\cos \psi', \sin \psi', 0); \\ \bar{N} &= (0, 1, 0); \quad \bar{T} = (1, 0, 0). \end{aligned} \quad (24)$$

Введем следующие величины на падающих и отражённых волнах:

$$[\sigma_{ij}]_0 = -\sigma_{ij}^{(1)}; \quad [\sigma_{ij}]_1 = \sigma_{ij}^{(1)} - \sigma_{ij}^{(2)}; \quad [\sigma_{ij}]_2 = \sigma_{ij}^{(2)} - \sigma_{ij}^{(3)}. \quad (25)$$

Из (20)-(22) получим

$$\begin{aligned} -[\sigma_{ij}]_0 &= \frac{1}{c_1} (\lambda \delta_{ij} + 2\mu n_i n_j) \omega, \\ -[\sigma_{ij}]_1 &= \frac{1}{c_1} \left(\lambda \delta_{ij} + 2\mu n_i^{(1)} n_j^{(1)} \right) \omega_1, \quad -[\sigma_{ij}]_2 = \frac{1}{c_2} \mu \left(\tau_i^{(2)} n_j^{(2)} + \tau_j^{(2)} n_i^{(2)} \right) \omega_\tau. \end{aligned} \quad (26)$$

Для вычисления интенсивности напряжений $I_2^{(2)}$ и $I_2^{(3)}$ определим напряжения в зонах (2) и (3), исключая скачки напряжений. Из формул (25)-(26) получим выражение для напряжений в зоне (3)

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^{(1)} - \sigma_{ij}^{(1)} + \sigma_{ij}^{(2)} - \sigma_{ij}^{(2)} + \sigma_{ij}^{(3)} &= \frac{1}{c_1} (\lambda \delta_{ij} + 2\mu n_i n_j) \omega + \\ + \frac{1}{c_1} \left(\lambda \delta_{ij} + 2\mu n_i^{(1)} n_j^{(1)} \right) \omega_1 + \frac{\mu}{c_2} \left(\tau_i^{(2)} n_j^{(2)} + \tau_j^{(2)} n_i^{(2)} \right) \omega_\tau. \end{aligned} \quad (27)$$

Учитывая соотношения (26)-(27), из формулы (25) получим

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^{(2)} &= \sigma_{ij}^{(3)} + [\sigma_{ij}]_2 = \frac{1}{c_1} (\lambda \delta_{ij} + 2\mu n_i n_j) \omega + \\ + \frac{1}{c_1} \left(\lambda \delta_{ij} + 2\mu n_i^{(1)} n_j^{(1)} \right) \omega_1 + \frac{\mu}{c_2} \left(\tau_i^{(2)} n_j^{(2)} + \tau_j^{(2)} n_i^{(2)} \right) \omega_\tau - \frac{\mu}{c_2} \left(\tau_i^{(2)} n_j^{(2)} + \tau_j^{(2)} n_i^{(2)} \right) \omega_\tau = \\ &= \frac{1}{c_1} (\lambda \delta_{ij} + 2\mu n_i n_j) \omega + \frac{1}{c_1} \left(\lambda \delta_{ij} + 2\mu n_i^{(1)} n_j^{(1)} \right) \omega_1. \end{aligned}$$

Принимая во внимание, что на предельной продольной пластической волне $\omega = \frac{\sqrt{3}K}{2\mu}$ и, вводя обозначение $\tilde{c} = \frac{c_2^2}{c_1^2}$, получим выражение для ω через \tilde{c}

$$\omega^2 = \frac{K^2}{\rho^2 \tilde{c} c_1^2 \left(\frac{10}{3} \tilde{c} - 1 \right)}. \quad (28)$$

Граничные условия отсутствия скорости $v_i^{(3)} = 0$ на отражающей границе позволяют определить скачки скоростей на отражённых продольной и сдвиговой волнах. На отражённых волнах при условии $v_i^{(3)} = 0$ имеем:

$$\begin{aligned} [v_i]' &= v_i^{(1)} - v_i^{(2)} = \omega'_n n'_i, \\ [v_i]'' &= v_i^{(2)} - v_i^{(3)} = \omega''_\tau \tau''_i. \end{aligned} \quad (29)$$

