

A. B. Ковалев¹, M. M. Коротков¹, H. B. Минаева¹, A. И. Шашкин¹

АНАЛИЗ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ, ИСПОЛЬЗУЕМЫХ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ УПРУГОЙ НЕОДНОРОДНОЙ ПОЛОСЫ ПРИ СЖАТИИ

¹Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия

Аннотация. Рассматривается сжатие полосы, выполненной из неоднородного материала и имеющей неровную поверхность с боковых сторон. Усилия, приложенные по верхней и нижней сторонам и по боковым кромкам поперечного сечения, считаются независимыми. В качестве необходимого условия нарушения нормального функционирования полосы предлагается использовать критерий непрерывной зависимости функции, характеризующей поведение изучаемого объекта, от исходных данных. Нарушение этой непрерывности способно вызывать потерю устойчивости (первая группа предельных состояний) или чрезмерные деформации, отклонения от проектируемых расчетных значений (вторая группа предельных состояний). Рассмотрены математические модели для исследования непрерывной зависимости с граничными условиями в деформированном состоянии, а также модель, в которой были учтены углы поворота в уравнениях равновесия (согласно работам Новожилова, Ивлева). Получено условие, позволяющее определять область, на границе которой состояние полосы станет предельным (потеря устойчивости равновесной формы). Достоверность полученных результатов подтверждается совпадением с известными результатами других авторов. Для различных значений параметров поперечного сечения построены области, в пределах которых НДС полосы близко к однородному.

Ключевые слова: предельное состояние, упругая полоса, непрерывная зависимость, комбинированное нагружение.

Ковалев Алексей Викторович, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой механики и компьютерного моделирования; e-mail: kovalev@amm.vsu.ru; <https://orcid.org/0000-0002-3730-9621>; AuthorID: 11051

Коротков Михаил Михайлович, аспирант кафедры механики и компьютерного моделирования; e-mail: mihailkorotkov97@rambler.ru

Минаева Надежда Витальевна, доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры механики и компьютерного моделирования; e-mail: minaeva@yandex.ru; <https://orcid.org/0000-0002-9366-5575>; AuthorID: 11715

Шашкин Александр Иванович, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математического и прикладного анализа; e-mail: shashkin@amm.vsu.ru; <https://orcid.org/0000-0001-9925-5019>; AuthorID: 156046



для цитирования: Ковалев А. В., Коротков М. М., Минаева Н. В., Шашкин А. И. Анализ математических моделей, используемых при исследовании предельного состояния упругой неоднородной полосы при сжатии // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2025. № 2(64). С. 185–197. DOI: 10.37972/chgpu.2025.64.2.011. EDN: LJOPZD

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0).

A. V. Kovalev¹, M. M. Korotkov¹, N. V. Minaeva¹, A. I. Shashkin¹

ANALYSIS OF MATHEMATICAL MODELS USED IN THE STUDY OF THE LIMITING STATE OF AN ELASTIC INHOMOGENEOUS BAND UNDER COMPRESSION

¹ Voronezh State University, Voronezh, Russia

Abstract. We considered compression of a strip made of an inhomogeneous material and having an uneven surface on the sides. The forces applied on the upper and lower sides and on the lateral edges of the cross section are considered independent. As a necessary condition for disruption of the normal functioning of the band, it is proposed to use the criterion of continuous dependence of the function characterizing the behavior of the studied object on the initial data. A violation of this continuity can cause loss of stability (the first group of limiting states) or excessive deformations, deviations from the projected design values (the second group of limiting states). Mathematical models for studying continuous dependence with boundary conditions in a deformed state are considered, as well as a model in which rotation angles in equilibrium equations were taken into account (according to the works of Novozhilov and Ivlev). A condition we obtained that makes it possible to determine the area at the boundary of which the state of the strip will become marginal (loss of stability of the equilibrium shape). The reliability of the obtained results is confirmed by the coincidence with the known results of other authors. For different values of the cross-section parameters, regions we constructed within which the stress-strain state of the strip is close to homogeneous.

Keywords: limiting state, elastic band, continuous dependence, combined loading.

