

С. М. Бауэр, Л. А. Венатовская, Д. В. Матченко

## ПРИМЕНЕНИЕ ГИПЕРУПРУГИХ МОДЕЛЕЙ ДЛЯ АНАЛИЗА ДЕФОРМАЦИЙ ГЛАЗА

*Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия*

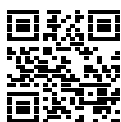
**Аннотация.** Рассмотрены две задачи биомеханики глаза: операция по коррекции миопии за счет имплантации кольца MyoRing и изменение внутриглазного давления при интравитреальных инъекциях. Выполнено конечно-элементное моделирование внешней оболочки глаза, находящейся под действием внутриглазного давления, в программном пакете ANSYS. Роговица глаза задается сферическим сегментом меньшего радиуса переменной толщины. Для описания ее нелинейных свойств используются гиперупругие модели материалов (модель Йео, неогуксовская и 2-параметрическая модель Муни-Ривлина). Проводится сравнение с моделями в которых роговица описывается трансверсально-изотропной биологической тканью. В первом случае решается нелинейная задача об изменении напряженно-деформированного состояния глаза при наличии упругой вставки в роговице. Процесс имплантации кольца описывается контактными парами методом последовательного приложения нагрузки. Расчеты показали, что при имплантации кольца MyoRing роговица испытывает большие деформации сдвига, и получить результаты, соответствующие клиническим данным удастся только с использованием моделей гиперупругих материалов. Причем достаточно точное решение задачи получается при использовании неогуксовского материала, потенциал которого зависит только от одного параметра. Во второй задаче для двух различных моделей материала роговицы (трансверсально-изотропной и гиперупругой) анализируется изменение внутриглазного давления глаза при интравитреальных инъекциях. Проводится сравнение трех моделей: без разделительных перегородок, с одной и с двумя перегородками. На основе расчетов выполнена оценка уровня давления в камерах глазного яблока в зависимости от объема вводимого препарата и конфигурации перегородок. Расчеты показали близкие результаты для трансверсально-изотропной и гиперупругой моделей роговицы. Следовательно, усложнение в моделировании, связанное с описанием свойств роговицы, представляется необоснованным.

**Ключевые слова:** гиперупругие модели материалов, контактные задачи, имплантация MyoRing, интравитреальные инъекции

**Бауэр Светлана Михайловна**, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой теоретической и прикладной механики; e-mail: s.bauer@spbu.ru; <https://orcid.org/0000-0003-3732-2110>; AuthorID: 6610

**Венатовская Людмила Александровна**, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической и прикладной механики; e-mail: l.venatovskaya@spbu.ru; <https://orcid.org/0000-0002-0813-3727>; AuthorID: 742317

**Матченко Дмитрий Владимирович**, студент математико-механического факультета; e-mail: dmitriy.matchenko@yahoo.com; <https://orcid.org/0009-0006-2638-2977>; AuthorID: 1308371



для цитирования: Бауэр С. М., Венатовская Л. А., Матченко Д. В. Применение гиперупругих моделей для анализа деформаций глаза // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2025. № 2(64). С. 246–261. DOI: 10.37972/chgpu.2025.64.2.014. EDN: MEMRWF

Статья опубликована на условиях лицензии *Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)*.

S. M. Bauer, L. A. Venatovskaya, D. V. Matchenko

## APPLICATION OF HYPERELASTIC MODELS FOR ANALYZING EYE DEFORMATION

*Saint Petersburg State University, Saint Petersburg, Russia*

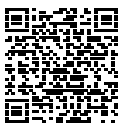
**Abstract.** This study addresses two problems in eye biomechanics: myopia correction surgery through MyoRing implantation and changes in intraocular pressure during intravitreal injections. Finite element modeling of the outer eye shell under intraocular pressure was performed using the ANSYS software package. The cornea is defined as a spherical segment with a smaller radius and variable thickness. To describe its nonlinear properties, hyperelastic material models were used (Yeoh model, Neo-Hookean model, and two-parameter Mooney-Rivlin model). A comparison is made with models where the cornea is modeled as a transversely isotropic biological tissue. In the first case, the nonlinear problem of changes in the eye's stress-strain state with an elastic insert in the cornea is solved. The ring implantation process is simulated using contact pairs and a sequential load application method. The calculations showed that during MyoRing implantation, the cornea experiences significant shear deformations. Results consistent with clinical data were only achieved using hyperelastic material models. Moreover, a sufficiently accurate solution was obtained using the Neo-Hookean material, whose potential depends on just one parameter. In the second task, for two different corneal material models (transversely isotropic and hyperelastic), the change in intraocular pressure during intravitreal injections is analyzed. A comparison of three models is conducted: without septa, with one septum, and with two septa. Based on the calculations, the pressure levels in the eye chambers were evaluated depending on the volume of the injected drug and the septum configuration. The calculations showed close results for the transversely isotropic and hyperelastic corneal models. Consequently, the added complexity in modeling associated with describing the hyperelastic properties of the cornea appears to be unjustified.

