

И. Н. Захаров¹, Е. Г. Солодкова², С. В. Балалин², В. Х. Лэ¹, Е. В. Лобанов²

**РАЗРАБОТКА ПЕРСОНАЛИЗИРОВАННОЙ
КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОЙ МОДЕЛИ РОГОВИЦЫ ДЛЯ
ПРОГНОЗИРОВАНИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ ИМПЛАНТАЦИИ
ИНТРАСТРОМАЛЬНЫХ СЕГМЕНТОВ ПРИ КЕРАТОКОНУСЕ**

¹ Волгоградский государственный технический университет, Волгоград, Россия

² Волгоградский филиал ФГАУ «НМИЦ «МНТК «Микрохирургия глаза» им. акад. С. Н. Федорова» Минздрава России, Волгоград, Россия

Аннотация. Разрабатывается персонализированная конечно-элементная биомеханическая модель роговицы с кератоконусом для цифрового моделирования операции имплантации интрастромальных сегментов. Модель учитывает индивидуальные геометрические параметры и механические свойства роговичной ткани, включая зоны патологических изменений с пониженной жесткостью. Разработан комплексный подход к моделированию хирургического вмешательства, включающий этапы аппланации роговицы, формирования внутристромального канала, контактного взаимодействия имплантов с тканью и процессов декогезии. Представлено численное прогнозирование влияния различных параметров сегментов (толщина, длина дуги, положение) на биомеханическое поведение роговицы и коррекцию кератотопографических показателей. Верификация модели на клиническом случае пациента с кератоконусом III стадии подтвердила достаточно высокую точность прогноза (отклонение 15–20%).

Ключевые слова: роговица, кератоконус, интрастромальные сегменты, Pentacam, Corvis, метод конечных элементов, цифровое планирование операции

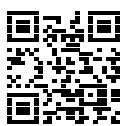
Захаров Игорь Николаевич, доктор технических наук, заведующий кафедрой сопротивления материалов; e-mail: zaxap@mail.ru; <https://orcid.org/0000-0001-7177-7245>; AuthorID: 142419

Солодкова Елена Геннадиевна, кандидат медицинских наук, заместитель директора по научной работе; e-mail: solo23el@mail.ru; <https://orcid.org/0000-0002-7786-5665>; AuthorID: 652843

Балалин Сергей Викторович, доктор медицинских наук, заведующий научным отделом; e-mail: s.v.balalin@gmail.com; <http://orcid.org/0000-0002-5250-3692>; AuthorID: 267867

Лэ Ван Хоанг, аспирант; e-mail: hoangle.vol@gmail.com; <https://orcid.org/0000-0002-1536-3061>; AuthorID: 1194083

Лобанов Евгений Викторович, инженер; e-mail: omt@isee.ru; <http://orcid.org/0000-0001-9112-3230>; AuthorID: 1163700



для цитирования: Захаров И. Н., Солодкова Е. Г., Балалин С. В., Лэ В. Х., Лобанов Е. В. Разработка персонализированной конечно-элементной модели роговицы для прогнозирования результатов имплантации интрастромальных сегментов при кератоконусе // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2025. № 2(64). С. 221–245. DOI: 10.37972/chgpu.2025.64.2.005. EDN: VCSQZG

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0).

I. N. Zakharov¹, E. G. Solodkova², S. V. Balalin², V. Kh. Le¹, E. V. Lobanov²

DEVELOPMENT OF A PERSONALIZED FINITE-ELEMENT MODEL OF THE CORNEA FOR PREDICTING THE OUTCOMES OF INTRASTROMAL SEGMENT IMPLANTATION IN KERATOCONUS

¹ Volgograd State Technical University, Volgograd, Russia

² Volgograd Branch of the S.N. Fyodorov Eye Microsurgery Federal State Institution, Volgograd, Russia

Abstract. A personalized finite-element biomechanical model of the keratoconic cornea has been developed for digital simulation of intrastromal segment implantation surgery. The model incorporates patient-specific geometric parameters and mechanical properties of the corneal tissue, including zones of pathological changes with reduced stiffness. A comprehensive approach to surgical simulation has been established, encompassing the stages of corneal appplanation, formation of the intrastromal channel, implant–tissue contact interactions, and decohesion processes. Numerical predictions of the influence of various segment parameters (thickness, arc length, position) on corneal biomechanical behavior and keratotopographic correction are presented. Model validation on a clinical case of stage III keratoconus demonstrated high predictive accuracy, with deviations within 15–20%.

Keywords: cornea, keratoconus, intracorneal segments, Pentacam, Corvis, finite element method, digital surgical planning

Igor N. Zakharov, Doctor of Technical Sciences, Head of the Department of Strength of Materials; e-mail: zaxap@mail.ru; <https://orcid.org/0000-0001-7177-7245>; AuthorID: 142419

Elena G. Solodkova, Candidate of Medical Sciences, Deputy Director for Research; e-mail: solo23el@mail.ru; <https://orcid.org/0000-0002-7786-5665>; AuthorID: 652843

Sergey V. Balalin, Doctor of Medical Sciences, Head of the Research Department; e-mail: s.v.balalin@gmail.com; <https://orcid.org/0000-0002-5250-3692>; AuthorID: 267867

Van Hoang Le, Postgraduate Student; e-mail: hoangle.vol@gmail.com; <https://orcid.org/0000-0002-1536-3061>; AuthorID: 1194083

Evgeny V. Lobanov, Engineer; e-mail: omt@isee.ru; <https://orcid.org/0000-0001-9112-3230>; AuthorID: 1163700



to cite this article: Zakharov I. N., Solodkova E. G., Balalin S. V., Le V. H., Lobanov E. V. Development of a personalized finite-element model of the cornea for predicting the outcomes of intrastromal segment implantation in keratoconus // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2025. No 2(64). p. 221–245. DOI: 10.37972/chgpu.2025.64.2.005

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Received: 05.06.25;

accepted: 08.10.25;

published: 19.12.25.

1. Введение. Метод имплантации интрастромальных колец и сегментов (рис. 1), разработанный в 1980-х годах для коррекции близорукости низкой и средней степени тяжести, сегодня получил широкое распространение при лечении различных видов кератэкстазий и патологий роговицы, таких как кератоконус, пеллюцидная краевая дистрофия, ятrogenная эктазия роговицы и др.

Первые результаты применения внутрироговичных сегментов при лечении кератоконуса появляются в начале 2000-х годов в работах J. Colin и его коллег[1]. Предложенная в качестве дополнительной хирургической процедуры при кератоконусе, технология имплантации интрастромальных сегментов (ИСС) показывает эффективные результаты по снижению астигматизма, уменьшению кривизны роговицы, регуляризации ее формы и позволяет отсрочить, если не избежать, трансплантиацию роговицы при эктатических заболеваниях. С тех пор было опубликовано множество отчетов и клинических исследований об эффективном применении ИСС при лечении кератоконуса, современную подборку и анализ которых можно найти в обзорных статьях [2].

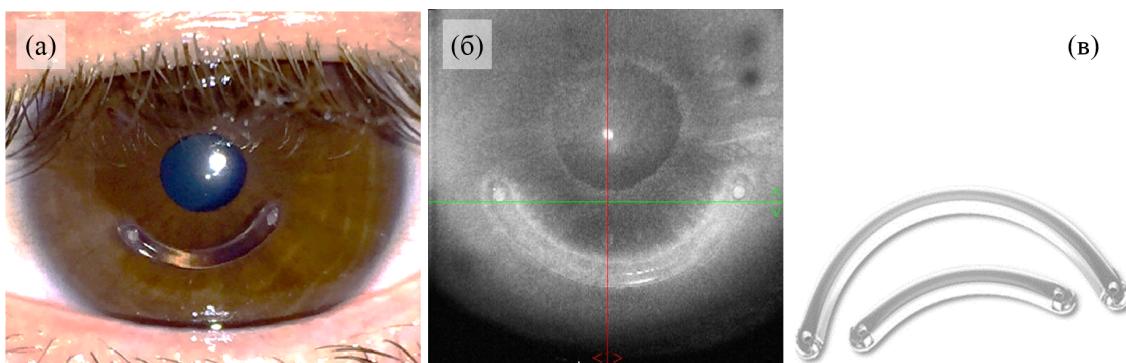


Рис. 1. Имплантация интрастромальных сегментов: а) общий вид роговицы с сегментом; б) оптическая когерентная томография роговицы с ИСС (режим Corneal Cub); в) интрастромальные сегменты производства ООО НЭП «Микрохирургия глаза»

Несмотря на существование практических рекомендаций и номограмм производителей (Keraring, Intacs, Ferrara и др. [3]) для выбора ИСС в зависимости от сочетания оптических, рефракционных, кератотопографических параметров роговицы пациента, в ряде случаев имплантация ИСС не дает рефракционного эффекта и даже может сопровождаться ухудшением зрения пациента после операции [4], а также осложнениями в виде миграции, экструзии и протрузии сегментов, отека ткани, кератита и т.д. [5]. Во многом это связано с принципиальной невозможностью учета индивидуальных особенностей геометрии, строения и свойств живого органа (роговицы) пациента в рамках некоторого универсального подхода.

Вышеизложенное придает особую актуальность пациент-ориентированным методикам лечения заболеваний, основывающимся на совместном использовании клинических приборных данных пациента и персонализированных компьютерных (конечно-элементных) моделей роговицы, построенных на их основе.

Одной из первых публикаций в области численного моделирования внутрироговничных колец, вероятно, можно считать краткое сообщение Р.М. Pinsky (1995) [6]. Систематические исследования, в которых модели роговицы и сегментов выстраиваются, как правило, с использованием метода конечных элементов (МКЭ), появляются в более позднее время (например, в статьях авторов S. Kling (2013) [7], A. Daxer (2015) [8], M.A. Lago (2015) [9], S.N. Khan (2016) [10], И.С. Никитин (2017) [11] и др.) и не теряют своей актуальности в современных работах (M.Á. Ariza-Gracia (2020) [12], C.M. Бауэр (2024) [13], N.M. Bagheri (2022) [14], G.G. de Oteyza (2023) [15] и т.д.).