Складывая последние два уравнения, получим одно векторное уравнение

$$\omega'_n n'_i + \omega''_\tau \tau''_i = v_i^{(1)} = -\omega n_i. \quad (30)$$

В проекции на нормаль отражённой продольной волны n'_i и на касательное направление τ''_i система уравнений (30) представляет собой систему двух линейных алгебраических уравнений для скачков отражённых волн ω'_n и ω''_τ , которая получается путём умножения уравнения (30) на n'_i и τ''_i .

$$\begin{aligned} 1) \quad & \omega'_n + \omega''_\tau \tau''_i n'_i = -\omega n_i n'_i; \\ 2) \quad & \omega'_n n'_i \tau''_i + \omega''_\tau = -\omega n_i \tau''_i. \end{aligned} \quad (31)$$

Решение для скачка ω'_n скорости на отражённой продольной волне получим, если первое уравнение системы (31) умножить на свёртку $n'_k \tau''_k$ и сложить его со вторым уравнением. А решение для скачка ω''_τ получим, умножив второе уравнение системы (31) на свёртку $n'_k \tau''_k$ и сложив его с первым.

$$\omega'_n = -\omega \frac{n_i n'_i - n_k \tau''_k n'_i \tau''_i}{1 - (n_i \tau''_i)^2}. \quad (32)$$

$$\omega''_\tau = -\omega \frac{n_i \tau''_i - (n_i n'_i) n_k \tau''_k}{1 - (n_i \tau''_i)^2}. \quad (33)$$

Выражения для скачков отражённых волн ω'_n и ω''_τ удобнее представлять в безразмерном виде как коэффициенты отражения продольной и сдвиговой волн. Развёртывая скалярные произведения векторов n , n' , τ'' и используя закон Снелла (19), выражение для безразмерных коэффициентов отражения продольной и сдвиговой волн примут вид

$$\tilde{k}_1 = \frac{\omega'_n}{\omega} = \frac{\cos 2\varphi + \sin^2(1 - \tilde{c}^2)}{1 - \sin^2 \left(\tilde{c} \cdot \cos \varphi + \sqrt{1 - \tilde{c}^2 \sin^2 \varphi} \right)^2}. \quad (34)$$

$$\tilde{k}_2 = \frac{\omega''_\tau}{\omega} =$$

$$= \frac{-\left(\sin \varphi \cdot \sqrt{1 - \tilde{c}^2 \sin^2 \varphi} + \tilde{c} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin 2\varphi\right) - \cos 2\varphi \cdot \left(\sin \varphi \sqrt{1 - \tilde{c}^2 \sin^2 \varphi} - \tilde{c} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin 2\varphi\right)}{1 - \sin^2 \left(\tilde{c} \cdot \cos \varphi + \sqrt{1 - \tilde{c}^2 \sin^2 \varphi}\right)^2}. \quad (35)$$

На рисунках 1 и 2 представлены 3d-графики коэффициентов отражения как функции угла падения φ и коэффициента $\tilde{c} = t = \frac{c_2}{c_1}$. Графики отражают факт увеличения коэффициентов отражения с увеличением угла φ и ростом отношения $\frac{c_2}{c_1}$ скоростей продольной и сдвиговой волн.

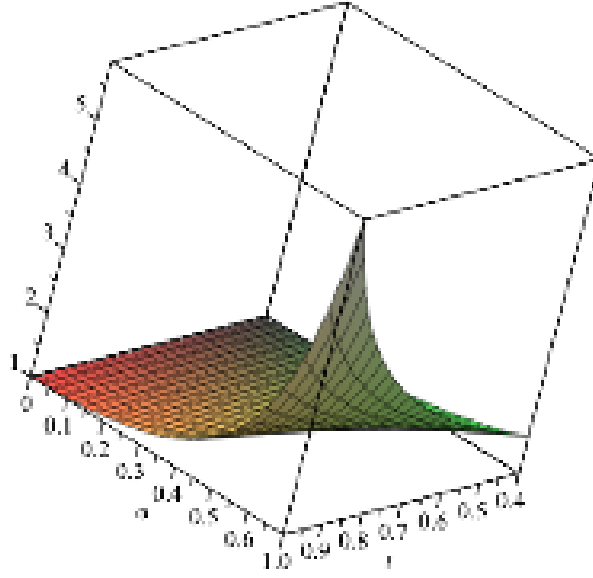


Рис. 1. Графическое представление коэффициента $\tilde{k}_1 = \frac{\omega'_n}{\omega}$.