**Keywords:** Hyperelastic material models, contact analysis, MyoRing implantation, intravitreal injections

**Svetlana M. Bauer**, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Head of the Department of Theoretical and Applied Mechanics; e-mail: s.bauer@spbu.ru; <https://orcid.org/0000-0003-3732-2110>; AuthorID: 6610

**Lyudmila A. Venatovskaya** Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor; e-mail: l.venatovskaya@spbu.ru; <https://orcid.org/0000-0002-0813-3727>; AuthorID: 742317

**Dmitriy V. Matchenko** Student; e-mail: dmitriy.matchenko@yahoo.com; <https://orcid.org/0009-0006-2638-2977>; AuthorID: 1308371



**to cite this article:** Bauer S. M., Venatovskaya L. A., Matchenko D. V. Application of Hyperelastic Models for Analyzing Eye Deformation // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2025. No 2(64). p. 246–261. DOI: 10.37972/chgpu.2025.64.2.014

*This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)*

**Введение.** Роговица (роговая оболочка) и склера представляют собой два сопряженных сферических сегмента с различными радиусами кривизны и образуют единую фиброзную оболочку капсулы глаза. Их механические свойства играют решающую роль в поддержании внутренних структур глаза. Изучению этих свойств в норме и при некоторых патологических состояниях посвящено большое число работ [1]–[2]. Определение механических параметров роговицы дает большой разброс показателей [3, 4]. Это связано и с различными условиями эксперимента, и с тем обстоятельством, что исследования осложняются нелинейностью, анизотропией и пространственной неоднородностью упругих характеристик [3, 5].

Большая часть работ, изучающих механические свойства роговицы, посвящена исследованиям, выполненным *in vitro* (на мертвых тканях) [5, 6]. Но, надо отметить, что результаты механических испытаний образцов изолированной роговицы не могут полностью соответствовать реальным характеристикам этой ткани в естественных условиях. Безусловно, наиболее информативные сведения о биомеханическом статусе роговицы могут быть получены только в условиях живого глаза [7]. Перенос на живой глаз полученных *in vitro* результатов затруднителен, так как механические свойства тканей глаза очень индивидуальны. Невозможно заранее оценить всё множество параметров, характеризующих механические свойства глазных тканей. Как отмечается в [8], часто эффективным оказывается подход, при котором, отказавшись от избыточной детализации, строится математическая модель, параметры которой могут быть оценены в тестах, выполнимых в клинике. Иногда для описания свойств роговицы и склеры, используют трансверсально-изотропный материал, который характеризуется более низким модулем упругости в направлении своей толщины (в радиальном направлении), чем в продольном и поперечном [9]. Данное предположение использовалось во многих работах по моделированию в биомеханике глаза [10], и в ряде случаев (например, в задачах, связанных с тонометрией) получены результаты, соответствующие клиническим данным. Однако в последнее время для более точного описания нелинейных свойств биологических тканей, в том числе роговицы глаза, стали применять гиперупругие модели [11, 12].

В настоящей работе представлены две задачи, в которых роговица задается гиперупругими материалами: изменение напряженно-деформированного состояния оболочки глаза после операций по коррекции зрения с использованием колец-имплантатов MyoRing, и изменение внутриглазного давления при введении инъекций в стекловидное тело (интравитреальные инъекции). Проводится сравнение полученных результатов с более ранними моделями, в которых роговица полагалась трансверсально-изотропной, и с клиническими данными.

**1. Имплантация кольцевой вставки.** Миопия, или близорукость является наиболее распространенной аномалией рефракции. Лазерная коррекция зрения обеспечивает эффективное лечение миопии путём удаления ткани для

изменения формы роговицы. Однако, в сложных случаях миопии (очень тонкая роговица или высокая степень миопии, неровная поверхность роговицы и т. д.) лазерная рефракционная хирургия не подходит из-за повышенного риска послеоперационных осложнений или регресса миопии со временем [13]. В таких случаях для лечения используют имплантацию колец (Intrastromal Corneal Ring Segments, ICRS), которые позволяют изменить форму роговицы и улучшить ее механические свойства. MyoRing — это замкнутое кольцо, которое размещается на некоторой глубине от исходной толщины роговицы под ее поверхностью. Благодаря своим свойствам, MyoRing способствует приданию роговице нужной, более плоской формы. Кольцо, не препятствует процессам обмена веществ, его задача — усилить механические свойства роговичной ткани, создавая дополнительный биомеханический каркас. Оно устанавливается для постоянного ношения.

Технология имплантации колец MyoRing состоит из двух основных этапов. На первом этапе формируется роговичный карман. Изначально использовался микрокератом PocketMaker, в настоящее время роговичный карман формируется фемтосекундным лазером. Фемтосекундный лазер создает в роговице идеальную круговую полость, состоящую из крошечных кавитационных пузырьков. Таким образом, офтальмологи могут проводить срезы внутри роговицы с высочайшей точностью по глубине воздействия и по диаметру. На втором этапе мягкий кольцевой имплантат вводится в роговичный карман через тоннельный микроразрез. Тоннельный разрез заживает самостоятельно и не требует наложения швов.

В работе [14] была использована двухсегментная модель глазного яблока для оценки влияния различных хирургических и биомеханических параметров на механическое поведение роговицы после имплантации MyoRing. Для описания биологических тканей роговицы и склеры использовался трансверсально-изотропный материал. Работа [14] была выполнена совместно с офтальмологами из Чебоксарского филиала МНТК «Микрохирургия глаза». Результаты расчетов позволили получить качественную оценку влияния параметров кольца и глубины его погружения на изменение радиуса кривизны роговицы, но порядок деформаций был значительно меньше, чем в клинической практике.

Как отмечается в [14], имелись клинические данные, описывающие результаты более 600 операций с использованием кольца MyoRing. Для изучения взаимосвязи между изменением радиуса кривизны вершины до и после операции и хирургическими параметрами (толщиной кольца и глубиной имплантации) использовался статистический анализ (пакет SPSS28.0). Регрессионный анализ показал, что результаты операции можно с высокой точностью прогнозировать на основе статистически значимой зависимости:

$R_{new} = R_1 + 0.005 \times h + 0.001 \times C$ , где  $h$  — высота имплантированного кольца (в  $\mu m$ ),  $C$  — глубина его размещения в роговице (в  $\mu m$ ),  $R_1$  — начальный радиус кривизны роговицы.