Указанные модели базируются на некоторой системе допущений относительно геометрии расчетной области, свойств материала роговицы и параметров зон их деградации, формы, механических характеристик имплантов и моделей их контакта.

Идеализированная форма роговицы авторами, как правило, задается в виде сферической [7, 8, 10–13], или эллиптической [15] оболочки с переменной толщиной стенки. Для описания материала роговицы используются различные модели гиперупругости, как изотропной — Муни-Ривлина [7], Огдена [9, 10], Йео [12, 15], так и анизотропной — Гассера-Хольцапфеля-Огдена [14], модели линейной упругости с ортотропным [11] или трансверсально-изотропным [13] распределением свойств и другие.

Для описания деградации свойств ткани при кератоконусе может вводится локальная зона с пониженными коэффициентами упругости в виде центральной круговой [7, 11, 12] или эллиптической [15] области, либо задается общее снижение жесткости в объеме роговицы [9, 14]. При моделировании операций по коррекции зрения имплантацией внутрироговничных колец (типа MyoRing) и сегментов (Intacs, Ferrara) в [10, 13] роговица предполагается интактной — патологические изменения характеристик не рассматриваются.

Используемый в качестве материала имплантов полиметилметакрилат (ПММА), как правило, считается линейно-упругим [10–15], реже — абсолютно жестким [9]. При этом в зависимости от типа и производителя ИСС рассматриваются различные формы сечения: треугольная (типа Keraring, Ferrara, MyoRing и т.д.) [7, 9, 11–15], шестиугольная (Intacs) [7, 12], круглая [12, 14], эллиптическая [14].

Различные подходы применяются авторами при разработке моделей контакта имплантата с поверхностями внутрироговничного канала. В ряде случаев контактное взаимодействие задается условно, например, перемещением узлов конечно-элементной сетки [9, 10] или распределенной нагрузкой на стенки канала [11]. В других же — для раскрытия канала задается предварительный зазор между его стенками [13, 14], внутреннее давление [12], которые постепенно уменьшаются до тех пор, пока поверхности войдут в полный контакт, а сегмент (кольцо) установится внутри роговицы.

Отметим, что в рамках универсальных подходов, использующих идеализированную геометрию и усредненные свойства ткани, можно выявить общие закономерности влияния параметров имплантации ИСС на качественные изменения

роговицы. Однако в этих случаях существенно ограничиваются возможности прогнозирования и количественной оценки результатов операции для конкретного пациента с учетом его индивидуальных особенностей.

При этом пациент-ориентированные МКЭ-модели лечения кератоконуса установкой ИСС, основанные на индивидуализированных параметрах геометрии и материала роговицы, полученных при клиническом обследовании пациента, в современных публикациях представлены весьма ограниченно [9, 14].

В данном исследовании разрабатывается персонализированная конечно-элементная (КЭ) модель роговицы с кератоконусом при имплантации интрастромальных сегментов. Модель позволяет варьировать размеры и положение ИСС с целью обеспечения эффективной коррекции кератотопографических картин в соответствии с наилучшим расчетным прогнозом для пациента. На всех этапах исследования соблюдались принципы, изложенные в Хельсинской декларации, от всех участников было получено информированное письменное согласие. Протокол исследования получил одобрение комитета по медицинской этике Волгоградского филиала ФГАУ «НМИЦ «МНТК «Микрохирургия глаза» им. акад. С.Н. Федорова» Минздрава России.

2. Постановка задачи. Этапы построения и базовые соотношения пациент-ориентированной трехмерной КЭ модели биомеханических свойств и поведения роговицы подробно рассмотрены в статьях [16, 17]. Поэтому в этом разделе ограничимся изложением наиболее характерных особенностей данной модели.

2.1. Основные уравнения. Считая материал роговицы изотропным гиперупругим, основные уравнения задаются в рамках механики больших деформаций следующим образом.

Уравнения квазистатического равновесия

$$\nabla \cdot (\mathbf{F} \mathbf{S})^T + \mathbf{f}_v = 0,$$

где ∇ — оператор набла; T — символ транспонирования; \mathbf{f}_v — вектор объемных сил; \mathbf{S} — второй тензор напряжений Пиолы–Кирхгофа; \mathbf{F} — градиент деформации, определяемый как:

$$\mathbf{F} = \mathbf{I} + \nabla \mathbf{u},$$

где \mathbf{I} — единичный тензор второго ранга, \mathbf{u} — вектор перемещений.

Второй тензор напряжений Пиолы–Кирхгофа связан с функцией плотности энергии деформации W_s соотношением:

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_{\text{ext}} + \frac{\partial W_s}{\partial \varepsilon}. \quad (1)$$

где \mathbf{S}_{ext} — тензор дополнительных напряжений; ε — тензор деформации Грина–Лагранжа

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I})$$

Функциональная форма соотношения для W_s в данной работе устанавливается на основе сравнительного расчетно-экспериментального анализа известных гиперупругих моделей роговицы (Муни-Ривлина с 2 и 5 параметрами, Огдена, Сторакерса, Йео) [17]. По результатам исследования в качестве базовой принята модель Йео, в рамках которой функция плотности энергии деформации может быть записана в виде

$$W_s = c_1(\bar{I}_1 - 3) + c_2(\bar{I}_1 - 3)^2 + c_3(\bar{I}_1 - 3)^3 + \frac{\kappa}{2}(J - 1)^2, \quad (2)$$

где c_1, c_2, c_3 — эмпирические параметры; $J = \det \mathbf{F}$ — третий инвариант градиента деформации \mathbf{F} , характеризующий изменение объема; κ — модуль объемной упругости; \bar{I}_1 — первый инвариант тензора $\bar{\mathbf{C}}$, $\bar{I}_1 = \text{tr}(\bar{\mathbf{C}})$, $\bar{\mathbf{C}} = J^{-2/3}\mathbf{C}$; \mathbf{C} — правый тензор деформаций Коши-Грина.

Зона кератоконуса, соответствующая патологическим изменениям свойств роговицы, вводится как область с пониженными (по модулю) параметрами жесткости c_1, c_2, c_3 в выражении (2), которое в этом случае записывается в виде [16, 17]:

$$W_s = (1 - \psi_{kc}) \cdot [c_1(\bar{I}_1 - 3) + c_2(\bar{I}_1 - 3)^2 + c_3(\bar{I}_1 - 3)^3] + \frac{1}{2}\kappa(J_{el} - 1)^2, \quad (3)$$

где ψ_{kc} — функция снижения жесткости в объеме роговицы с кератоконусом. Вид функции ψ_{kc} будет установлен далее.

Материал сегментов, изготовленных из полиметилметакрилата (ПММА), принимался изотропным линейно-упругим. При этом W_s в (1) будет определяться плотностью энергии упругой деформации.

2.2. Общие граничные условия. Приведенная система основных уравнений на различных этапах решения дополняется граничными условиями, заданными на соответствующих поверхностях Γ роговицы (рис. 2) и соответствующими конкретным условиям закрепления, нагружения и контакта роговицы, имплантов и хирургического инструмента на каждом из этапов.

При этом общими для всех этапов будут условия:

а) отсутствия перемещений на поверхностях Γ_s , примыкающей к склере (поверхность примыкания на рис. 2)

$$\mathbf{u} = 0, \quad \Gamma \in \Gamma_s$$

б) действие на задней поверхности Γ_b роговицы (рис. 2) поверхностью распределенной нагрузки интенсивностью q_b (вдоль составляющих вектора нормали \mathbf{n})

$$S \cdot \mathbf{n} = q_b, \quad \Gamma \in \Gamma_b$$

В естественном состоянии задняя поверхность Γ_b (рис. 2) загружена внутриволнистым давлением (ВГД) p_{iop} . Поверхностные силы q_b в таком случае задаются в виде:

$$q_b = -p_{iop} \cdot \mathbf{n}, \quad \Gamma \in \Gamma_b$$

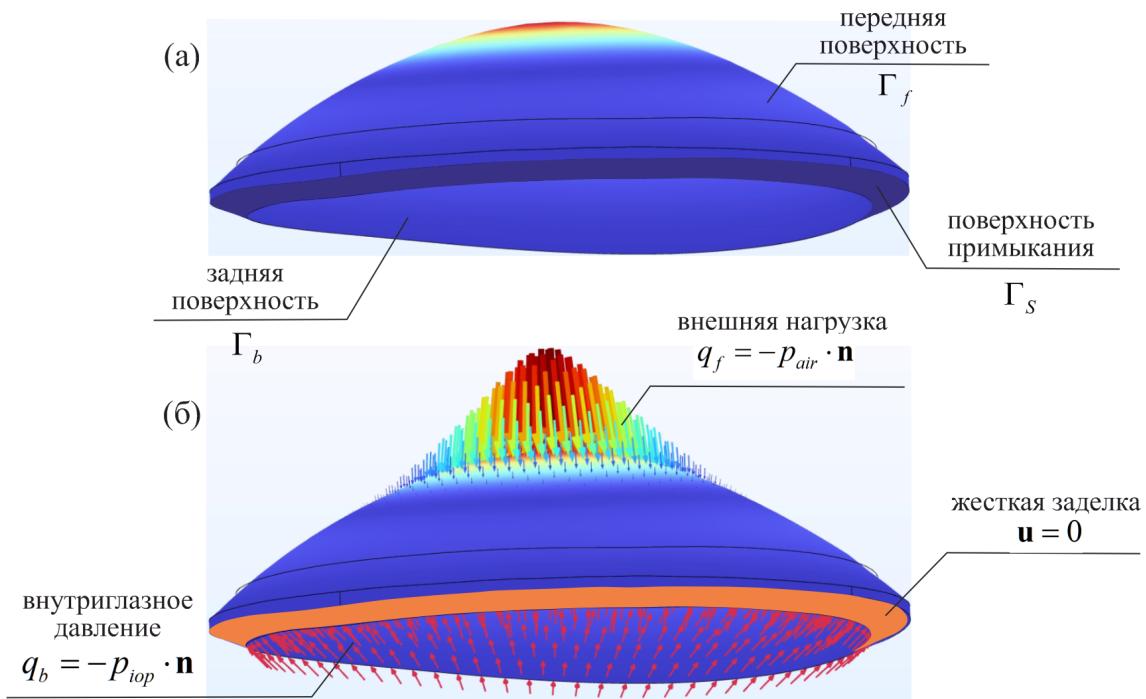


Рис. 2. Общий вид геометрической модели роговицы (а) и схема граничных условий (б).