Alexey V. Kovalev, Doctor of Physico-Mathematical Sciences, Professor;
e-mail: kovalev@amm.vsu.ru ; <https://orcid.org/0000-0002-3730-9621>;
AuthorID: 11051

Mikhail M. Korotkov, Scientific Researcher; e-mail: mihailkorotkov97@rambler.ru

Nadezhda V. Minaeva, Doctor of Physico-Mathematical Sciences, Associate Professor;
e-mail: minaeva@yandex.ru ; <https://orcid.org/0000-0002-9366-5575>;
AuthorID: 11715

Alexander I. Shashkin, Doctor of Physico-Mathematical Sciences, Professor;
e-mail: shashkin@amm.vsu.ru ; <https://orcid.org/0000-0001-9925-5019>;
AuthorID: 156046



to cite this article: Kovalev A. V., Korotkov M. M., Minaeva N. V., Shashkin A. I. Analysis of mathematical models used in the study of the limiting state of an elastic inhomogeneous band under compression // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2025. No 2(64). p. 185–197.
DOI: 10.37972/chgpu.2025.64.2.011

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение. Проблема старения конструктивных элементов приобретает особую значимость в условиях интенсивной эксплуатации различных инженерных объектов, таких как авиационная техника, транспортные системы и промышленные сооружения. Под воздействием переменных нагрузок, температурных изменений и других внешних факторов геометрические и физические свойства элементов постепенно изменяются в квазистатическом режиме на протяжении их службы. При проектировании предполагается, что напряженно-деформированное состояние конструкций будет соответствовать установленным эксплуатационным требованиям и расчетным допускам. Однако несоответствие этим требованиям может привести элементы к критическому состоянию [1].

Для обеспечения надежности и безопасности конструкции необходимо, чтобы изменения характеристик элементов оказывали лишь минимальное влияние на их напряженно-деформированное состояние [2]. Если это условие не соблюдается, возможны аварийные ситуации или даже техногенные катастрофы. Таким образом, ключевым аспектом безопасной эксплуатации конструкций на этапе математического моделирования является непрерывность решения от начальных параметров [2–4]. Нарушение этой непрерывности способно вызывать потерю устойчивости (первая группа предельных состояний) или чрезмерные деформации, отклонения и сбои в работе системы (вторая группа предельных состояний) [5–7].

В работах [8], [9] показано, что проводить исследование устойчивости равновесия упругих тел следует на основе задачи, в которой краевые условия учитывают деформацию граничной поверхности.

В [10] приведено обоснование такого подхода. Согласно полученным результатам, при анализе непрерывной зависимости граничные условия в напряжениях следует ставить на границе тела в деформированном состоянии. В противном случае задача будет поставлена противоречиво (на границе уже предполагается непрерывность).

В [11] предлагается ставить общую задачу устойчивости упругого тела в рамках уравнений нелинейной теории упругости. Согласно предложенному подходу, надо учитывать компоненты вращения в уравнениях равновесия.

В [12], используя эти результаты, было проведено исследование устойчивости полосы при сжатии. Полученные значения критического давления были ниже известных ранее [11].

Несмотря на широкий спектр исследований в данной области, разработка методов анализа предельных состояний, учитывающих особенности упругонелинейного деформирования, остается актуальной задачей.

1. Математическая модель НДС неоднородной полосы при сжатии. Рассмотрим упругую полосу, выполненную из неоднородного несжимаемого материала и имеющую неровную поверхность с обеих боковых сторон поперечного сечения. Его верхняя и нижняя кромки прямолинейные. Вдоль

этих кромок действует сжимающее усилие p_y . Отличие боковых кромок от прямых линий $x \pm \ell$ характеризуется функциями $q_i(y)$ ($i = 1, 2$). Они сжимаются усилиями p_x .

Напряжённое состояние полосы (плоская деформация) описывается решением следующей задачи [9], [13]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} &= 0, & \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau}{\partial x} &= 0, \\ \sigma_x - \sigma_y &= 4G \frac{\partial u}{\partial x}, & \tau &= G \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right), \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0, \\ \sigma_y|_{y=\pm h} &= -p_y, \\ \sigma_x|_{x=g_i(y)} &= -p_x \quad (i = 1, 2) \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь $G = G_0 + G_1(x, y)$, $G_0 = \text{const}$ соответствует модулю сдвига однородного материала, а $G_1(x, y)$ описывает изменение физических свойств полосы в процессе эксплуатации. Функции $g_1(y)$ и $g_2(y)$ описывают правую и левую кромки поперечного сечения полосы после деформирования.