Имеющиеся клинические данные использовались для определения констант в гиперупругих моделях.

В настоящем исследовании мы использовали двухпараметрическую модель Муни-Ривлина, модель Ёео и неогуксовскую модель для оценки влияния нелинейных свойств роговицы на изменение профиля роговицы после операции. В нашем исследовании склера остается трансверсально-изотропной тканью.

Поведение гиперупругих материалов описывается нелинейными законами связи напряжение-деформация. В этом случае взаимосвязь между напряжениями и деформациями задается с помощью потенциала энергии деформаций [15]. Модель Муни-Ривлина с двумя параметрами описывается потенциалом энергии деформации следующего вида:

$$W = C_{10}(\bar{I}_1 - 3) + C_{01}(\bar{I}_2 - 3) + \frac{1}{d}(J - 1)^2,$$

где  $\bar{I}_1, \bar{I}_2$  — первый и второй инвариант девиатора деформации,  $C_{10}, C_{01}$  — материальные константы, характеризующие девиаторную деформацию материала,  $d$  — параметр несжимаемости материала,  $J$  — определитель градиента упругой деформации. Начальный модуль сдвига определяется как  $\mu = 2(C_{10} + C_{01})$ , а начальный модуль объёмного сжатия задаётся выражением:  $K = 2/d$ .

При  $C_{01} = 0$ , модель Муни-Ривлина сводится к неогуксовскому гиперупругому материалу. В этом случае  $C_{10} = \mu/2$ .

Потенциал энергии деформации для модели Ёео задаётся выражением:

$$W = \sum_{i=1}^N C_{i0}(\bar{I}_1 - 3)^i + \sum_{k=1}^N \frac{1}{d_k}(J - 1)^{2k},$$

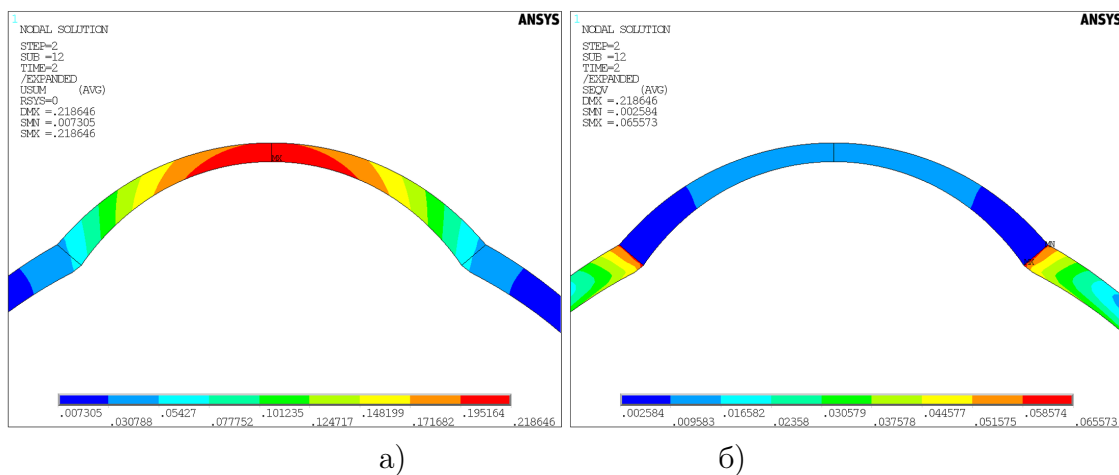
где  $N$  — количество членов в ряду, обычно  $N = 3$ . Начальные значения модуля объёмного сжатия  $K$  и модуля сдвига  $\mu$  определяются как:  $K = 2/d$  и  $\mu = 2C_{10}$ .

В настоящее время константы для гиперупругих моделей определяются экспериментально и сильно варьируются при больших нагрузках (при давлениях более 15 мм рт. ст.). В данной работе коэффициенты  $C_{10}$ ,  $C_{01}$  и  $d$  были подобраны таким образом, чтобы деформационные характеристики моделей, в которых роговица задается трансверсально-изотропным материалом и гиперупругим материалом Муни-Ривлина с двумя параметрами совпадали при изменении внутриглазного давления от 1 мм рт. ст. до 15 мм рт. ст. Важно было подобрать такие значения констант для гиперупругих материалов, при которых изменение радиуса кривизны роговицы при коррекции кольцом MyoRing соответствовало бы клиническим данным. Исходя из того, что среднее значение для модуля упругости роговицы на поверхности изотропии составляет  $E_c = 0.3$  МПа, а коэффициент Пуассона  $\nu = 0.49$ , мы получаем, что среднее значение модуля сдвига будет  $\mu \approx 0.1$  МПа. Проведена серия расчетов и наиболее близкие результаты были получены для констант, удвоенная сумма которых равна модулю сдвига  $2(C_{10} + C_{01}) = \mu$ , здесь  $\mu$  определяется из трансверсально-изотропной модели

роговицы. Для неогуковского материала и модели Йео основной коэффициент  $C_{10} = \mu/2$ , остальные константы в модели Йео варьировались.