в) на передней поверхности Γ_f роговицы могут задаваться внешние поверхностью распределенные нагрузки интенсивностью q_f , соответствующие различным этапам диагностики или хирургического лечения

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{n} = q_f, \quad \Gamma \in \Gamma_f \quad (4)$$

В частности, при диагностике биомеханических параметров роговицы при помощи бесконтактной пневмотонометрии (Corvis ST) на поверхности Γ_f , согласно условию (4), задается нагрузка q_f , соответствующая давлению воздушного импульса p_{air} (рис. 2)

$$q_f = -p_{air} \cdot \mathbf{n}, \quad \Gamma \in \Gamma_f$$

При этом величина p_{air} , пространственный и временной профили давления струи задаются путем интерполяции экспериментальных данных, фиксируемых в ходе тонометрического теста на базе Corvis ST для 140 точек исследуемого интервала времени [16, 17].

2.3. Область внутрироговичного канала. В исходной геометрической модели роговицы предусмотрены области для внутрироговичного канала и зоны возможного расслоения роговицы в окрестности канала при его раскрытии (рис. 3).

Размеры кольцевого канала задавались согласно протоколу операции и устанавливались одинаковыми для всех исследованных пациентов: внутренний диаметр 5 мм, внешний — 6,2 мм, ширина канала 600 мкм, толщина реза — около 6,5 мкм (рис. 3). Зона расслоения задается в плоскости канала соосно ему, при этом ее ширина составляет 1,2 мм. Индивидуальными для каждого пациента являются параметры расположения канала в роговице — глубина установки, координаты центра, длина дуги и угол установки.

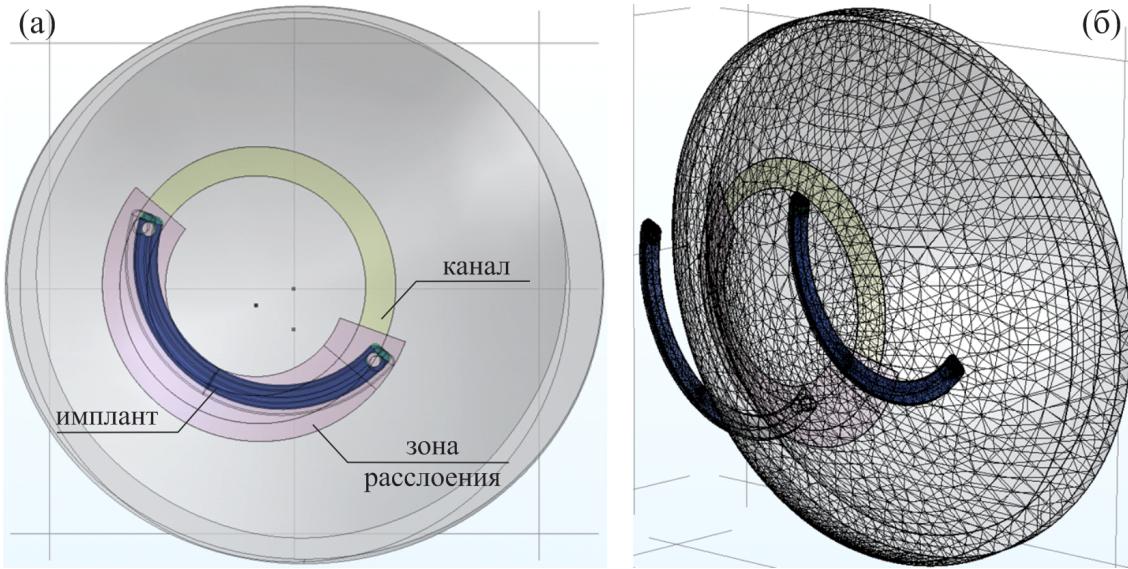


Рис. 3. Модель имплантации ИСС с внутрироговичным каналом, зоной возможного надрыва, имплантом (а) и их конечно-элементная дискретизация (б).

Внутренние поверхности противоположных стенок канала и зоны надрыва составляют контактную пару, для которой на начальном этапе задаются условия адгезионного контакта, обеспечивающие их совместное деформирование на предварительных этапах расчета.

Данные условия включают условия разрыва поля перемещений на противоположных стенках тоннеля на величину эффективного зазора g_n и вектора тангенциальных смещений \mathbf{g}_t между ними, записанные в локальной системе координат, связанной со стенкой канала, в виде:

$$\mathbf{u} = \{0, 0, (g_n)\} + \mathbf{T}_b^{-T} \cdot \mathbf{g}_t \quad (5)$$

где \mathbf{T}_b^{-T} — матрица преобразований из глобальной системы координат в локальную; угловые скобки $\langle \cdot \rangle$ означают выделение положительной части переменной.

$$\langle g_n \rangle = \begin{cases} g_n, & g_n \geq 0 \\ 0, & g_n < 0 \end{cases}$$

На контактирующих поверхностях задается вектор «адгезионных» напряжений \mathbf{f} , пропорциональных вектору скачка перемещений \mathbf{u} между стенками тоннеля [18]:

$$\mathbf{f} = k\mathbf{u}, \quad (6)$$

где k — жесткость адгезионного соединения (слоя).

Для отрицательных значений эффективного зазора g_n нормальная составляющая вектора \mathbf{f} обнуляется, а условия контакта приводятся к формулировкам метода штрафных функций.

2.4. Аппланація роговицы. На втором этапе воспроизводится процедура аппланації роговицы, находящейся под действием ВГД, при помощи аппланаціонной линзы. Действие линзы задается как действие на роговицу абсолютно жесткого штампа, перемещающегося на некоторую фиксированную величину, ограниченную при операции системой аспирационных колец. В ходе решения задачи в итерационном режиме уточняется расчетное положение внутрироговичного тоннеля, которое в аппланированном состоянии роговицы должно соответствовать заданному по протоколу операции. В момент полной аппланації моделируется процесс формирования тоннеля путем снижения в (6) коэффициента адгезии k на противоположных стенках канала до нулевого значения. После этого штамп отводится в исходное положение, а роговица, освобождаясь от внешних перемещений, возвращается в ненагруженное естественное состояние с подготовленным каналом (рис. 4).



Рис. 4. Модель аппланації роговицы жестким штампом (аппланаціонною лінзою): а — начальне положеніе; б — конечне положеніе штампа

Штамп принимается абсолютно жестким, и для всех точек его объема W_{ap} задается перемещение в направлении вдоль оси роговицы (ось $0x$). Рассматривается три этапа процесса: 1) перемещение штампа в течение времени t_{st} на величину аппланації u_{ap} , определяемую конечным положением аппланаціонной

линзы при операции; 2) выдержка в аппланированном состоянии до момента t_{ap} ; 3) перемещение штампа в исходное состояние к моменту t_{in} :

$$u_x(t) = \begin{cases} u_{ap} \cdot \frac{t}{t_{st}}, & 0 \leq t \leq t_{st}, \\ u_{ap}, & t_{st} < t \leq t_{ap}, \\ u_{ap} \cdot \frac{t_{in}-t}{t_{in}-t_{ap}}, & t_{ap} < t \leq t_{in}. \end{cases}$$

В зоне контакта Γ_c передней поверхности роговицы с поверхностью аппланационной линзы действует поверхностно распределенная нагрузка интенсивностью q_f ,

$$S \cdot \mathbf{n} = q_f, \quad \Gamma \in \Gamma_c$$

величина которой соответствует возникающему здесь контактному давлению T_c :

$$q_f = -T_c \cdot \mathbf{n}, \quad \Gamma \in \Gamma_c \quad (7)$$

В качестве граничных условий контактного взаимодействия двух тел используются условия Герца–Синьорини (условия непроникновения контактирующих поверхностей):

$$g_c \geq 0, \quad T_c \geq 0, \quad T_c \cdot g_c \geq 0 \quad (8)$$

где g_c — функция расстояния (зазор между главной и подчиненной поверхностями).

Для отыскания контактного давления T_c и области контакта Γ_c используется метод штрафных функций. В этом случае величина T_c задается соотношениями вида:

$$T_c = \begin{cases} -p_c \cdot g_c, & g_c < 0 \\ 0, & g_c \geq 0 \end{cases} \quad (9)$$

здесь p_c — параметр штрафа, интерпретируемый как жесткость условных нелинейно-упругих связей между контактирующими точками, создающих дополнительные контактные усилия в случаях нарушения условия непроникновения.

Условие нормального контакта на подчиненной поверхности записывается в интегральной форме, соответствующей виртуальной работе контактных сил:

$$\int_{\Gamma_c} T_c \cdot \delta g_c d\Gamma = 0 \quad (10)$$

На стадии выдержки роговицы в аппланированном состоянии при $t_{st} < t \leq t_{ap}$ для моделирования процесса формирования кольцевого канала (рис. 4) на его стенках задаются условия декогезии, позволяющие разорвать ранее созданные адгезионные связи (5), (6).