Если пренебречь несовершенствами, т.е. $q_i(y) = 0$ ($i = 1, 2$), то задача (1) допускает решение, описывающее однородное состояние:

$$\begin{aligned} \sigma_x = \sigma_x^0 &= -p_x, & \sigma_y = \sigma_y^0 &= -p_y, & \tau = \tau^0 &= 0, \\ u = u^0 &= \varepsilon_x^0 x, & v = v^0 &= \varepsilon_y^0 y, \end{aligned} \tag{2}$$

где константы ε_x^0 , ε_y^0 из (2), определяются следующим соотношением

$$\varepsilon_y^0 = \frac{p_x - p_y}{4G}, \quad \varepsilon_x^0 = -\varepsilon_y^0.$$

В процессе эксплуатации происходят незначительные изменения геометрических размеров и физических свойств материала. Проанализируем, насколько эти изменения могут повлиять на напряженно-деформированное состояние полосы, описываемое (2). Т.е. проведем исследование непрерывной зависимости решения задачи (1) от исходных данных при $G = G_0$, $q_i(y) = 0$ ($i = 1, 2$).

2. Исследования непрерывной зависимости решения от исходных данных. Согласно [10], [14], следует рассмотреть вспомогательную линеаризованную однородную задачу относительно функций ζ_i , которая получена на основе (1) при $\sigma_x = \sigma_x^0 + \zeta_1$, $\sigma_y = \sigma_y^0 + \zeta_2$, $\tau = \tau^0 + \zeta_3$, $u = u^0 + \zeta_4$, $v = v^0 + \zeta_5$. Для непрерывной зависимости необходимо, чтобы она была регулярной, все ее первые производные по всем своим аргументам были непрерывны, а также она имела только тривиальное решение.

Будем проводить исследование на основе подходов, предложенных в [9] и [11] В первом случае, при построении математической модели для исследования непрерывности ограничимся учетом деформации границы контура поперечного сечения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta_1}{\partial x} + \frac{\partial \zeta_3}{\partial y} &= 0, & \frac{\partial \zeta_2}{\partial y} + \frac{\partial \zeta_3}{\partial x} &= 0, \\ \zeta_1 - \zeta_2 &= 4G_0 \frac{\partial \zeta_4}{\partial x}, & \zeta_3 &= G_0 \left(\frac{\partial \zeta_5}{\partial x} + \frac{\partial \zeta_4}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial \zeta_4}{\partial x} + \frac{\partial \zeta_5}{\partial y} &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \zeta_2|_{y=\pm h} &= 0, & \zeta_4|_{y=\pm h} &= 0, \\ \left(\zeta_3 + p_y \frac{\partial \zeta_4(0, y)}{\partial y} \right)_{x=0} &= 0, & \zeta_1|_{x=0} &= 0, \\ \left(\zeta_3 + p_y \frac{\partial \zeta_4(\ell, y)}{\partial y} \right)_{x=\ell_1} &= 0, & \zeta_1|_{x=\ell_1} &= 0, \\ \ell_1 &= 2\ell \left(1 + \frac{p_x - p_y}{4G_0} \right) \end{aligned} \quad (4)$$

В результате проведенных исследований получили, что эта задача имеет ненулевое решение, если исходные данные удовлетворяют условию:

$$\cosh^2((\alpha_x - \alpha_y - 2)\pi mn) - m^2 n^2 (1 + \alpha_y)^2 (\alpha_x - \alpha_y - 2)^2 = 0 \quad (5)$$

$$\alpha_x = \frac{p_x}{2G_0}, \quad \alpha_y = \frac{p_y}{2G_0}, \quad m = \frac{\ell}{h}, \quad n \in Z$$

Если положить $\alpha_x = 0$, то можно сравнить $\alpha_y = 0$ с эйлеровой критической нагрузкой p^* для продольного изгиба стержня с шарнирно закрепленными концами, как это сделано в работах [9] и [12]. В соответствии с результатами из [9] при $m = 0.1$ значения параметров усилий практически равны: $\frac{\alpha_y}{p^*} = 1.00143$.