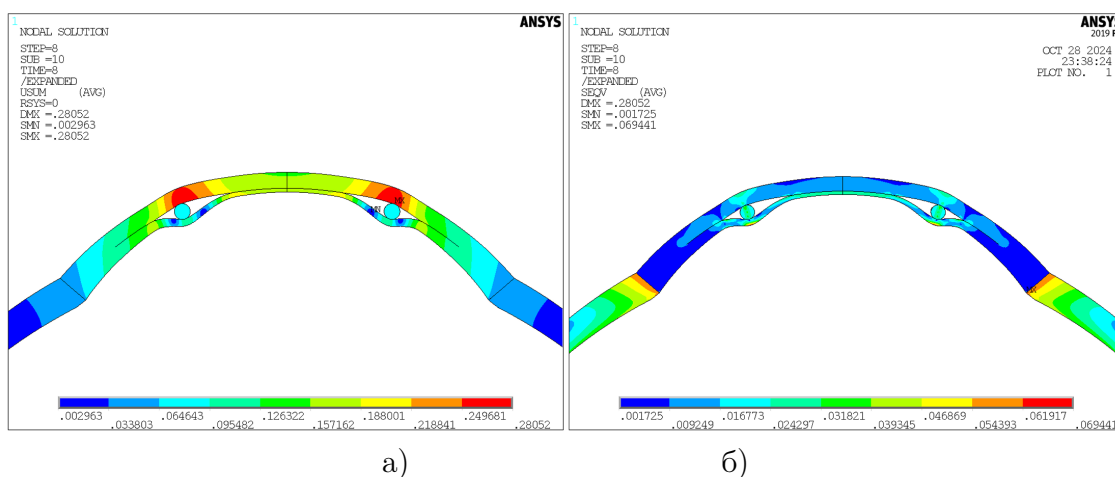
Как и ранее выполняется двумерное осесимметричное моделирование в программном комплексе ANSYS. Роговица и склера задаются двумя сферическими слоями переменной толщины, нагруженными внутриглазным физиологическим давлением  $p = 15$  мм рт. ст. Формирование роговичного кармана проводится путем разделения роговицы на два отдельных слоя. Процесс имплантации кольца моделируется тремя контактными парами типа «поверхность-поверхность». Первая контактная пара задаёт связь между слоями роговицы в результате образования роговичного кармана. Две другие пары имитируют контакт кольца с нижней и верхней поверхностями роговичного кармана. Роговица является контактной поверхностью (target), а жесткое кольцо – целевой (contact). В контактных парах с кольцом устанавливается начальный геометрический зазор (gap). Таким образом, решается нелинейная задача при больших деформациях методом последовательного приложения нагрузки. На каждом шаге постепенно увеличивается внутреннее давление и уменьшается зазор между кольцом и роговицей до полной установки кольца в область кармана. После каждой серии расчетов измеряется радиус кривизны роговицы  $R_c$  в ответ на установку кольца MyoRing.

Для обеспечения сходимости результатов моделирования в области контакта был проведён анализ независимости сетки. Путём её последовательного сгущения контролировались изменения деформаций и напряжений по Мизесу. Размер элементов уменьшался до момента, когда отклонение указанных величин не стало превышать 2%.

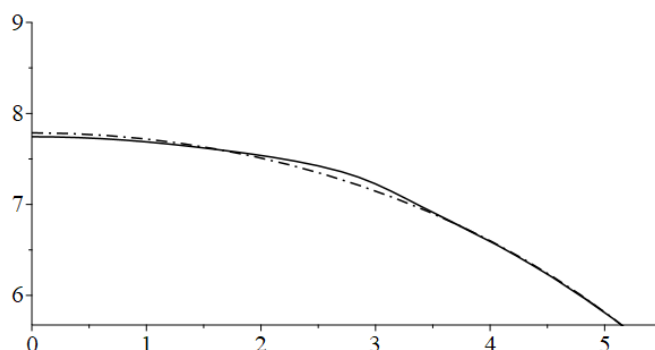


**Рис. 1.** Деформации (а) и напряжения по Мизесу (б) в роговице до установки кольца MyoRing

На рис. 1–3 представлены результаты расчетов для кольца радиуса  $r = 0.2$  мм и жесткостью  $E = 1800$  МПа. Показано распределение напряжений и деформаций до и после имплантации MyoRing для роговицы, материал которой задается двухпараметрической моделью Муни-Ривлина с параметрами  $C_{10} = 0.035$ ,  $C_{01} = 0.015$  и  $d = 1$ . Согласно расчетам наибольшие деформации происходят в зоне установки кольца, а центральная часть роговицы уплощается, что соответствует клиническим данным. Установка кольца большей высоты (радиуса поперечного сечения для круглого кольца) приводит к более выраженному изменению профиля роговицы, что подтверждает возможность коррекции больших рефракционных ошибок.



**Рис. 2.** Деформации (а) и напряжения по Мизесу (б) в роговице после установки кольца радиуса  $r = 0.2$  мм



**Рис. 3.** Профиль внешней поверхности роговицы до (пунктирная линия) и после установки кольца MyoRing радиуса  $r = 0.2$  мм (сплошная линия)



В таблице 1 представлены значения радиусов кривизны роговицы, рассчитанные по смещению вершины роговицы во время деформации в ответ на приложение давления 15 мм рт. ст. до и после операции. Для модели роговицы Муни-Ривлина приводятся значения констант  $C_{10}$  и  $C_{01}$ , удовлетворяющие условиям: их удвоенная сумма равна модулям сдвига  $\mu = 0.1$  МПа и  $\mu = 0.2$  МПа, а изменения радиуса кривизны наибольшие. Для неогукковского материала и модели Йео соответствующие константы  $C_{10}$  равны половине модуля сдвига  $\mu = 0.1$  МПа.