Согласно [18], условие декогезии изменяет вектор напряжений \mathbf{f} , заданный на границах с адгезионным контактом (6), при этом не добавляет явных новых

слагаемых в виртуальную работу на сопряженных поверхностях. В таком случае на стенках кольцевого канала вектор напряжений \mathbf{f}_c при декогезии задается так [18]:

$$\mathbf{f}_c = (1 - d_c)k\mathbf{u}, \quad (11)$$

где d_c — параметр повреждения, значение которого возрастает от нуля до единицы по мере раскрытия стенок, снижения жесткости их сцепления и полного отрыва при $d_c = 1$.

Величина параметра d_c в (11) задается линейной функцией накопления повреждений, использующей в качестве критерия повреждения максимальные значения взаимных перемещений u_{\max} сопряженных поверхностей в области декогезии [18].

2.5. Взаимодействие импланта с роговицей. Далее моделируется процесс введения сегмента в канал с раскрытием его стенок и расслоением ткани роговицы. Взаимодействие импланта со стенками канала задается двумя контактными парами, в которых два штампа (основной и вспомогательный) в форме имплантируемых сегментов перемещаются навстречу друг другу и вступают в контакт с противоположными стенками канала (рис. 5, 6).

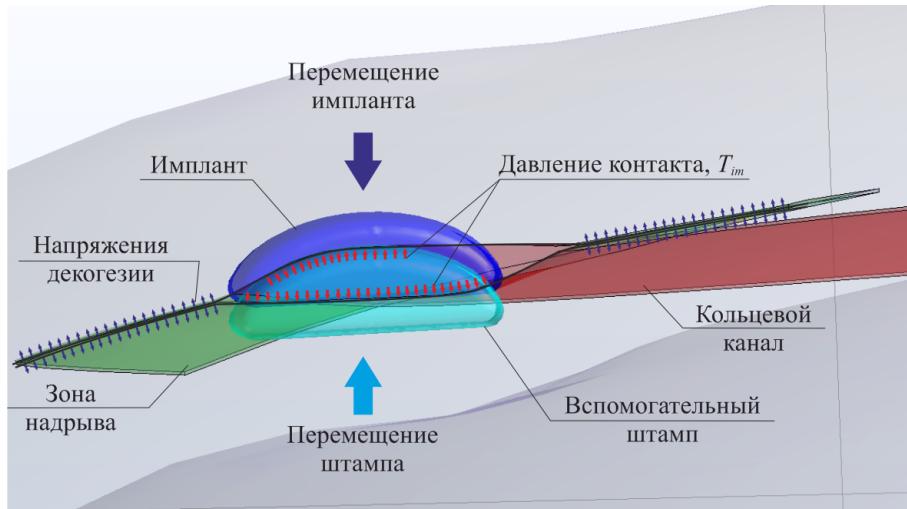


Рис. 5. Схема граничных условий в области взаимодействия импланта в виде двух штампов и внутристекловичного канала

На начальном интервале времени $0 \leq t \leq t_{im}$ задаются перемещения u_x импланта и вспомогательного штампа вдоль оси роговицы $0x$, одинаковые для всех точек объемов импланта W_{im} и штампа W_{st} и направленные навстречу друг другу (рис. 6). Величина перемещений u_{im} задается так, чтобы профиль импланта, раздвигая стенки канала, целиком разместился в образованной полости (рис. 6, с).

После размещения сегментов внутри канала (в интервале $t_{im} < t \leq t_{st}$) вспомогательный штамп выводится из контакта, а основной — вступает в контакт с обеими стенками канала, оставаясь неподвижным (рис. 6, с, ф):

$$u_x = \begin{cases} u_x^{im} \cdot t/t_1, & \Omega \in \Omega_{im}, \quad 0 \leq t \leq t_1 \\ -u_x^{im} \cdot t/t_1, & \Omega \in \Omega_{st}, \quad 0 \leq t \leq t_1 \\ u_x^m, & \Omega \in \Omega_m, \quad t_1 < t \leq t_2 \end{cases}$$

После момента $t > t_2$ система освобождается от кинематических граничных условий и приходит в равновесное состояние. Этому состоянию соответствует конечное взаимное расположение внутрирогоовичного тоннеля и импланта в нем после операции, а также состояние ткани в области возможного расслоения (рис. 6, д, г, ж).

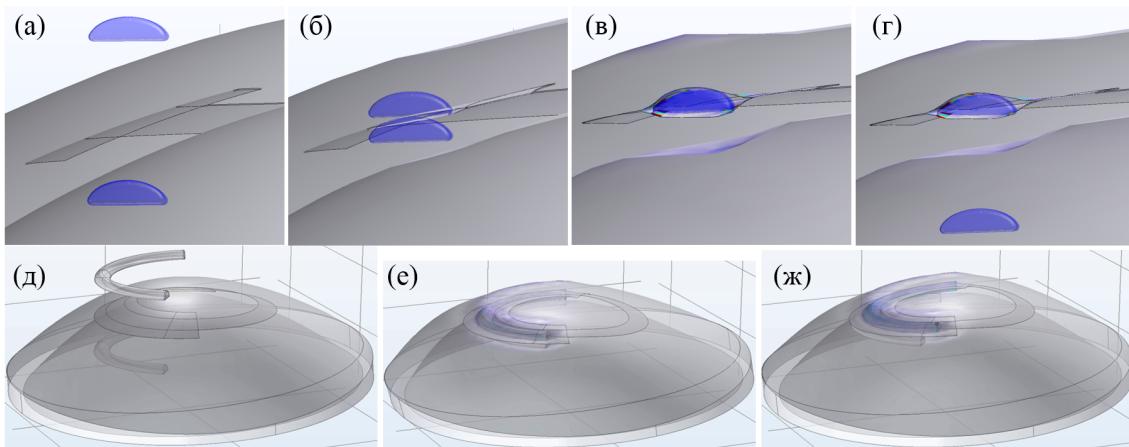


Рис. 6. Модель имплантации ИСС на различных этапах расчета: а, д — встречное движение штампов; б — раскрытие канала; в — полный контакт импланта со стенками канала; г, е — удаление вспомогательного штампа, выдержка; ж — равновесное состояние

На поверхностях контакта импланта Γ_{im} и вспомогательного штампа Γ_{st} со стенками канала действует поверхностью распределенная нагрузка q_{im} (рис. 5)

$$S \cdot \mathbf{n} = q_{im}, \quad \Gamma \in \Gamma_{im} \cup \Gamma \in \Gamma_{st}$$

соответствующая контактному давлению T_{im} (рис. 5)

$$q_{im} = T_{im} \cdot \mathbf{n}$$

Величина T_{im} определяется, как и в (7)–(10), с использованием метода штрафов через функцию g_{im} расстояния между контактирующими поверхностями и штрафной параметр p_{im} :

$$T_{im} = \begin{cases} -p_{im} \cdot g_{im}, & g_{im} < 0 \\ 0, & g_{im} \geq 0 \end{cases}$$

Условия непроникновения контактирующих поверхностей задаются аналогично (8):

$$g_{im} \geq 0, \quad T_{im} \geq 0, \quad T_{im} \cdot g_{im} \geq 0.$$

Для расчетной области расслоения роговицы при внедрении имплантата (рис. 3, 5), противоположные стенки которой находятся в адгезионном контакте друг с другом (5), (6), на данном этапе задаются условия декогезии, как на предыдущем этапе это было сделано для кольцевого канала (11):

$$\mathbf{f}_{im} = (1 - d_{im})k\mathbf{u}, \quad (12)$$

При этом для данной зоны могут быть заданы собственные характеристики, определяющие значения параметра повреждаемости d_{im} и вектора напряжений \mathbf{f}_{im} , например, прочность роговицы в поперечном направлении на разрыв и сдвиг.

3. Метод и построение решения. С использованием клинических данных конкретного пациента выстраивается конечно-элементная 3D-модель его роговицы, персонализированная по геометрии и биомеханическому поведению в соответствии с методиками [16, 17].

Далее все расчетные примеры приводятся для случая пациента К. с кератоконусом 2 стадии на левом глазу, который прошел лечение на основе биомеханического моделирования в соответствии с представленной методикой.

Построение геометрической модели роговицы осуществляется по данным топо- и томографического обследования пациента на кератотопографе Pentacam AXL. Исходными данными служат полученные на этом приборе координаты 9300 точек передней и 7300 точек задней поверхностей роговицы. Трехмерная модель создается в компьютерной системе КЭ моделирования COMSOL Multiphysics путем линейной интерполяции полученных экспериментальных массивов точек граничными поверхностями — передней и задней, «натянутыми» на указанный массив высот (координат), как на каркас (рис. 2). Сплошное тело формируется заполнением пространства между построенными поверхностями в пределах эллиптической области с длинами осей, соответствующими диаметрам роговицы в горизонтальной d_h и вертикальной d_v плоскостях (рис. 2, 3). При этом высота расчетной области соответствует глубине H_c передней камеры глаза, а расстояние между передней и задней поверхностями в начале координат задается по толщине h_a роговицы в апексе. Для пациента К.: $d_h = 12.06$ мм; $d_v = 11.3$ мм; $H_c = 3.04$ мм; $h_a = 0.507$ мм.

После формирования твердотельной модели строится ее КЭ аналог, состоящий из 67000 тетраэдральных элементов. Для оценки точности модели выполняется анализ ее локальной адаптации, с поэтапной детализацией в зонах с максимальными погрешностями. Производится оценка сходимости результатов и определяется минимальная плотность сетки, при которой решение практически не зависит от ее изменения.

3.1. Персонализация модели. Персонализация параметров (c_1, c_2, c_3) модели материала (2), (3) проводится на основе согласования расчетных данных о деформациях роговицы и клинических данных обследования пациента на пневмоманометре типа Corvis ST. Решается задача минимизации методом наименьших квадратов целевой функции, представляющей собой сумму квадратов отклонений расчетных значений от экспериментальных для амплитуды и скорости смещения в апексе. Минимизация выполняется при помощи алгоритма Левенберга–Марквардта для всех временных шагов одновременно путем поиска коэффициентов, обеспечивающих наилучшее соответствие расчетных кривых экспериментальным данным [17].