Проведем далее исследование, выполненное согласно подходу, предложенному Новожиловым [11], [15]. Учитывая углы поворота в уравнениях равновесия для вспомогательной задачи, получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta_1}{\partial x} + \frac{\partial \zeta_3}{\partial y} + \frac{p_y}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \zeta_5}{\partial x} - \frac{\partial \zeta_4}{\partial y} \right) &= 0, \\ \frac{\partial \zeta_2}{\partial y} + \frac{\partial \zeta_3}{\partial x} - \frac{p_x}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \zeta_5}{\partial x} - \frac{\partial \zeta_4}{\partial y} \right) &= 0, \\ \frac{\partial \zeta_4}{\partial x} + \frac{\partial \zeta_5}{\partial y} &= 0, \\ \zeta_1 - \zeta_2 &= 4G_0 \frac{\partial \zeta_4}{\partial x}, & \zeta_3 &= G_0 \left(\frac{\partial \zeta_5}{\partial x} + \frac{\partial \zeta_4}{\partial y} \right). \end{aligned} \quad (6)$$

Границные условия имеют вид (4). Группа условий, касающаяся регулярности и непрерывности производных в (6), (4) выполняется. В результате анализа

существования только тривиального решения было получено соотношение, когда это требование не выполняется

$$\begin{aligned} & \frac{2(\cosh(\ell_1 k) \cosh(\ell_1 k \sqrt{1-\gamma}) - 1)}{\sinh(\ell_1 k) \sinh(\ell_1 k \sqrt{1-\gamma})} = \\ & = \frac{(2-\gamma+2\alpha_y)\sqrt{1-\gamma}}{(2-\gamma-\gamma\alpha_y)(1+\alpha_y)} + \frac{(2-\gamma-\gamma\alpha_y)(1+\alpha_y)}{(2-\gamma+2\alpha_y)\sqrt{1-\gamma}} \quad (7) \\ & \gamma = \frac{\alpha_y - \alpha_x}{1 - \alpha_x}, \quad k = \frac{\pi n}{\ell} \end{aligned}$$

Условие (7) ограничивает область непрерывной зависимости решения задачи (1) от функций, характеризующих физические и геометрические несовершенства. Вид (7) при $\alpha_x = 0$ с точностью до обозначений совпадает с полученным в [9].

На рис. 1 представлена область при $\alpha_x = 0$ для материала, изучаемого в [9]. Результаты, полученные в [9] обозначены (I), а (II) соответствует кривой, найденной в [12]. Как видно, для малых m значения критических параметров эти линии совпадают. Значениям $m \geq 0.2$ будут соответствовать напряжения, выходящие за пределы упругости известных материалов. Это полностью согласуется с результатами, приведенными в работах [8], [9], [12].

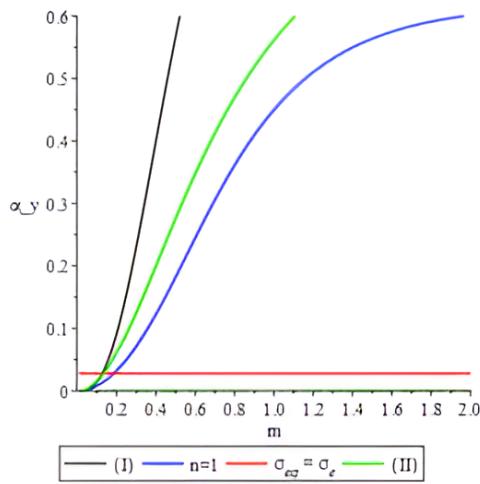


Рис. 1. Область непрерывной зависимости для $\frac{3\sigma_y}{2E} = 0.01184$ при $\alpha_x = 0$

Сопоставляя результаты, полученные без учета углов поворота в уравнениях равновесия и с ними (рис. 2), получаем, что (7) дает более низкие значения для границы области непрерывной зависимости решения задачи (1) от исходных данных. Причем, при исследовании в рамках первого подхода, получаем, что решение (2) будет приближенно описывать состояние полосы при любых значениях сжимающих усилий в упругой области, что соответствует завышенной оценке.