Модель материала роговицы	Константы материала	Радиус кривизны роговицы $R_c$ , мм	
		До коррекции	После коррекции
Модель Муни-Ривлина двухпараметрическая, модуль сдвига $\mu = 0.1$ МПа	$C_{01} = 0.028$ $C_{10} = 0.022$	7.35	8.71
	$C_{01} = 0.044$ $C_{10} = 0.006$	7.35	8.73
Модель Муни-Ривлина двухпараметрическая, модуль сдвига $\mu = 0.2$ МПа	$C_{01} = 0.06$ $C_{10} = 0.04$	7.55	10.09
Неогукковский материал, модуль сдвига $\mu = 0.1$ МПа	$C_{01} = 0.05$	7.35	8.74
Модель Йео, модуль сдвига $\mu = 0.1$ МПа	$C_{10} = 0.05$ $C_{20} = 1.0$ $C_{30} = 10.0$	6.31	10.14
	$C_{10} = 0.05$ $C_{20} = 0.5$ $C_{30} = 5.0$	7.38	9.64

**Таблица 1.** Изменение радиуса кривизны роговицы до и после коррекции кольцом MyoRing с радиусом поперечного сечения  $r = 0.2$  мм для различных гиперупругих моделей роговицы

Результаты численного моделирования показали, что использование гиперупругих моделей позволяет получить изменения радиуса кривизны роговицы, близкие к данным, наблюдаемым в клинической практике [26, 27]. Наибольшее изменение радиуса кривизны ( $\Delta R_c = 3.83$  мм) в ответ на установку кольцевой вставки получено при использовании модели Йео, за счет большего количества констант которые можно варьировать. Имплантация MyoRing приводит к значительному увеличению напряжений в самом кольце, что свидетельствует о его роли как дополнительного биомеханического каркаса для роговицы. Наибольшие напряжения наблюдаются в области контакта кольца с роговицей, что подтверждает эффективность метода для укрепления тонкой роговицы. Таким образом, в данной задаче, в которой роговица подвергается большим деформациям, хорошее соответствие аналитических результатов и клинических данных получается при использовании моделей гиперупругих материалов.

**2. Задача об итравитреальных инъекциях.** В настоящее время интравитреальные инъекции (ИВИ) являются широко используемым офтальмологами методом для лечения заболеваний глаз. В данном случае лекарственное средство (объем жидкости) вводится прямо в стекловидное тело глаза, что позволяет достичь высокой концентрации препарата в нужном месте, минимизируя побочные эффекты воздействия на организм. Введение жидкости в глаз может привести к кратковременному повышению внутриглазного давления (ВГД) и вызвать нежелательные побочные эффекты и осложнения, такие как внутриглазное кровотечение и отслоение сетчатки. Повышение ВГД является основным фактором риска развития глаукомы и истончения слоя нервных волокон сетчатки. Влияние вызванного ИВИ повышения ВГД на глаз до сих пор остается актуальной темой для исследования.

Роговица составляет только 10% фиброзной оболочки, и стекловидное тело не соприкасается с роговицей. В связи с этим в первых моделях, оценивающих изменение внутриглазного давления после введения дополнительного объема несжимаемой жидкости, исследовалась деформация склеры, что позволяло получить простые аналитические зависимости. Для трансверсально-изотропного слоя, моделирующего склеру, аналитическое решение задачи представлено в работе [10].

Однако, учитывая, что роговица является существенно более мягкой составляющей, чем склера и измерение внутриглазного давления происходит через роговицу, представляется важным провести более детальное исследование этого вопроса.

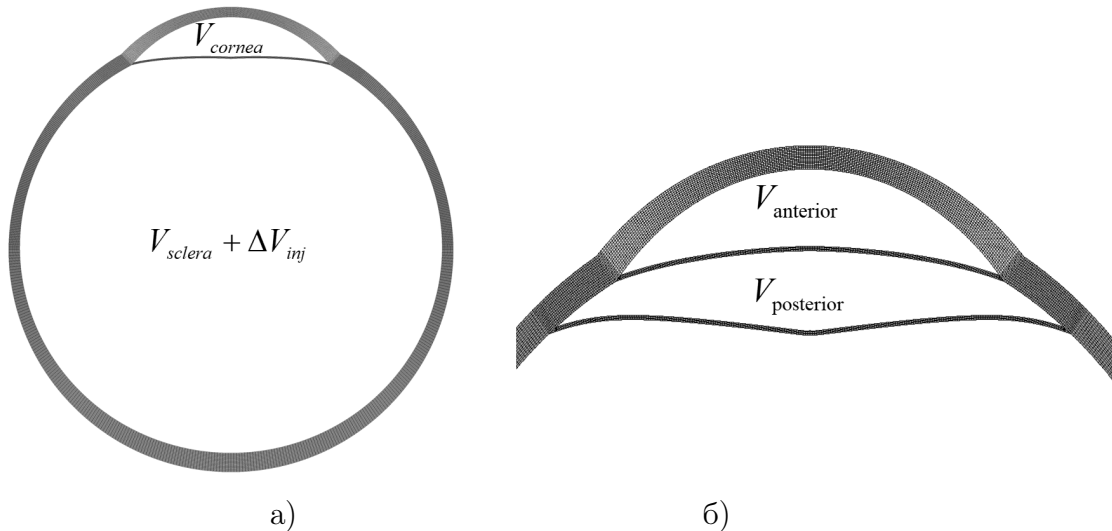
Известно, что глаз представляет собой гидростатическую систему, состоящую из нескольких камер: закрытых и полуоткрытых полостей, отделенных друг от друга эластичными мембранами. Каждая полость имеет свой уровень давления, который может несколько отличаться от давления в других частях глаза.