Зона кератоконуса вводится как система локальных областей с общим внешним контуром сложной формы, соответствующим минимальному снижению жесткости роговицы (рис. 7). Их центры располагаются в 5 опорных точках (рис. 7, б): апексе (Apex), минимальной пахиметрии (p_{min}), наибольшей задней элевации (e_{max}), максимальной интенсивности деформаций (e_{max}), максимальной кривизны передней поверхности (K_{max}), а также в 14 промежуточных — равноудаленных от опорных (всего 19 точек).

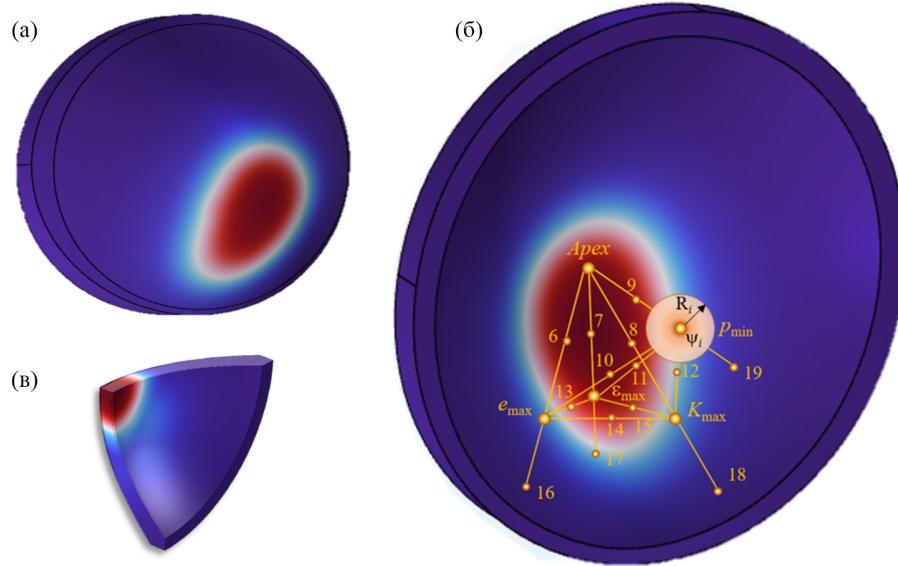


Рис. 7. Зона пониженной жесткости в области кератоконуса в объеме геометрической модели по передней (а), задней (б) поверхностям и в сечениях по толщине (в) роговицы

Каждой из областей соответствует собственный радиус R_i и локальный максимум относительного снижения свойств ψ_i . При этом итоговое распределение жесткости в патологически измененной роговице с кератоконусом задается в выражении (3) функцией ψ_{kc} , которая имеет вид:

$$\psi_{kc} = \sum_i \psi_i \cdot \exp(-\theta_i \cdot \rho_i^2 / R_i^2)$$

где ρ_i — расстояние от центра i -й зоны до исследуемой точки расчетной области; θ_i — параметр, устанавливающий градиент изменения свойств вдоль радиуса ρ_i (принимали $\theta_i = 0.693$, что соответствует 50% снижению величины ψ_i на расстоянии R_i от центра i -й зоны).

Значения ψ_i и R_i определяются путем минимизации методом Нелдера-Мида целевой функции, характеризующей отклонение расчетного поля тангенциальной кривизны передней поверхности роговицы от клинических данных пациента, полученных на кератотопографе Pentacam AXL. Коэффициенты жесткости c_1, c_2, c_3 для здоровых участков роговицы фиксируются на значениях, полученных на предыдущем этапе персонализации.

Для пациента К. получены следующие значения параметров материала для модели (3): $c_1 = 0.517$ МПа; $c_2 = -9.81$ МПа; $c_3 = 8396.7$ МПа; $\kappa = 2.0$ МПа; максимальное снижение жесткости в зоне кератоконуса $\psi_{kc}^{\max} = 0.373$. Параметр k адгезионного соединения стенок канала в (6), (11) и (12) принимался равным $\kappa = 2 \cdot 10^{12}$ Н/(м·м²), исходя из данных о пределе прочности роговицы и минимальном перемещении в слое до отрыва.

Кроме этого, по результатам пневмотонометрии для пациента К. задается внутриглазное давление $p_{iop} = 16.3$ мм.рт.ст. (2.173 кПа).

После геометрической и биомеханической персонализации модель верифицируется на независимом наборе клинических данных того же пациента (параметры и измерения Corvis ST и Pentacam AXL, не использовавшиеся для калибровки) [16, 17].

3.2. Схема вычислительного эксперимента. Геометрически и биомеханически персонализированная модель роговицы пациента используется для расчетного анализа различных вариантов расположения и размеров ИСС, при имплантации которых обеспечивается эффективная коррекция кератометрических показателей роговицы после операции. Варьируются следующие параметры ИСС (рис. 8):

- толщина сегментов варьируется по ряду типовых размеров 150, 200, 250 мкм (для сегментов производства ООО НЭП «Микрохирургия глаза», см. рис. 1, в; рис. 8);
- длина дуги (определенная соответствующим центральным углом) — по ряду типовых углов 90°, 120°, 160°, 210°;
- положение центра внутрироговичного канала изменяется по 16-ти точкам, 6 из которых лежат на треке, соединяющей центр зрачка и точку максимальной кератометрии K_{max} (линия 0° на рис. 8), другие 10 — на двух аналогичных треках (по 5 точек на каждом), отклоненных от первого на углы ±20° (см. линии +20° и -20° на рис. 8).

Положения центра канала согласуются с основными кератотопографическими картами пациента (кривизны, пахиметрии и элевации), расчетными картинами интенсивности деформаций роговицы под действием ВГД и снижения жесткости ткани в зоне кератоконуса (рис. 9). Такое позиционирование ИСС

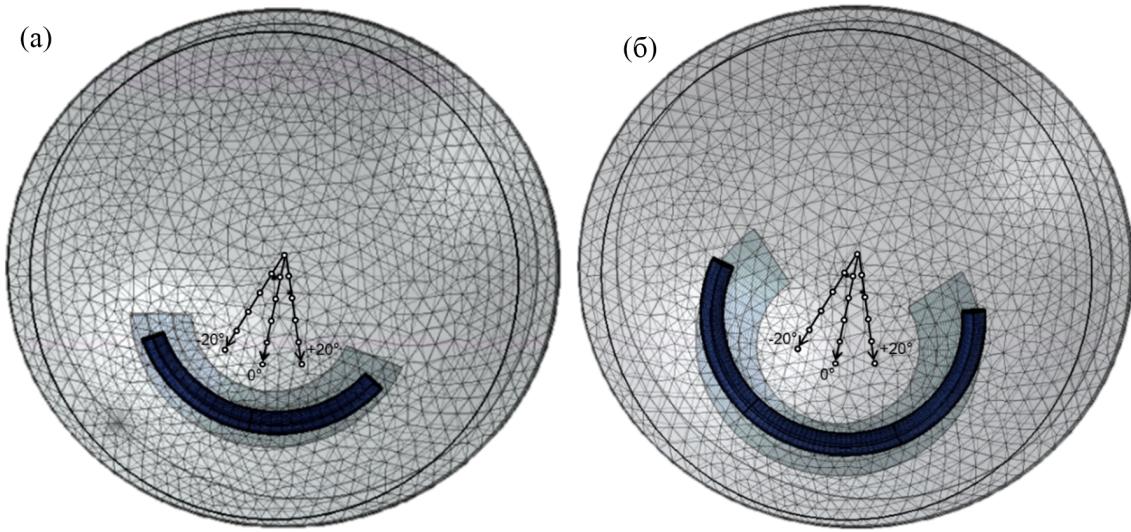


Рис. 8. Схема вариации размеров и положения интрастромальных сегментов при моделировании операции (а — сегмент 120° , б — 210°)

соответствует зонам выраженных патологических изменений роговицы и позволяет проанализировать наиболее характерные сценарии имплантации сегмента и возможные варианты и эффекты отклонения от протокола (рис. 9).

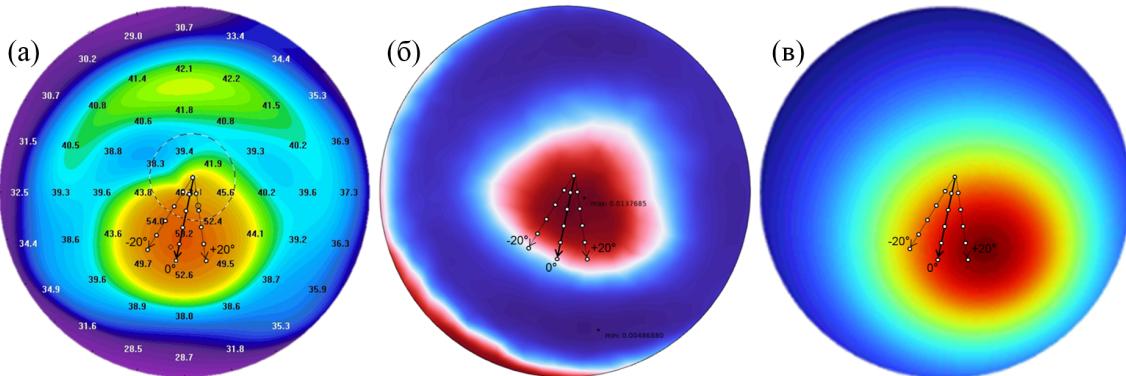


Рис. 9. Согласование расчетных положений центра внутрироговичного канала при моделировании операции с картами распределения параметров роговицы пациента: а — тангенциальная кривизна передней поверхности, по данным Pentacam; б — распределение интенсивности деформаций под действием ВГД; в — снижение жесткости роговицы в зоне кератоконуса

4. Анализ результатов и примеры. Далее рассматриваются некоторые результаты прогнозирования кератотопографических и биомеханических параметров роговицы для различных вариантов имплантации ИСС, полученные при моделировании операции на цифровом двойнике для пациента К.