В случае отражённой волны Σ'_1 от жёсткой границы, интенсивность разрыва скоростей сдвига определяется выражением

$$\omega_{1L}^{\text{отр}} = \left(\hat{v}_1^- - \check{v}_1^- \right) \Big|_L = \tilde{k}_1 \hat{v}_1^+ - \tilde{k}_1 \check{v}_1^+ = \tilde{k}_1 \left(\hat{v}_1^+ - \check{v}_1^+ \right) = \tilde{k}_1 \omega_{1L}^{\text{пад}}. \quad (36)$$

Отметим, что коэффициент отражения \tilde{k}_1 скачка скорости волны продольного сдвига совпадает с коэффициентом отражения интенсивности передней кромки трещины. Тем самым, о величине отражённой передней кромки трещины можно судить по коэффициенту отражения разрыва скоростей продольной сдвиговой волны. Те же утверждения имеют место для скачка поперечной скорости на переднем фронте отражённой трещины поперечного сдвига

$$\omega_{2L}^{\text{отр}} = \left(\hat{v}_1^- - \check{v}_1^- \right) \Big|_L = \tilde{k}_2 \hat{v}_1^+ - \tilde{k}_2 \check{v}_1^+ = \tilde{k}_2 \left(\hat{v}_1^+ - \check{v}_1^+ \right) = \tilde{k}_2 \omega_{1L}^{\text{пад}}. \quad (37)$$

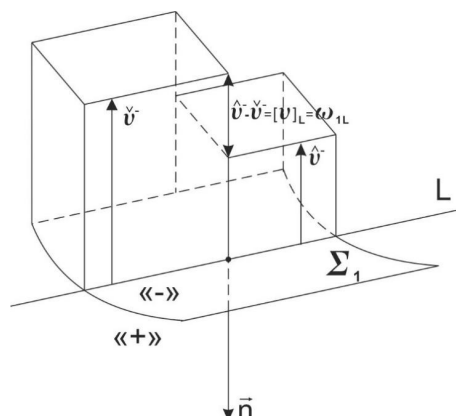


Рис. 2. Графическое представление коэффициента $\tilde{k}_2 = \frac{\omega''}{\omega}$.

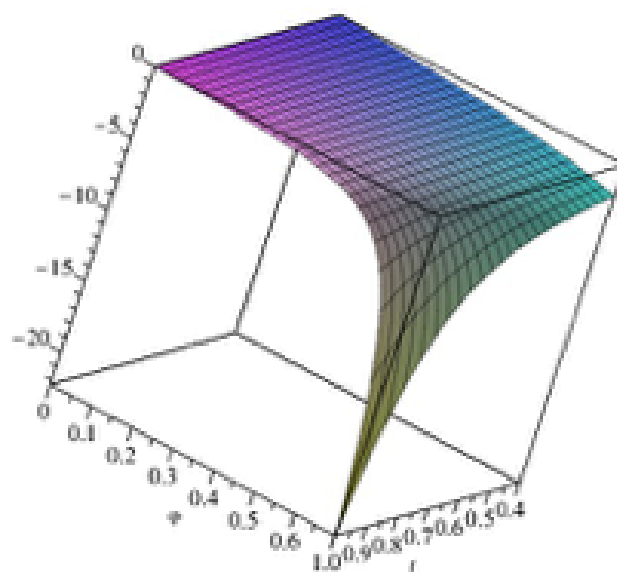


Рис. 3. Графическое представление поведения скорости сдвига за фронтом продольной волны на передней кромке L волны продольного сдвига.