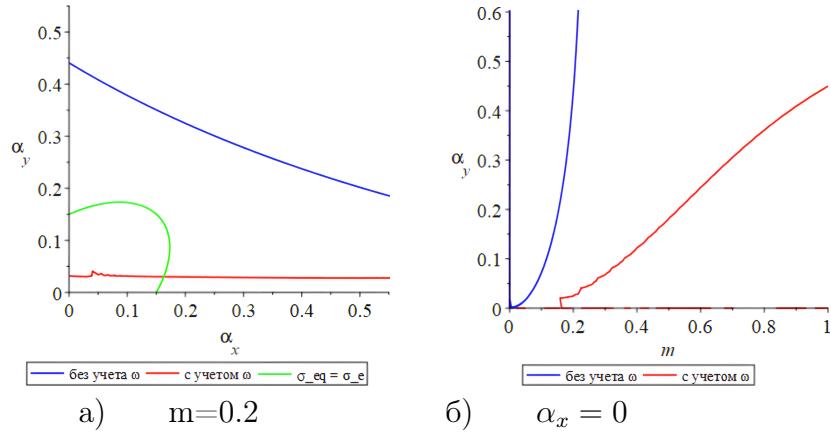


Рис. 2. Сравнение областей непрерывной зависимости, полученных на основе (5) и (7)

Поэтому в дальнейшем при рассмотрении непрерывной зависимости решения задачи (1) от исходных данных при $G = G_0$, $q_i(y) = 0$ ($i = 1, 2$) будем использовать условие (7).

3. Построение областей непрерывной зависимости для различных несжимаемых изотропных материалов. Для несжимаемых изотропных материалов, у которых $\frac{3\sigma_y}{2E} > 1$, область непрерывной зависимости на плоскости параметров α_x , α_y для частных случаев отношения линейных размеров сечения будет иметь вид (рис. 3)

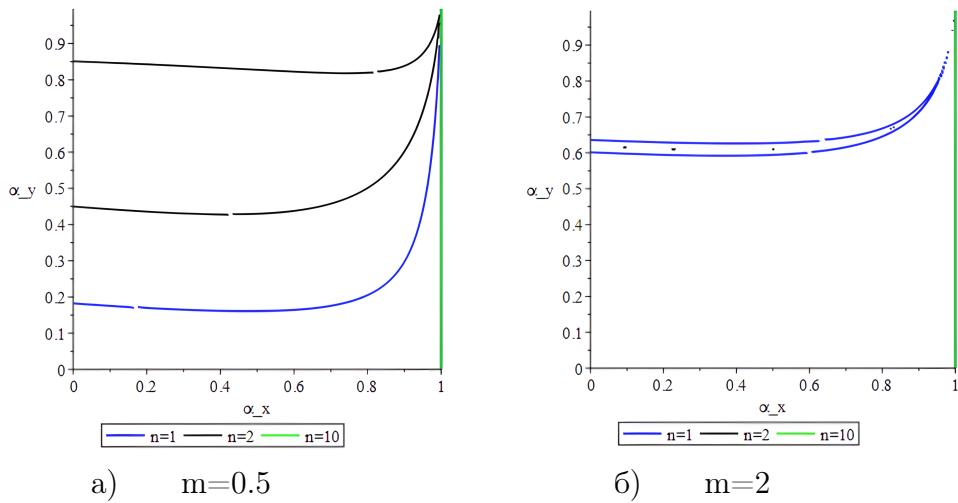


Рис. 3. Область непрерывной зависимости для различных размеров поперечного сечения полосы

Поскольку в процессе эксплуатации не только физические свойства меняются, но и размеры сечения тоже могут претерпевать незначительные изменения, то линии (7) соответствуют случаям, когда решение (2) уже не будет описывать напряженно-деформированное состояние реальной полосы и не будет соответствовать установленным эксплуатационным и расчетным требованиям. В этом случае оно становится предельным (потеря устойчивости равновесной формы).

Если рассмотреть вариант, когда в процессе эксплуатации одно из усилий не изменяет своего значения, то можно указать область изменения размеров сечения и параметра другого сжимающего усилия, при которых напряженно-деформированное состояние полосы будет близко к однородному.

Далее рассмотрим случай, когда α_y или α_x не меняют своего значения. Область, ограниченная (7) на плоскости параметров размеров поперечного сечения и усилия будет иметь вид, представленный на (рис. 4).