4.1. Прогноз результатов операции. На рис. 10 приводится пример зависимости средней кривизны K_m передней поверхности роговицы (рассчитанной для пяти миллиметровой центральной зоны) от координаты λ центра роговичного тоннеля при его парацентральном смещении по схеме рис. 8. Для трех типоразмеров сегментов приводятся расчетные картины изменения тангенциальной и сагиттальной кривизны, а также интенсивности деформаций (рис. 10, а–с) передней поверхности роговицы после имплантации ИСС.

Строятся графики K_m (по типу рис. 10, д) и атласы карт кератотопографических и биомеханических параметров для всех исследованных вариантов, выявляются варианты, наиболее эффективные по совокупности указанных характеристик.

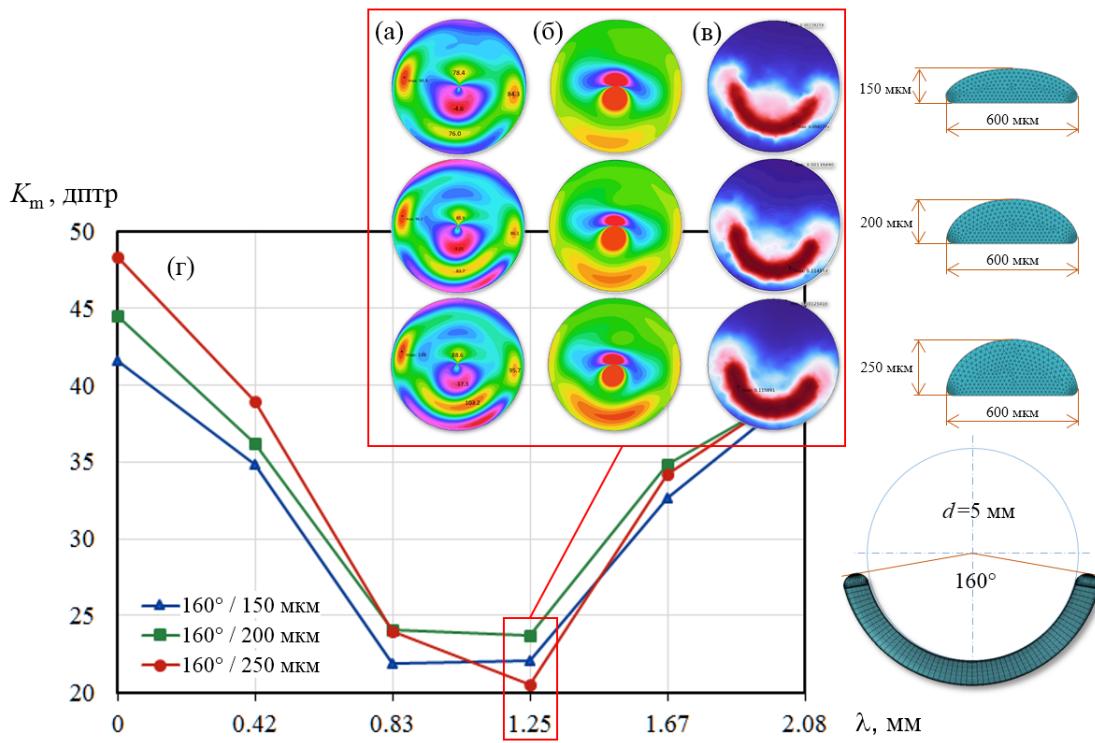


Рис. 10. Прогнозирование кератотопографических параметров для различных вариантов операции (ИСС высотой 150, 200, 250 мкм): а — карты тангенциальной кривизны; б — карты сагиттальной кривизны; в — карты интенсивности деформаций; г — зависимость средней кривизны передней поверхности от положения сегмента

В частности, для пациента К. наибольшее уплощение роговицы в оптической зоне прогнозируется для сегментов с длиной 160°, при толщинах 200–250 мкм. Предпочтительные положения тоннеля соответствуют его смещению относительно центра зрачка на 0,85–1,25 мм вдоль оси сегмента, повернутой на угол в диапазоне 250–270° (рис. 10). По минимальной величине K_m в качестве рекомендуемого (для указанных диапазонов размеров и положений) может быть

выбран вариант ИСС с длиной дуги 160° и толщиной 250 мкм при положении тоннеля со смещением относительно центра зрачка на 1,25 мм, с центральной осью на 259° и положением роговичного разреза 5° (рис. 11, а–с).

Для расширенного прогноза проведено планирование имплантации интракстромальных сегментов с помощью номограммы Keraring. По данным манифестной рефракции с учетом положения «сильной» оси роговичного астигматизма рекомендуется кольцевой сегмент с длиной дуги 160° и толщиной 150 мкм для имплантации в нижнем отделе.

По совокупности результатов окончательно был выбран следующий вариант интракстромального сегмента: длина дуги 160°, толщина 200 мкм, смещение относительно центра зрачка на 1,25 мм, положение центральной оси сегмента 263°, положение разреза — 5° (рис. 11, д–f).

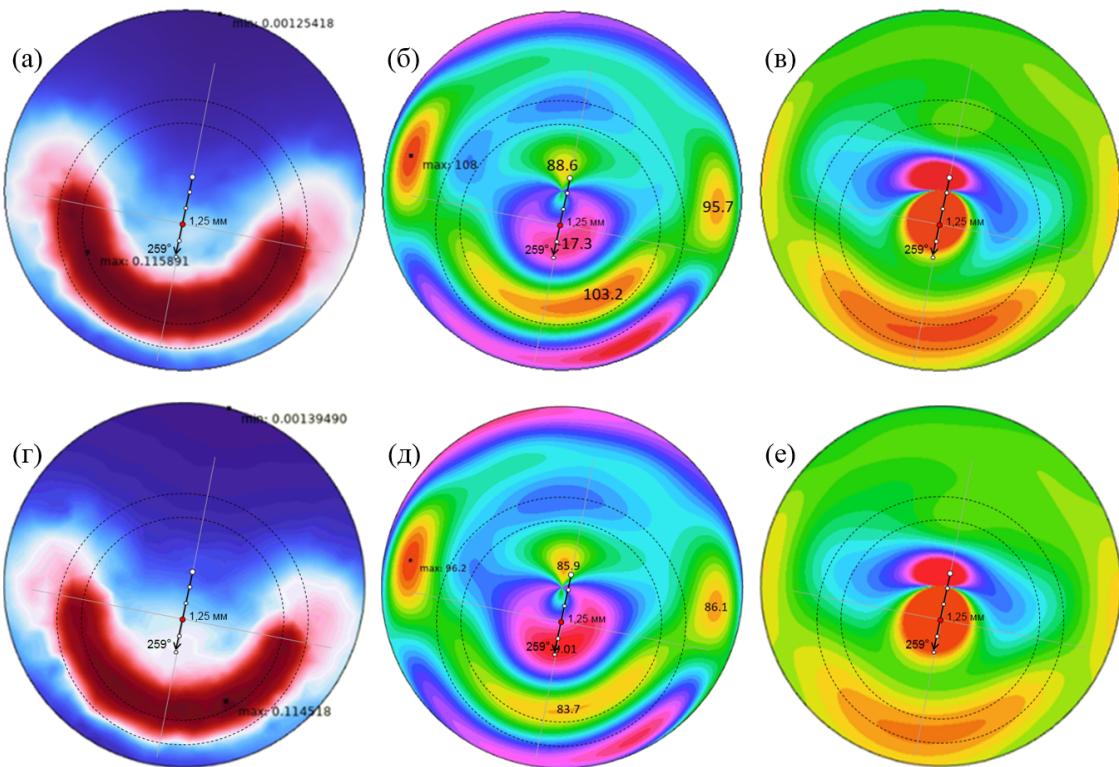


Рис. 11. Расчетные варианты результатов операции (пациент К.) при имплантации ИСС толщиной 250 мкм (а–в) и 200 мкм (г–е) при первоначальном и уточненном прогнозе соответственно: а, г — интенсивность деформаций передней поверхности; б, д — тангенциальная кривизна передней поверхности; в, е — сагиттальная кривизна передней поверхности

4.2. Постоперационный анализ. С учетом полученных результатов пациенту было проведено хирургическое лечение кератоконуса левого глаза — интрапулмлярная кератопластика с фемтосекундным лазерным сопровождением с имплантацией ИСС.

На следующие сутки после операции проведено инструментальное обследование пациента К., включающее кератотопографическое исследование с помощью Шаймпфлюг-анализатора переднего отрезка глазного яблока Pentacam AXL, биомеханические свойства роговицы — с помощью пневмотонометра Corvis ST, оптическую когерентную томографию роговицы с помощью ОКТ Solix (рис. 12).

Полученные клинические данные пациента сопоставляются с результатами цифрового прогноза и планирования операции на базе персонализированной компьютерной модели роговицы.

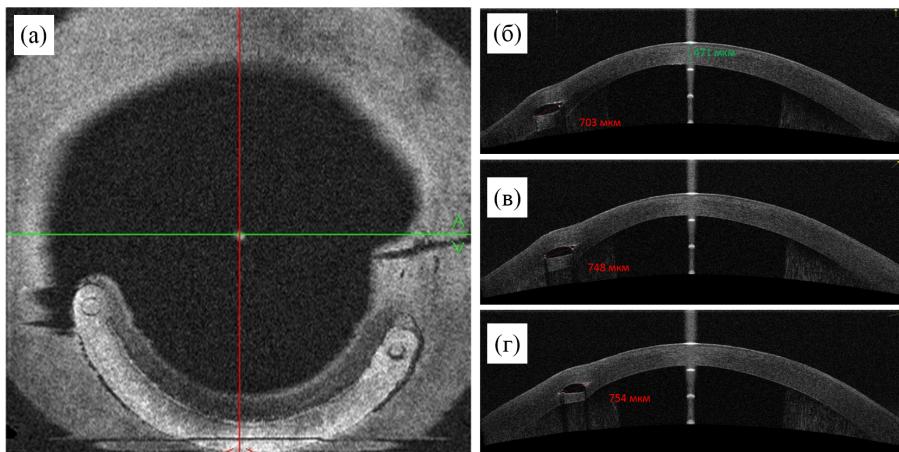


Рис. 12. ОКТ роговицы после имплантации интрастромального сегмента: а — режим Corneal Cub; б–г — режим Corneal Map

На рис. 13 приводятся экспериментальные и расчетные карты тангенциальной и сагиттальной кривизны передней поверхности роговицы левого глаза пациента К. на первый день после операции имплантации ИСС.