В работах офтальмологов [16] отмечается, что разница в давлении в разных частях глаза (за исключением кровеносных сосудов) невелика, и на практике ею можно пренебречь. Как отмечалось, при введении дополнительного объема жидкости в стекловидное тело в результате инъекции в первый момент времени происходит резкое увеличение давления. Важно понять, как наличие внутренних перегородок между камерами глаза и нелинейные свойства роговицы влияют на изменение давления внутри камер сразу после инъекций и можно ли пренебрегать внутренними элементами глаза при математическом моделировании. Данные результаты важны также для задач измерения внутриглазного давления разными тонометрами.

Численное решение задачи о напращенно-деформированном состоянии глаза, разделенного на два внутренних объема, при введении дополнительного объема жидкости представлено в работе [17]. Было получено, что для трансверсально-изотропной модели материала разница давлений в камерах составляет

1–2 мм рт. ст. Сравнение с аналитическим решением [10] показало, что упрощенные модели глаза, основанные на теории оболочек, могут давать удовлетворительные оценки, даже несмотря на то, что они не учитывают сложную внутреннюю структуру глазного яблока.

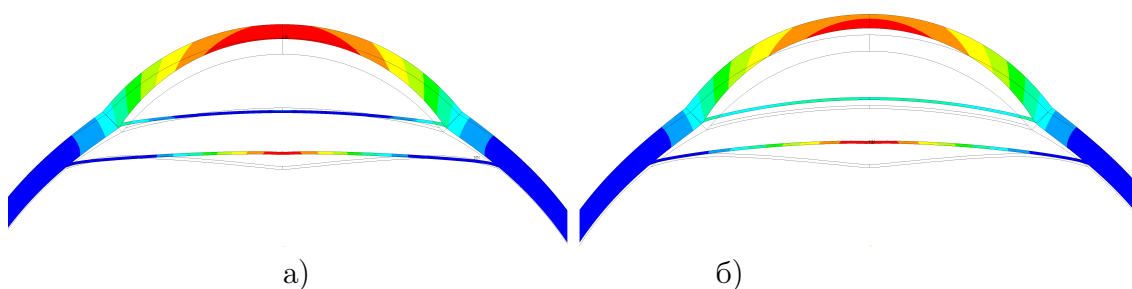
В настоящей работе выполняется конечно-элементное моделирование глазного яблока без, с одной и двумя разделительными перегородками (см. рис. 4). Анализируется влияние разных моделей роговицы на изменение объема в камерах глаза при итравитреальных инъекциях. Как в предыдущей задаче внешняя оболочка глаза представляется сопряженными сферическими сегментами. В первой, базовой, модели игнорируются все дополнительные компоненты внутри глаза и рассматривается композитная оболочка как полость, заполненная несжимаемой жидкостью с некоторым давлением  $p$ . Затем давление менялось таким образом, чтобы внутренний объем моделируемого глазного яблока увеличился на объем вводимого лекарственного средства.



**Рис. 4.** Модель глаза с одной (а) и двумя (б) разделительными перегородками

Во второй модели добавляется разделительная перегородка, разбивающая глаз на два объема: подроговичный  $V_{cornea}$  и склеральный  $V_{sclera}$ . Полагаем, что каждая камера находится под действием внутреннего физиологического давления  $p$ . Согласно протоколу ИВИ введение лекарственного средства происходит в стекловидное тело. Давления в камерах увеличивается последовательно таким образом, чтобы объем в склеральной камере увеличился на объем инъекции  $V_{sclera} + \Delta V_{inj}$ , а в роговичной камере остался без изменений  $V_{cornea} = \text{const}$ . Аналогично решается задача и для глаза с тремя камерами: склеральный объем увеличивается на объем инъекции, а в других двух камерах: передней  $V_{anterior}$  и задней  $V_{posterior}$  объемы остаются постоянными. Проводится оценка изменения давления в камерах в ответ на инъекции объемом 0.05 мл и 0.1 мл в стекловидное тело.

Был проведен ряд расчётов для определения давлений, устанавливающихся сразу после введения инъекции. Изначально оценивалось давление для моделей с однородным внутренним объемом и с двумя камерами. Модуль упругости роговицы полагался  $E_{cornea}=0.3$  МПа, для склеры модуль упругости варьировался от  $E_s=7$  МПа (более мягкая) до  $E_s=15$  МПа (наиболее жесткая). Модули упругости склеры в направлении нормали  $E'_s$  полагались в  $10\div 40$  раз меньше чем на поверхности изотропии. Коэффициенты Пуассона на поверхности изотропии  $\nu = 0.49$ , в перпендикулярном направлении  $\nu' = 0.01$ . Модуль сдвига на поверхности изотропии  $G = E/(2(1+\nu))$  и в нормальном направлении  $G' = G/2$ .



**Рис. 5.** Деформации в роговице после инъекции 0.05 мл (а) и 0.1 мл (б). Модуль упругости склеры  $E_s = 7$  МПа

Результаты, полученные для мягкой склеры, лучше соответствуют аналитическим результатам, полученным ранее в работе [10]. Все расчёты производились дважды: для трансверсально-изотропной и неогуковской моделей роговицы. В случае неогуковского материала константа  $C_{01}$  вычислялась как  $C_{01} = G/2$ , где  $G$  — модуль сдвига для трансверсально-изотропного материала с которым проводится сравнение. Аналогичные расчеты были проведены и для модели с тремя внутренними камерами. На рис. 5 показано деформированное состояние роговицы после инъекции объемом 0.05 мл и 0.01 мл для неогуковского материала роговицы. В табл. 2–4 представлены результаты для различных моделей материала роговицы.