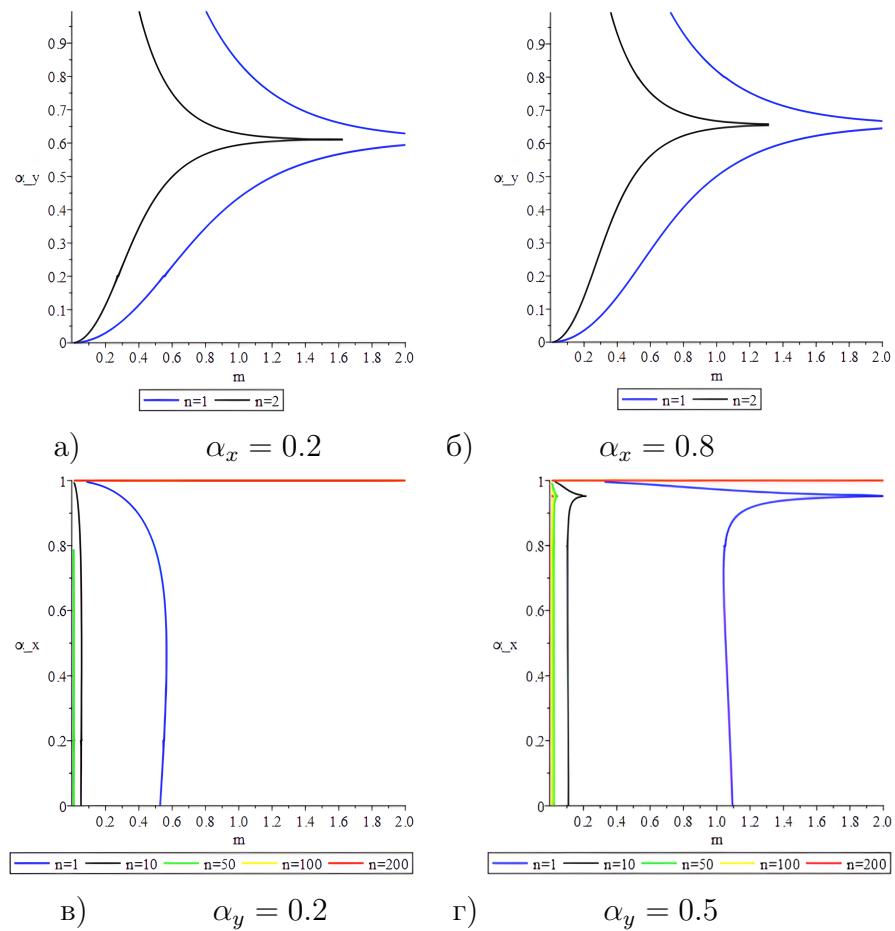


Рис. 4. Область непрерывной зависимости для различных сжимающих усилий

Поскольку в процессе эксплуатации геометрические размеры не претерпевают значительных изменений, то «опасные» значения параметров сжимающих

воздействий будут наблюдаться в окрестностях точек, принадлежащих линиям (7).

Для случая, когда у несжимаемого изотропного материала $\frac{3\sigma_y}{2E} \ll 1$, линии (7) имеют вид, аналогичный представленному на рис.4. Но для подобных материалов при достаточно малых нагрузках начинают проявляться пластические свойства, и напряжения превосходят предел упругости (рис.5). Учитывая это, получаем, что либо решение (2) будет приближенно описывать напряженно-деформированное состояние полосы во всей области упругости, либо только в той ее части, которая ограничена линией (7).

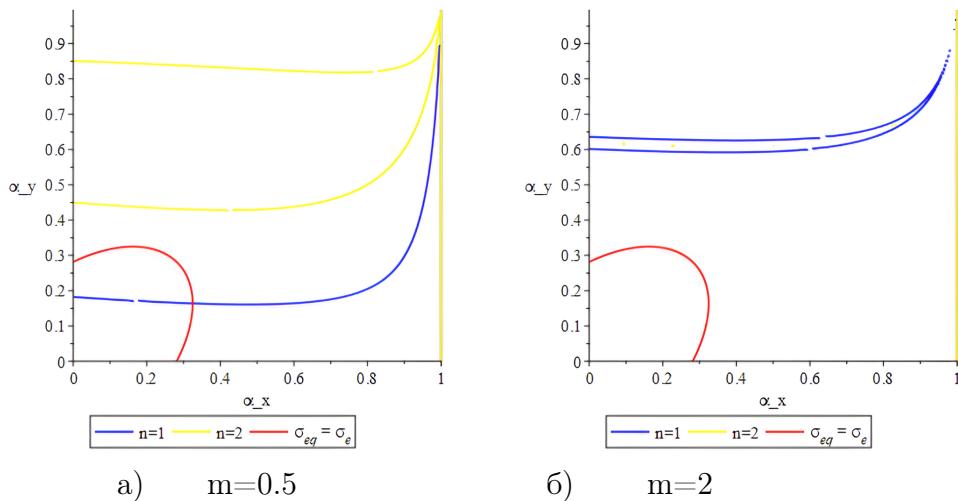


Рис. 5. Область непрерывной зависимости для различных размеров поперечного сечения полосы

4. Заключение Таким образом, использование в математической модели для изучения непрерывной зависимости уравнений равновесия в форме, предложенной Новожиловым, предпочтительнее, поскольку получаем более низкую границу области такой зависимости. Недостатком такого подхода являются более сложные выкладки при проверке необходимых условий.