Расчетные картины на рис. 13 построены для ИСС с длиной дуги 160° и толщиной 200 мкм, установленного на глубине 370 мкм в модельном положении (смещение от центра зрачка на 1,25 мм, положение сегмента 259°). Как видим, спрогнозированные кератотопографические картины дают достаточно достоверные описания основных трансформаций роговицы после операции, качественно согласующиеся с реальными клиническими данными постоперационного обследования.

Наложение расчетных сечений цифровой модели роговицы на снимки ОКТ, показанные на рис. 14, наглядно иллюстрирует степень количественного отклонения данных предоперационного прогноза от реальных профилей роговицы. Максимальное их рассогласование составляет около 20 % от толщины (рис. 14).

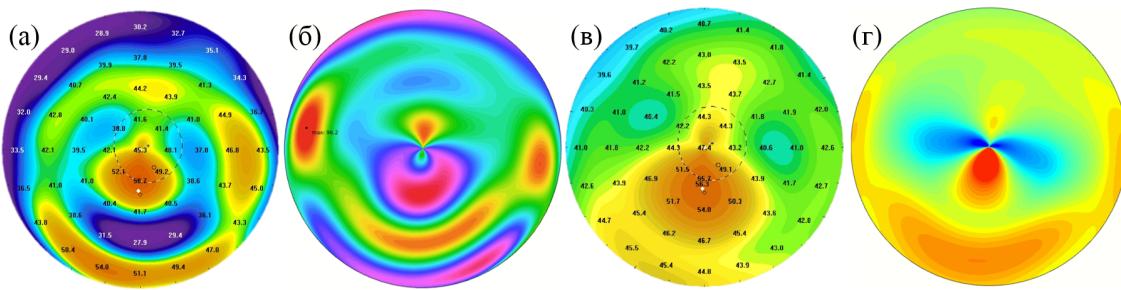


Рис. 13. Сопоставление карт тангенциальной (а, б) и сагиттальной (в, г) кривизны по данным Pentacam AXL (а, в) и по результатам математического моделирования (б, г)

При этом следует отметить, что фактические параметры операции (глубина имплантации, размеры и положение внутрироговичного тоннеля, а также положение сегмента в нем) могут заметно отличаться от соответствующих параметров при цифровом прогнозе. Кроме того, в послеоперационный период в роговице продолжаются динамические изменения, связанные с восстановлением тканей после операции, регенерацией и перераспределением эпителия, заживлением и ремоделированием стромы и т.д. Указанные различия могут являться источником погрешности расчетных данных при прогнозе.

Анализ полученных результатов с учетом этих обстоятельств подтверждает эффективность и перспективность практического применения цифрового компьютерного прогнозирования и планирования операций имплантации ИСС.

5. Заключение. Разработана и апробирована трехмерная модель роговицы с кератоконусом в ходе имплантации ИСС. При этом в единый комплекс объединены несколько частных подмоделей, позволяющих учесть важные особенности хирургического воздействия на роговицу: модель аппланации роговицы при изготовлении внутрироговичного канала, модель контактного взаимодействия сегмента со стенками внутрироговичного канала, модель декогезии (расслоения) ткани роговицы при внедрении импланта.

Разработана методика цифрового планирования операции интракоронарной кератопластики с имплантацией ИСС, состоящая в анализе различных вариантов их расположения и размеров, полученных из серии вычислительных экспериментов. Для выбора варианта рассчитываются кератометрические показатели роговицы после операции.

Проведена апробация указанной методики на клиническом примере пациента с кератоконусом III степени. Послеоперационное клиническое обследование пациента подтвердило эффективность выбранного варианта операции. Максимальный уровень отклонения результатов предоперационного прогноза основных топографических параметров роговицы от их экспериментальных значений составляет около 15–20%.

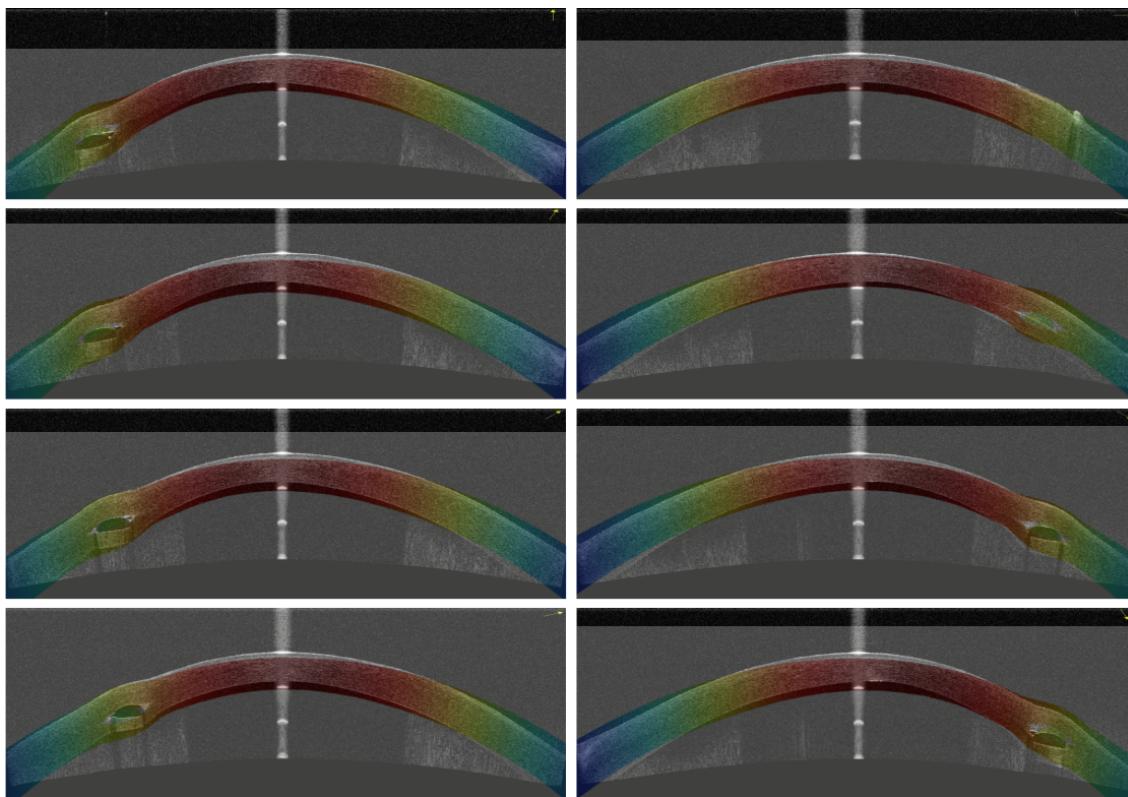


Рис. 14. Сопоставление профилей роговицы по данным постоперационного анализа (цветные карты) с результатами ОКТ (черно-белые карты) через 3 минуты после операции

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (№ 25-25-00303, <https://rscf.ru/project/25-25-00303/>).

ДОПОЛНИТЕЛЬНО

Вклад авторов. И. Н. Захаров: разработка модели, написание текста, согласование финальной версии; Е. Г. Солодкова, С. В. Балалин: клинические исследования, редактирование текста; В. Х. Лэ: обзор литературы, расчеты; Е. В. Лобанов: клиническая диагностика, верификация результатов.

Конфликт интересов. Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

Источник финансирования. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (№ 25-25-00303, <https://rscf.ru/project/25-25-00303/>).

ADDITIONAL INFORMATION

Authors' contribution. I. N. Zakharov: model development, manuscript writing, final version approval; E. G. Solodkova, S. V. Balalin: clinical studies, manuscript editing; V. Kh. Le: literature review, calculations; E. V. Lobanov: clinical diagnostics, result verification.

Competing interests. The authors declare that they have no competing interests.

Funding. This study was supported by a grant from the Russian Science Foundation (No. 25-25-00303, <https://rscf.ru/project/25-25-00303/>).