Модель материала роговицы	Объем инъекции $\Delta V_{inj}$ , мл	Давление в камерах, мм рт. ст.	
		Передняя камера	Стекловидное тело
Трансверсально-изотропный	0.05	37.29	39.17
	0.1	57.3	63.97
Неогуковский	0.05	38.55	40.3
	0.1	58.85	65.0

**Таблица 2.** Модель с двумя камерами,  $E_s = 15$  МПа

Модель материала роговицы	Объем инъекции $\Delta V_{inj}$ , мл	Давление в камерах, мм рт. ст.	
		Передняя камера	Стекловидное тело
Трансверсально-изотропный	0.05	28.8	29.8
	0.1	41.72	44.74
Неогуковский	0.05	29.28	30.2
	0.1	42.26	45.08

Таблица 3. Модель с двумя камерами,  $E_s = 7$  МПа

Модель материала роговицы	Объем инъекции $\Delta V_{inj}$ , мл	Давление в камерах, мм рт. ст.		
		Передняя камера	Стекловидное тело	Задняя камера
Трансверсально-изотропная	0.05	28.68	29.9	29.72
	0.1	41.36	45.14	44.58
Неогуковская	0.05	29.18	30.3	30.125
	0.1	41.86	45.435	44.885

Таблица 4. Модель с тремя камерами,  $E_s = 7$  МПа

Из полученных данных видно, что давление в камерах слабо меняется при переходе от трансверсально-изотропной роговицы к неогуковской. В этом случае изменения давлений не превышают 0.5 мм рт. ст. Проведенные расчеты показали близкие результаты для трансверсально-изотропного и гиперупругой модели роговицы. В моделях с одной или двумя камерами разница в объемах составляет 1-2 мм рт. ст. для инъекций 0.05 мл и порядка 3-4 мм рт. ст. для инъекций 0.1 мл. Если рассматривать единый внутренний объем, то внутреннее давление возрастает до среднего значения, получаемого для моделей с несколькими камерами. Показано, что деформации глазного яблока, вызванные увеличением давления (при глаукоме или после внутриглазных инъекций), зависят в основном от растяжимости склеры.

**3. Выводы** Рассмотрены две задачи биомеханики глаза. В первой при имплантации кольца MyoRing роговица испытывает большие деформации сдвига, и получить результаты, соответствующие клиническим данным удастся только с использованием моделей гиперупругих материалов. Причем достаточно точное решение задачи получается при использовании неогуковского материала, потенциал которого зависит только от одного параметра. Во второй задаче усложнения в моделировании, связанное с описанием свойств роговицы, представляется необоснованным.

## ДОПОЛНИТЕЛЬНО

**Вклад авторов.** С. М. Бауэр постановка задачи, редактирование текста рукописи, обзор литературы по тексту статьи, согласование финальной версии рукописи, Л. А. Венатовская написание текста рукописи, обзор литературы по тексту статьи, моделирование, Д. В. Матченко написание программы оптимизации расчетов, проведение расчетов

**Конфликт интересов.** Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

**Источник финансирования.** Работа выполнена при финансовой поддержке Санкт-Петербургского государственного университета (проект 116636233).

## ADDITIONAL INFORMATION

**Authors' contribution.** S. M. Bauer problem statement, manuscript editing, literature review, final manuscript approval, L. A. Venatovskaya manuscript writing, literature review, modeling, D. V. Matchenko optimization algorithm development for calculations, computational analysis

**Competing interests.** The authors declare that they have no competing interests.

**Funding.** This study was financially supported by Saint Petersburg State University (Project No. 116636233).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Аветисов С., Воронин Г. Экспериментальное исследование механических характеристик роговицы после эксимерлазерной фотоабляции // Клини. офтальмология. – 2001. – № 3. – С. 83–86.
2. Elsheikh A., Alhasso D., Rama P. Assessment of the epithelium's contribution to corneal biomechanics // Exp. Eye Res. – 2008. – Vol. 86, no. 2. – P. 445–451. – DOI: 10.1016/j.exer.2007.12.002.
3. Buzard K. A. Introduction to biomechanics of the cornea // Refract. Corneal Surg. – 1992. – Vol. 8, no. 2. – P. 127–138.
4. Elsheikh A., Wang D., Pye D. Determination of the modulus of elasticity of the human cornea // J. Refract. Surg. – 2007. – Vol. 23, no. 8. – P. 808–818. – DOI: 10.3928/1081-597X-20071001-11.
5. Cogan D. G., Kinsey V. E. The cornea: V. Physiologic aspects // Arch. Ophth. – 1942. – Vol. 28. – P. 661–669.
6. Collagen structure and mechanical properties of the human sclera: analysis for the effects of age / B. Coudrillier [et al.] // J. Biomech. Eng. – 2015. – Vol. 137, no. 4. – P. 041006-1–041006-14. – DOI: 10.1115/1.4029430.
7. Piñero D. P., Alcón N. In vivo characterization of corneal biomechanics // J. Cataract Refract. Surg. – 2014. – Vol. 40, no. 6. – P. 870–887. – DOI: 10.1016/j.jcrs.2014.03.021.
8. Моисеева И., Штейн А., Любимов Г. Оценка упругих характеристик глазного яблока по отклику энуклированного глаза на введение заданных объемов жидкости // Российский журнал биомеханики. – 2020. – Т. 24, № 4. – С. 412–429.
9. Иомдина Е., Бауэр С., Котляр К. Биомеханика глаза: теоретические аспекты и клинические приложения. – Москва : Реал Тайм, 2015. – 208 с.
10. Бауэр С., Венатовская Л., Воронкова Е. Модели механики деформируемого тела в задачах офтальмологии // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. – 2023. – Т. 10, № 4. – С. 686–712.