Когда исходные параметры достигают значений, соответствующих кривой (7), зависимость теряет свою непрерывность. В итоге могут появиться значительные перемещения, прогибы или углы поворота, что приводит систему к предельному состоянию. В частности происходит потеря устойчивости равновесной формы (2), и состояние полосы, соответствующее (2) станет предельным. Полученные результаты следует учитывать при проектировании различных конструкций, при анализе соответствия установленным эксплуатационным требованиям и расчетным допускам.

ДОПОЛНИТЕЛЬНО

Вклад авторов. А. В. Ковалев, Н. В. Минаева, А. И. Шашкин – постановка задачи, обсуждение методов решения, редактирование текста рукописи. М. М. Коротков – построение математической модели, вычислительный эксперимент, написание текста рукописи.

Конфликт интересов. Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

Источник финансирования. Авторы заявляют об отсутствии внешнего финансирования при проведении исследования.

ADDITIONAL INFORMATION

Authors' contribution. A. V. Kovalev, N. V. Minaeva, A. I. Shashkin – problem statement, discussion of solution methods, editing of the manuscript text. M. M. Korotkov – construction of the mathematical model, computational experiment, writing of the manuscript text.

Competing interests. The authors declare that they have no competing interests.

Funding. This study was not supported by any external sources of funding.

ЛИТЕРАТУРА

1. ГОСТ 27751-2014. Надежность строительных конструкций и оснований. Основные положения. – Москва, 2015. – Введ. с 01.07.15.
2. Вольмир А. С. Устойчивость упругих систем. – Москва : Физматгиз, 1963. – 880 с.
3. Железнов Л. П. Исследование нелинейного деформирования и устойчивости композитной цилиндрической оболочки при комбинированном нагружении крутящим и изгибающим моментами и внутренним давлением // Прикладная механика и техническая физика. – 2023. – Т. 64, № 2. – С. 182–192. – DOI: 10.1134/S0021894423020177.
4. Influence of Shape Imperfections on the Stability of thin Spherical Shells / V. A. Bazhenov [et al.] // Strength of Materials. – 2021. – Vol. 53. – P. 842–851. – DOI: 10.1007/s11223-022-00351-0.
5. Спорыхин А. Н., Шашкин А. И. Устойчивость равновесия пространственных тел и задачи механики горных пород. – Москва : Физматлит, 2004. – 232 с.
6. Броуде Б. М. Потеря устойчивости как предельное состояние // Строительная механика и расчет сооружений. – 1970. – № 6. – С. 4–7.
7. Броуде Б. М., Бельский Г. И., Беляев Б. И. О потере устойчивости как предельном состоянии стальных конструкций // Строительная механика и расчет сооружений. – 1990. – № 3. – С. 88–91.
8. Гусейнова С. В., Дибиргаджисеев А. М., Муртазалиев Г. М. Возможные постановки задач потери устойчивости конструкций // Вестник Дагестанского государственного технического университета. Технические науки. – 2014. – Т. 35, № 4. – С. 113–118. – DOI: 10.21822/2073-6185-2014-35-4-113-118.
9. Ишинский А. Ю. Рассмотрение вопросов об устойчивости равновесия упругих тел с точки зрения математической теории упругости // Украинский математический журнал. – 1954. – Т. 6, № 2. – С. 140–146.
10. Минаева Н. В. Адекватность математических моделей деформируемых тел. – Москва : Научная книга, 2006. – 236 с.