ЛИТЕРАТУРА

1. Correcting keratoconus with intracorneal rings / J. Colin [et al.] // J. Cataract Refract. Surg. – 2000. – Vol. 26. – P. 1117–1122. – DOI: 10.1016/S0886-3350(00)00451-X.
2. Refractive surgical correction and treatment of keratoconus / F. D’Oria, S. A. Bagaglia, J. L. Alio del Barrio, [et al.] // Surv. Ophthalmol. – 2023. – Vol. 69. – P. 122–139. – DOI: 10.1016/j.survophthal.2023.09.005.
3. A novel Q-value-based nomogram for single intracorneal ring segment implantation versus standard manufacturer’s nomogram combined with accelerated cross-linking for treatment of keratoconus: a randomized controlled trial / M. Iqbal, A. Elmassry, A. Mounir, [et al.] // Acta Ophthalmol. – 2021. – Vol. 99. – e501–e511. – DOI: 10.1111/aos.14611.
4. Терещенко В. А., Демьянченко С. К., Вишнякова Е. Н. Применение цифрового разметочного устройства при проведении фемтолазерной интрастромальной кератопластики с имплантацией интрастромальных сегментов // Сибирский научный медицинский журнал. – 2019. – № 3. – С. 60–65. – DOI: 10.15372/SSMJ20190309. – EDN: UEYXLK.
5. Мороз З. И., Гурбанов Р. С. Осложнения интрастромальной кератопластики // Офтальмология. – 2014. – 1 (14). – С. 84–89. – EDN: XYJRJJ.
6. Pinsky P. M., Datye D. V., Silvestrini T. A. Numerical-simulation of topographical alterations in the cornea after ICR (intrastromal corneal ring) placement // Invest. Ophthalmol. Vis. Sci. – 1995. – Vol. 36, no. 4. – S309.
7. Kling S., Marcos S. Finite-element modeling of intrastromal ring segment implantation into a hyperelastic cornea // Invest. Ophthalmol. Vis. Sci. – 2013. – Vol. 54, no. 1. – P. 881–889. – DOI: 10.1167/iovs.12-10852.
8. Daxer A. Biomechanics of corneal ring implants // Cornea. – 2015. – Vol. 34, no. 11. – P. 1493–1498. – DOI: 10.1097/ICO.0000000000000591.
9. Patient-specific simulation of the intrastromal ring segment implantation in corneas with keratoconus / M. A. Lago, M. J. Rupérez, C. Monserrat, [et al.] // J. Mech. Behav. Biomed. Mater. – 2015. – Vol. 51. – P. 260–268. – DOI: 10.1016/j.jmbbm.2015.07.023.
10. Khan S. N., Shiakolas P. S. To study the effects of intrastromal corneal ring geometry and surgical conditions on the postsurgical outcomes through finite element analysis // J. Mech. Med. Biol. – 2016. – Vol. 16, no. 7. – P. 1650101. – DOI: 10.1142/S0219519416501013.
11. Mechanical-mathematical model of intrastromal shape correction of the cornea in keratoconus / I. S. Nikitin, A. B. Zhuravlev, N. G. Iroshnikov, [et al.] // Russian Journal of Biomechanics. – 2017. – Vol. 21, no. 4. – P. 403–416. – DOI: 10.15593/RZhBiomeh/2017.4.07. – EDN: YMCSJP.
12. Corneal biomechanics after intrastromal ring surgery: Optomechanical *in silico* assessment / M. Á. Ariza-Gracia [et al.] // Transl. Vis. Sci. Technol. – 2020. – Vol. 9, no. 11. – P. 26. – DOI: 10.1167/tvst.9.11.26.

13. Бауэр С. М., Венатовская Л. А., Воронкова Е. Б. Модели механики твердого тела в приложении к офтальмологии // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Астрономия. – 2023. – Т. 10, № 4. – С. 686–712. – DOI: 10.21638/spbu01.2023.407. – EDN: UJNCGP.
14. Bagheri N. M., Mosaddegh P., Kadkhodaei M. Effects of intracorneal ring segments on the biomechanical response of the ectatic cornea to air-puff: A patient-specific numerical analysis // Math. Mech. Solids. – 2022. – Vol. 27, no. 3. – P. 390–409. – DOI: 10.1177/10812865211025581.
15. Localized refractive changes induced by symmetric and progressive asymmetric intracorneal ring segments assessed with a 3D finite-element model / G. G. de Oteyza [et al.] // Bioengineering. – 2023. – Vol. 10. – P. 1014. – DOI: 10.3390/bioengineering10091014.
16. Разработка комплекса математических моделей биомеханических параметров роговицы с диагностированным кератоконусом до и после лечения с помощью кросс-линкинга коллагена роговицы / Е. Г. Солодкова, Б. Е. Малогин, И. Н. Захаров [и др.] // Российский журнал биомеханики. – 2022. – Т. 26, № 3. – С. 10–28. – DOI: 10.15593/RZhBiomech/2022.3.01. – EDN: HCQFDP.
17. Идентификация параметров модели роговицы с кератоконусом в терминах численно-экспериментального исследования геометрии и механического поведения роговицы / Е. Г. Солодкова, Б. Е. Малогин, И. Н. Захаров [и др.] // Российский журнал биомеханики. – 2023. – Т. 27, № 3. – С. 53–64. – DOI: 10.15593/rjbiomech/2023.3.05. – EDN: УМКАТJ.
18. COMSOL AB. Structural Mechanics Module — Large Strain Viscoelasticity. – (Visited on 06/25/2025) ; Online documentation. https://doc.comsol.com/5.6/docserver/\#!com.comsol.help.sme/sme_ug_theory.06.27.html.

REFERENCES

1. Correcting keratoconus with intracorneal rings / J. Colin [et al.] // J. Cataract Refract. Surg. – 2000. – Vol. 26. – P. 1117–1122. – DOI: 10.1016/S0886-3350(00)00451-X.
2. Refractive surgical correction and treatment of keratoconus / F. D’Oria, S. A. Bagaglia, J. L. Alio del Barrio, [et al.] // Surv. Ophthalmol. – 2023. – Vol. 69. – P. 122–139. – DOI: 10.1016/j.survophthal.2023.09.005.
3. A novel Q-value-based nomogram for single intracorneal ring segment implantation versus standard manufacturer’s nomogram combined with accelerated cross-linking for treatment of keratoconus: a randomized controlled trial / M. Iqbal, A. Elmassry, A. Mounir, [et al.] // Acta Ophthalmol. – 2021. – Vol. 99. – e501–e511. – DOI: 10.1111/aos.14611.
4. Tereshchenko V. A., Dem'yanchenko S. K., Vishnyakova E. N. Application of a digital marking device in femtosecond laser-assisted intrastromal keratoplasty with implantation of intrastromal segments // Siberian Scientific Medical Journal. – 2019. – No. 3. – P. 60–65. – DOI: 10.15372/SSMJ20190309. – EDN: UEYXLK.
5. Moroz Z. I., Gurbanov R. S. Complications of intrastromal keratoplasty // Ophthalmology. – 2014. – 1 (14). – P. 84–89. – EDN: XYJRJJ.
6. Pinsky P. M., Datye D. V., Silvestrini T. A. Numerical-simulation of topographical alterations in the cornea after ICR (intrastromal corneal ring) placement // Invest. Ophthalmol. Vis. Sci. – 1995. – Vol. 36, no. 4. – S309.

7. *Kling S., Marcos S.* Finite-element modeling of intrastromal ring segment implantation into a hyperelastic cornea // Invest. Ophthalmol. Vis. Sci. – 2013. – Vol. 54, no. 1. – P. 881–889. – DOI: 10.1167/iovs.12-10852.
8. *Dixer A.* Biomechanics of corneal ring implants // Cornea. – 2015. – Vol. 34, no. 11. – P. 1493–1498. – DOI: 10.1097/ICO.0000000000000591.
9. Patient-specific simulation of the intrastromal ring segment implantation in corneas with keratoconus / M. A. Lago, M. J. Rupérez, C. Monserrat, [et al.] // J. Mech. Behav. Biomed. Mater. – 2015. – Vol. 51. – P. 260–268. – DOI: 10.1016/j.jmbm.2015.07.023.
10. *Khan S. N., Shiakolas P. S.* To study the effects of intrastromal corneal ring geometry and surgical conditions on the postsurgical outcomes through finite element analysis // J. Mech. Med. Biol. – 2016. – Vol. 16, no. 7. – P. 1650101. – DOI: 10.1142/S0219519416501013.
11. Mechanical-mathematical model of intrastromal shape correction of the cornea in keratoconus / I. S. Nikitin, A. B. Zhuravlev, N. G. Iroshnikov, [et al.] // Russian Journal of Biomechanics. – 2017. – Vol. 21, no. 4. – P. 403–416. – DOI: 10.15593/RZhBiomeh/2017.4.07. – EDN: YMCSJP.
12. Corneal biomechanics after intrastromal ring surgery: Optomechanical *in silico* assessment / M. Á. Ariza-Gracia [et al.] // Trans. Vis. Sci. Tech. – 2020. – Vol. 9, no. 11. – P. 26. – DOI: 10.1167/tvst.9.11.26.
13. *Bauer S. M., Venatovskaya L. A., Voronkova E. B.* Solid mechanics models in application to ophthalmology // Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy. – 2023. – Vol. 10, no. 4. – P. 686–712. – DOI: 10.21638/spbu01.2023.407. – EDN: UJNCGP.
14. *Bagheri N. M., Mosaddegh P., Kadkhodaei M.* Effects of intracorneal ring segments on the biomechanical response of the ectatic cornea to air-puff: A patient-specific numerical analysis // Mathematics and Mechanics of Solids. – 2022. – Vol. 27, no. 3. – P. 390–409. – DOI: 10.1177/10812865211025581.
15. Localized Refractive Changes Induced by Symmetric and Progressive Asymmetric Intracorneal Ring Segments Assessed with a 3D Finite-Element Model / G. G. de Oteyza [et al.] // Bioengineering. – 2023. – Vol. 10. – P. 1014. – DOI: 10.3390/bioengineering10091014.
16. Development of a complex of mathematical models of the cornea biomechanical parameters with diagnosed keratoconus before and after treatment with corneal collagen crosslinking / E. G. Solodkova, B. E. Malyugin, I. N. Zakharov, [et al.] // Russian Journal of Biomechanics. – 2022. – Vol. 26, no. 3. – P. 10–28. – DOI: 10.15593/RZhBiomeh/2022.3.01. – EDN: HCQFDP.
17. Identification of the model parameters in cornea with keratoconus in terms of the numerical-experimental study of corneal geometry and mechanical behavior / E. G. Solodkova, B. E. Malyugin, I. N. Zakharov, [et al.] // Russian Journal of Biomechanics. – 2023. – Vol. 27, no. 3. – P. 53–64. – DOI: 10.15593/rjbiomech/2023.3.05. – EDN: UMKATJ.
18. *COMSOL AB.* Structural Mechanics Module — Large Strain Viscoelasticity. – (Visited on 06/25/2025) ; Online documentation. https://doc.comsol.com/5.6/docserver/\#!com.comsol.help.sme/sme_ug_theory.06.27.html.