Таким образом, на рисунках 1, 2 представлены графики отражения скачков скорости на передних кромках отражённых трещин продольного и поперечного сдвигов. Отражённые передние кромки фронтов продольных и поперечных волн не всегда являются трещинами, поскольку напряжённое состояние за ними может быть как упругим, так и пластическим.

4. Условие зарождения отражённых передних кромок трещин продольного и поперечного сдвигов. Существование отражённых трещин

продольного и поперечного сдвигов определяется величиной пластического состояния, которое оценивается интенсивностью напряжённого состояния I_2 в зонах (2) и (3). При $\frac{I_2^{(2)}}{2K^2} > 1$ и $\frac{I_2^{(3)}}{2K^2} > 1$ имеет место отражение трещин от жёсткой границы.

Напряжения в зонах (2) и (3) могут быть представлены и через скачки скоростей:

$$\sigma_{ij}^{(2)} = \sigma_{ij}^{(1)} - [\sigma_{ij}]_1 = \frac{1}{c_1} ((\lambda\delta_{ij} + 2\mu n'_i n'_j) \omega'_n - (\lambda\delta_{ij} + 2\mu n_i n_j) \omega); \quad (38)$$

$$\sigma_{ij}^{(3)} = \frac{1}{c_1} (\lambda\delta_{ij} + 2\mu n_i n_j) \omega + \frac{1}{c_1} (\lambda\delta_{ij} + 2\mu n'_i n'_j) \omega'_n + \frac{\mu}{c_2} (\tau''_i n''_j + \tau''_j n''_i) \omega''_\tau; \quad (39)$$

$$\sigma_{kk}^{(2)} = \frac{1}{c_1} (3\lambda + 2\mu) (\omega'_n - \omega); \quad (40)$$

$$\sigma_{kk}^{(3)} = \frac{1}{c_1} (3\lambda + 2\mu) (\omega + \omega'_n); \quad (41)$$

$$\sigma'^{(2)}_{kk} = \sigma_{ij}^{(2)} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{c_1} (3\lambda + 2\mu) (\omega'_n - \omega) \delta_{ij}; \quad (42)$$

$$\sigma'^{(3)}_{kk} = \sigma_{ij}^{(3)} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{c_1} (3\lambda + 2\mu) (\omega + \omega'_n) \delta_{ij}. \quad (43)$$

Выражение $I_2^{(2)}$ в зоне (2) представимо в виде функции от φ и от $\tilde{c} = \frac{c_2^2}{c_1^2}$:

$$\begin{aligned} I_2^{(2)} = & \frac{K\tilde{c}}{\left(\frac{10}{3}\tilde{c}-1\right)} \left\{ \left(\left(\frac{\cos 2\varphi + \sin^2 \varphi \cdot (1-\tilde{c}^2)}{1-\sin^2 \varphi \cdot (\tilde{c} \cdot \cos \varphi + \sqrt{1-\tilde{c}^2} \sin^2 \varphi)} \right)^2 - 1 \right) \cdot \right. \\ & \cdot \left(3\tilde{c}^2 (1-2\tilde{c}^2)^2 + 2\tilde{c} (1-2\tilde{c}^2) + 4 \right) - \\ & \left. - \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{\cos 2\varphi + \sin^2 \varphi \cdot (1-\tilde{c}^2)}{1-\sin^2 \varphi \cdot (\tilde{c} \cdot \cos \varphi + \sqrt{1-\tilde{c}^2} \sin^2 \varphi)} - 1 \right)^2 \cdot (3\tilde{c} (1-2\tilde{c}^2) + 2)^2 \right\} \end{aligned} \quad (44)$$

Выражение $I_2^{(3)}$ в зоне (3) представимо в виде функции от φ и от $\tilde{c} = \frac{c_2^2}{c_1^2}$:

$$\begin{aligned} I_2^{(3)} = & \frac{K(4\tilde{c}^4 + 3(1-2\tilde{c}^2)^2 + 2\tilde{c}^2(1-2\tilde{c}^2))}{\tilde{c}(\frac{10}{3}\tilde{c}-1)} \left(1 + \left(\frac{\cos 2\varphi + \sin^2 \varphi \cdot (1-\tilde{c}^2)}{1-\sin^2 \varphi \cdot (\tilde{c} \cdot \cos \varphi + \sqrt{1-\tilde{c}^2} \sin^2 \varphi)} \right)^2 \right) + \\ & + \frac{2K\tilde{c}^5}{\frac{10}{3}\tilde{c}-1} \left(\frac{-\sin \varphi (\sqrt{1-\tilde{c}^2} \sin^2 \varphi + \tilde{c} \cdot \cos \varphi) - \cos 2\varphi \sin \varphi (\sqrt{1-\tilde{c}^2} \sin^2 \varphi - \tilde{c} \cdot \cos \varphi)}{1-\sin^2 \varphi \cdot (\tilde{c} \cdot \cos \varphi + \sqrt{1-\tilde{c}^2} \sin^2 \varphi)} \right)^2 + \\ & + \frac{K(4\tilde{c}^4 \cos^2 2\varphi + 3(1-2\tilde{c}^2)^2 + 4\tilde{c}^2(1-2\tilde{c}^2))}{\tilde{c}(\frac{10}{3}\tilde{c}-1)} \left(\frac{\cos 2\varphi + \sin^2 \varphi \cdot (1-\tilde{c}^2)}{1-\sin^2 \varphi \cdot (\tilde{c} \cdot \cos \varphi + \sqrt{1-\tilde{c}^2} \sin^2 \varphi)} \right)^2 + \\ & + \frac{2K\tilde{c}}{\frac{10}{3}\tilde{c}-1} \left(\frac{-\sin \varphi (\sqrt{1-\tilde{c}^2} \sin^2 \varphi + \tilde{c} \cdot \cos \varphi) - \cos 2\varphi \sin \varphi (\sqrt{1-\tilde{c}^2} \sin^2 \varphi - \tilde{c} \cdot \cos \varphi)}{1-\sin^2 \varphi \cdot (\tilde{c} \cdot \cos \varphi + \sqrt{1-\tilde{c}^2} \sin^2 \varphi)} \right) \times \\ & \times \left(\tilde{c} \cdot \cos \varphi + \sqrt{1-\tilde{c}^2} \sin^2 \varphi \right) \left(\tilde{c} \sin^3 \varphi - \frac{1}{2} \sin 2\varphi \sqrt{1-\tilde{c}^2} \sin^2 \varphi \right) \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2K\tilde{c}}{\frac{10}{3}\tilde{c}-1} \left(\frac{-\sin\varphi(\sqrt{1-\tilde{c}^2\sin^2\varphi}+\tilde{c}\cdot\cos\varphi)-\cos 2\varphi\sin\varphi(\sqrt{1-\tilde{c}^2\sin^2\varphi}-\tilde{c}\cdot\cos\varphi)}{1-\sin^2\varphi\cdot(\tilde{c}\cdot\cos\varphi+\sqrt{1-\tilde{c}^2\sin^2\varphi})} \right) \times \\
& \times \left(\tilde{c}\cdot\cos\varphi+\sqrt{1-\tilde{c}^2\sin^2\varphi} \right) \left(\tilde{c}\sin^3\varphi-\frac{1}{2}\sin 2\varphi\sqrt{1-\tilde{c}^2\sin^2\varphi} \right) \times \\
& \times \left(\frac{-\sin\varphi(\sqrt{1-\tilde{c}^2\sin^2\varphi}+\tilde{c}\cdot\cos\varphi)-\cos 2\varphi\sin\varphi(\sqrt{1-\tilde{c}^2\sin^2\varphi}-\tilde{c}\cdot\cos\varphi)}{1-\sin^2\varphi\cdot(\tilde{c}\cdot\cos\varphi+\sqrt{1-\tilde{c}^2\sin^2\varphi})} \right) + \\
& + \left(\frac{\cos 2\varphi+\sin^2\varphi\cdot(1-\tilde{c}^2)}{1-\sin^2\varphi\cdot(\tilde{c}\cdot\cos\varphi+\sqrt{1-\tilde{c}^2\sin^2\varphi})} \right)^2 - \frac{K(4\tilde{c}^4+9(1-2\tilde{c}^2)^2+12\tilde{c}^2(1-2\tilde{c}^2))}{3\tilde{c}(\frac{10}{3}\tilde{c}-1)} \times \\
& \times \left(1 + \left(\frac{\cos 2\varphi+\sin^2\varphi\cdot(1-\tilde{c}^2)}{1-\sin^2\varphi\cdot(\tilde{c}\cdot\cos\varphi+\sqrt{1-\tilde{c}^2\sin^2\varphi})} \right)^2 \right).
\end{aligned}$$