11. *Новоэжилов В. В.* Теория упругости. – Санкт-Петербург : Политехника, 2012. – 409 с.
12. *Ершов Л. В., Ивлев Д. Д.* Об устойчивости полосы при сжатии // Доклады Академии наук СССР. – 1961. – Т. 138, № 5. – С. 1047–1049.
13. *Korotkov M. M., Minaeva N. V., Shashkin A. I.* Investigation of Quasi-Static Deflection of an Elastic Plate Made of Inhomogeneous Material under Compression // Mechanics of Solids. – 2024. – Vol. 59, no. 7. – P. 3811–3817. – DOI: 10.1134/S0025654424606578.
14. *Даринский Б. М., Сапронов Ю. И., Царев С. Л.* Бифуркации экстремалей фредгольмовых функционалов // Журнал математических наук. – 2007. – Т. 145, № 6. – С. 5311–5453. – DOI: 10.1007/s10958-007-0356-2.
15. Study on Stability for Compressive Elastic-Fixed Strip / T. V. T. Thi [et al.] // Civil Engineering and Architecture. – 2025. – Vol. 13, no. 3. – P. 1509–1516. – DOI: 10.13189/cea.2025.130306.

REFERENCES

1. GOST 27751-2014. Reliability of building structures and foundations. The main provisions. – Moscow, 2015. – (in Russian). Introduced on 07/01/15.
2. *Volmir A. S.* Stability of elastic systems. – Moscow : Fizmatgiz, 1963. – 880 p. – (in Russian).
3. *Zheleznov L. P.* Study of nonlinear deformation and stability of a composite cylindrical shell under combined loading with torque, bending moments and internal pressure // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. – 2023. – Vol. 64, no. 2. – P. 332–341. – DOI: 10.1134/S0021894423020177. – (in Russian).
4. Influence of Shape Imperfections on the Stability of Thin Spherical Shells / V. A. Bazhenov [et al.] // Strength of Materials. – 2021. – Vol. 53. – P. 842–851. – DOI: 10.1007/s11223-022-00351-0.
5. *Sporykhin A. N., Shashkin A. I.* Stability of the equilibrium of spatial bodies and problems of rock mechanics. – Moscow : Fizmatlit, 2004. – 232 p. – (in Russian).
6. *Brode B. M.* Loss of stability as a limiting condition // Structural Mechanics and Calculation of Structures. – 1970. – No. 6. – P. 4–7. – (in Russian).
7. *Brode B. M., Belsky G. I., Belyaev B. I.* On loss of stability as a limiting condition of steel structures // Construction Mechanics and Calculation of Structures. – 1990. – No. 3. – P. 88–91. – (in Russian).
8. *Guseinova S. V., Dibirgadzhiev A. M., Murtazaliyev G. M.* Possible statements of problems of loss of stability designs // Herald of Dagestan State Technical University. Technical Sciences. – 2014. – Vol. 35, no. 4. – P. 113–118. – DOI: 10.21822/2073-6185-2014-35-4-113-118. – (in Russian).
9. *Ishlinsky A. Y.* On the Problem of Elastic Bodies Equilibrium Stability in Mathematical Theory of Elasticity // Ukrainian Mathematical Journal. – 1954. – Vol. 6, no. 2. – P. 140–146. – (in Russian).
10. *Minaeva N. V.* The Adequacy of Mathematical Models of Deformable Bodies. – Moscow : Science Book, 2006. – 236 p. – (in Russian).
11. *Novozhilov V. V.* Theory of Elasticity. – St. Petersburg : Polytechnic, 2012. – 409 p. – (in Russian).

12. *Yershov L. V., Ivlev D. D.* On Stability of a Strip in Compression // Bulletin of USSR Academy of Sciences. – 1961. – Vol. 138, no. 5. – P. 1047–1058. – (in Russian).
13. *Korotkov M. M., Minaeva N. V., Shashkin A. I.* Investigation of Quasi-Static Deflection of an Elastic Plate Made of Inhomogeneous Material under Compression // Mechanics of Solids. – 2024. – Vol. 59, no. 7. – P. 3811–3817. – DOI: 10.1134/S0025654424606578.
14. *Darinskii V. S., Sapronov Y., Tsarev S.* Bifurcations of extremals of Fredholm functionals // Journal of Mathematical Sciences. – 2007. – Vol. 145. – P. 5311–5453. – DOI: 10.1007/s10958-007-0356-2. – (in Russian).
15. Study on Stability for Compressive Elastic-Fixed Strip / T. V. T. Thi [et al.] // Civil Engineering and Architecture. – 2025. – Vol. 13, no. 3. – P. 1509–1516. – DOI: 10.13189/cea.2025.130306.