11. Идентификация параметров модели роговицы с кератоконусом при численно-экспериментальном исследовании ее геометрии и механического поведения / Е. Солодкова [и др.] // Российский журнал биомеханики. – 2023. – № 3. – С. 67–80. – DOI: 10.15593/RZhBiomeh/2022.3.01.
12. *Salamatova V. Y., Liogky A. A.* Hyperelastic membrane modelling based on data-driven constitutive relations // Russ. J. Numer. Anal. Math. Model. – 2020. – Vol. 35, no. 3. – P. 163–173. – DOI: 10.1515/rnam-2020-0013.
13. *Daxer A.* Corneal intrastromal implantation surgery for the treatment of moderate and high myopia // J. Cataract Refract. Surg. – 2008. – Vol. 34, no. 2. – P. 194–198. – DOI: 10.1016/j.jcrs.2007.10.011.
14. Mathematical Model for Myopia Correction with MyoRing Implants / S. M. Bauer [et al.] // Advanced Structured Materials. Vol. 196. – Springer, 2023. – P. 81–90. – DOI: 10.1007/978-3-031-43736-6\_6.
15. *Лурье А.* Нелинейная теория упругости. – Москва : Наука, 1980. – 512 с.
16. *Нестеров А.* Глаукома. – Москва : Мед. информ. агентство, 2008. – 360 с.
17. Modeling Approaches for an Eyeball Deformation After Intravitreal Injection / S. M. Bauer [et al.] // Advanced Materials Modelling for Mechanical, Medical and Biological Applications. Vol. 155. – Springer, 2021. – P. 77–85. – (Advanced Structured Materials). – DOI: 10.1007/978-3-030-81705-3\_6.

## REFERENCES

1. *Avetisov S. Y., Voronin T. V.* Experimental study of mechanical corneal characteristics after excimerlaser photoablation // Russian Journal of Clinical Ophthalmology. – 2001. – No. 3. – P. 83–86.
2. *Elsheikh A., Alhasso D., Rama P.* Assessment of the epithelium's contribution to corneal biomechanics // Exp. Eye Res. – 2008. – Vol. 86, no. 2. – P. 445–451. – DOI: 10.1016/j.exer.2007.12.002.
3. *Buzard K. A.* Introduction to biomechanics of the cornea // Refract. Corneal Surg. – 1992. – Vol. 8, no. 2. – P. 127–138.
4. *Elsheikh A., Wang D., Pye D.* Determination of the modulus of elasticity of the human cornea // J. Refract. Surg. – 2007. – Vol. 23, no. 8. – P. 808–818. – DOI: 10.3928/1081-597X-20071001-11.
5. *Cogan D. G., Kinsey V. E.* The cornea: V. Physiologic aspects // Arch. Ophth. – 1942. – Vol. 28. – P. 661–669.
6. Collagen structure and mechanical properties of the human sclera: analysis for the effects of age / B. Coudrillier [et al.] // J. Biomech. Eng. – 2015. – Vol. 137, no. 4. – P. 041006-1–041006-14. – DOI: 10.1115/1.4029430.
7. *Piñero D. P., Alcón N.* In vivo characterization of corneal biomechanics // J. Cataract. Refract. Surg. – 2014. – Vol. 40, no. 6. – P. 870–887. – DOI: 10.1016/j.jcrs.2014.03.021.
8. *Moiseeva I. N., Stein A. A., Lyubimov G. A.* Estimation of the elastic characteristics of the eyeball from the response of the enucleated eye to the introduction of given volumes of liquid // Russian Journal of Biomechanics. – 2020. – Vol. 24, no. 4. – P. 412–429.
9. *Iomdina E. N., Bauer S. M., Kotliar K. E.* Eye Biomechanics: Theoretical Aspects and Clinical Applications. – Moscow : Real Time, 2015. – 208 p.

10. *Bauer S. M., Venatovskaya L. A., Voronkova E. B.* Solid mechanics models in application to ophthalmology // Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy. – 2023. – Vol. 10, no. 4. – P. 686–712.
11. Identification of the model parameters in cornea with keratoconus in terms of the numerical-experimental study of corneal geometry and mechanical behavior / E. G. Solodkova [et al.] // Russian Journal of Biomechanics. – 2023. – Vol. 27, no. 3. – P. 67–80. – DOI: 10.15593/RZhBiomech/2023.3.05.
12. *Salamatova V. Y., Liogky A. A.* Hyperelastic membrane modelling based on data-driven constitutive relations // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. – 2020. – Vol. 35, no. 3. – P. 163–173. – DOI: 10.1515/rnam-2020-0013.
13. *Daxer A.* Corneal intrastromal implantation surgery for the treatment of moderate and high myopia // J. Cataract Refract. Surg. – 2008. – Vol. 34, no. 2. – P. 194–198. – DOI: 10.1016/j.jcrs.2007.10.011.
14. Mathematical Model for Myopia Correction with MyoRing Implants / S. M. Bauer [et al.] // Advanced Structured Materials. Vol. 196. – Springer, 2023. – P. 81–90. – DOI: 10.1007/978-3-031-43736-6\_6.
15. *Lurie A. I.* Nonlinear Theory of Elasticity. – Moscow : Nauka, 1980. – 512 с. – in Russian.
16. *Nesterov A. P.* Glaucoma. – Moscow : Meditsinskoe Informatsionnoe Agentstvo, 2008. – 360 с. – (in Russian).
17. Modeling Approaches for an Eyeball Deformation After Intravitreal Injection / S. M. Bauer [et al.] // Advanced Materials Modelling for Mechanical, Medical and Biological Applications. Vol. 155. – Springer, 2021. – P. 77–85. – (Advanced Structured Materials). – DOI: 10.1007/978-3-030-81705-3\_6.