На рисунках 4 представлены 3d-графики величины $\frac{I_2^{(2)}}{2K^2}$ в зоне (2) для различных интервалов изменения φ и $\tilde{c} = t$: а) $0,4 < \varphi < 0,8$, $0,4 < \tilde{c} = t < 0,7$ и б) $0,4 < \varphi < 0,5$, $0,4 < \tilde{c} = t < 0,5$

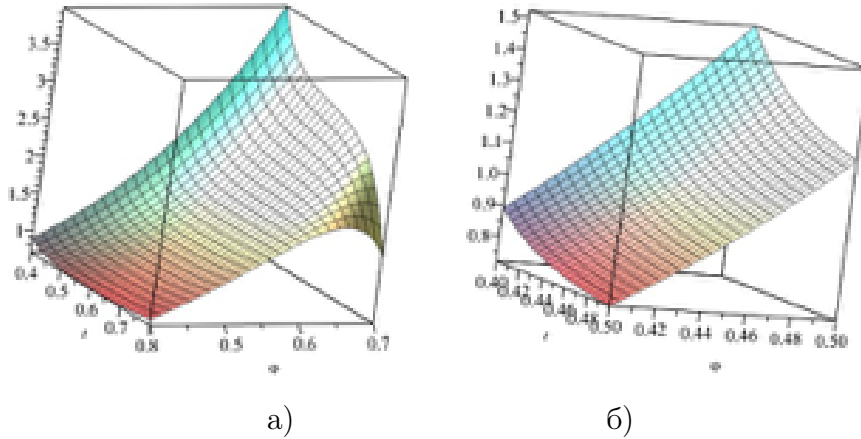


Рис. 4. а) $0,4 < \varphi < 0,8$, $0,4 < \tilde{c} = t < 0,7$; б) $0,4 < \varphi < 0,5$, $0,4 < \tilde{c} = t < 0,5$

На рисунках 5 представлены 3d-графики величины $\frac{I_2^{(3)}}{2K^2}$ в зоне (3) для различных интервалов изменения φ и $\tilde{c} = t$: а) $0,4 < \varphi < 0,8$, $0,4 < \tilde{c} = t < 0,7$ и б) $0,6 < \varphi < 0,7$, $0,6 < \tilde{c} = t < 0,7$

Графические представления величин $\frac{I_2^{(2)}}{2K^2} > 1$ и $\frac{I_2^{(3)}}{2K^2} > 1$ позволяют выделить интервалы углов падения φ и коэффициента $\tilde{c} = \frac{c_2^2}{c_1^2}$, при которых возможно существование отражённых трещин продольного и поперечного сдвигов от жёсткой границы. В противном случае, когда $\frac{I_2^{(2)}}{2K^2} < 1$ и $\frac{I_2^{(3)}}{2K^2} < 1$, отражённые трещины продольного и поперечного сдвигов отсутствуют, то есть падающая волна не всегда порождает отражённые трещины продольного и поперечного сдвигов.

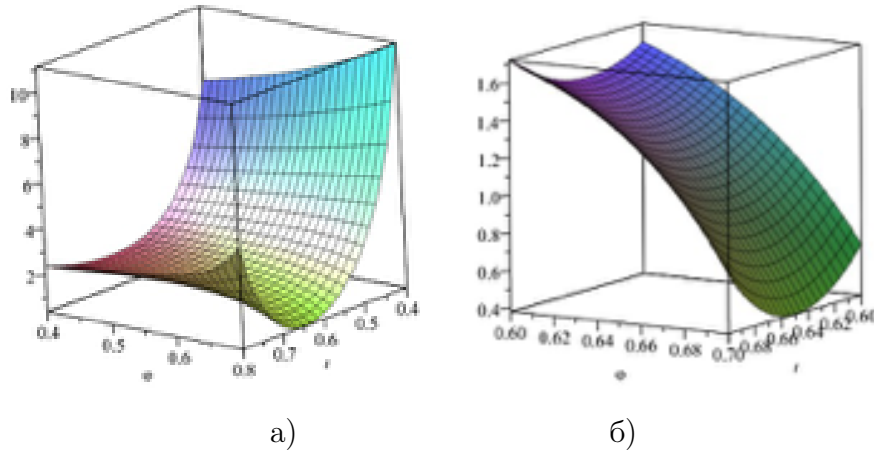


Рис. 5. а) $0,4 < \varphi < 0,8$, $0,4 < \tilde{c} = t < 0,7$; б) $0,6 < \varphi < 0,7$, $0,6 < \tilde{c} = t < 0,7$

Закключение. Кинематические закономерности отражения предельной пластической волны продольного деформирования Σ_1 показывают:

- (1) Коэффициенты \tilde{k}_1 и \tilde{k}_2 скачков скоростей на передних кромках трещин возрастают с увеличением угла падения φ трещины продольного сдвига и с увеличением $t = \tilde{c} = \frac{c_2^2}{c_1^2}$.
- (2) Величины вторых инвариантов $I_2^{(2)}$ и $I_2^{(3)}$ девиатора тензора напряжений в зонах (2) и (3) растут с увеличением угла падения φ .
- (3) Зависимость от отношения скоростей продольных и сдвиговых волн $t = \tilde{c} = \frac{c_2^2}{c_1^2}$ является более сложной, так что с увеличением t при некоторых $t = t^*$ ($t^* \in [t_1; t_2]$) не отражаются трещины продольного и поперечного сдвигов, но при дальнейшем увеличении $t > t_2$ возможно отражение трещины продольного и поперечного сдвигов.
- (4) Падающая передняя кромка трещины продольного сдвига, следующая за фронтом падающей волны Σ_1 , может порождать передние фронты трещины продольного сдвига, следующие за отражённой продольной волной и передний фронт трещины отрыва за фронтом отражённой сдвиговой волны. Это возможно только в случаях возникновения пластического деформирования в окрестности передних кромок трещин за фронтами отражённых волн, ограничивающих зоны (2) и (3).

ДОПОЛНИТЕЛЬНО

Вклад авторов. А. В. Ковалев, Н. В. Минаева, А. И. Шашкин – постановка задачи, обсуждение методов решения, редактирование текста рукописи. М. И. Быкова – построение математической модели, вычислительный эксперимент, написание текста рукописи.

Конфликт интересов. Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

Источник финансирования. Авторы заявляют об отсутствии внешнего финансирования при проведении данного исследования.

ADDITIONAL INFORMATION

Authors' contribution. A. V. Kovalev, N. V. Minaeva, A. I. Shashkin – problem statement, discussion of solution methods, editing of the manuscript text. M. I. Bykova – construction of the mathematical model, computational experiment, writing of the manuscript text.

Competing interests. The authors declare no obvious or potential conflicts of interest related to the publication of this article.

Funding. The authors declare no external funding for this study.

ЛИТЕРАТУРА

1. Качанов Л. М. Основы механики разрушения. – Москва : Наука, 1974. – 312 с.
2. Иевлев В. М. Структура поверхностей раздела в пленках металлов. – Москва : Металлургия, 1992. – 172 с.
3. Партон В. З., Борисковский В. Г. Динамика хрупкого разрушения. – Москва : Машиностроение, 1988. – 240 с.
4. Кукуджанов В. Н. Распространение упругопластических волн в стержне с учетом влияния скорости деформирования : тех. отч. / Вычислительный центр АН СССР. – Москва, 1967.
5. Ивлев Д. Д. Теория предельного состояния и идеальной пластичности: избранные работы. – Воронеж : Воронежский государственный университет, 2005. – 357 с.
6. Вервейко Н. Д. Лучевая теория упруговязкопластических волн и волн гидроудара. – Воронеж : Издательство Воронежского государственного университета, 1997. – 204 с.
7. Буренин А. А. Об ударном деформировании несжимаемого упругого полупространства // Прикладная механика. – 1985. – Т. 21, № 5. – С. 3–8.
8. Ковтаниук Л. В. О критерии возникновения пластического течения околосферической каверны // Проблемы естествознания и производства. Сборник трудов ДВГТУ. – Владивосток : Издательство ДВГТУ, 1997. – С. 19–23. – (Серия 5 ; 119).
9. Вервейко Н. Д., Шашкин А. И., Крупенко С. Е. Зарождение и движение вершин трещин за фронтами упруговязкопластических волн. – Воронеж : Кварта, 2017. – 124 с.
10. Verveyko N. D., Shashkin A. I., Krupenko S. E. Mathematical modeling of the propagations of precursors of the front edges of crack as spatial curves on the fronts of waves of a strong discontinuity of rates and stresses // Journal of Physics: Conference Series. – 2019. – Vol. 1203, no. 1. – P. 012033. – DOI: 10.1088/1742-6596/1203/1/012033. – URL: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1203/1/012033>.

11. Томас Т. Пластическое течение и разрушение в твердых телах. – Москва : Мир, 1964. – 308 с.
12. A model of dynamic reflection of a longitudinal shear crack from a stressed boundary / M. I. Bykova [et al.] // Journal of Physics: Conference Series. – 2020. – Vol. 1479. – P. 012123. – DOI: 10.1088/1742-6596/1479/1/012123. – URL: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1479/1/012123>.

REFERENCES

1. *Kachanov L. M.* Fundamentals of fracture mechanics. – Moscow : Nauka, 1974. – 312 p. – (in Russian).
2. *Ievlev V. M.* Thin films of inorganic materials: mechanisms of growth and structure: textbook. – Voronezh : CPI of Voronezh State University, 2008. – 172 p. – (in Russian).
3. *Parton V. Z., Boriskovsky V. G.* Dynamics of brittle fracture. – Moscow : Nauka, 1988. – 240 p. – (in Russian).
4. *Kukudzhanov V. N.* Propagation of elastoplastic waves in a rod taking into account the influence of the deformation rate : tech. rep. / Computer Center of the USSR Academy of Sciences. – Moscow, 1967. – (in Russian).
5. *Ivlev D. D.* Theory of limit state and ideal plasticity: selected works. – Voronezh : Voronezh State University, 2005. – 357 p. – (in Russian).
6. *Verveiko N. D.* Radiation theory of elastic-viscoplastic waves and shock waves. – Voronezh : Voronezh State University, 1997. – 204 p. – (in Russian).
7. *Burenin A. A.* On impact deformation of an incompressible elastic half-space // Applied Mechanics. – 1985. – Vol. 21, no. 5. – P. 3–8. – (in Russian).
8. *Kovtanyuk L. V.* On the criterion for the occurrence of plastic flow of a near-spherical cavity // Problems of natural science and production. Collection of Proceedings of DVG TU, issue 119, series 5. – Vladivostok : DVG TU Publishing House, 1997. – P. 19–23. – (in Russian).
9. *Verveiko N. D., Shashkin A. I., Krupenko S. E.* The origin and motion of crack tips for the fronts of elastoviscoplastic waves. – Voronezh : Quarta, 2017. – 124 p. – (in Russian).
10. *Verveiko N. D., Shashkin A. I., Krupenko S. E.* Mathematical modeling of the propagations of precursors of the front edges of crack as spatial curves on the fronts of waves of a strong discontinuity of rates and stresses // Journal of Physics: Conference Series. – 2019. – Vol. 1203. – P. 012033. – DOI: 10.1088/1742-6596/1203/1/012033. – URL: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1203/1/012033>.
11. *Thomas T.* Plastic flow and destruction in solids. – Moscow : Mir, 1964. – 308 p. – (in Russian).
12. A model of dynamic reflection of a longitudinal shear crack from a stressed boundary / M. I. Bykova [et al.] // Journal of Physics: Conference Series. – 2020. – Vol. 1479. – P. 012123. – DOI: 10.1088/1742-6596/1479/1/012123. – URL: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1479/1/012123>.