

Д. С. Петухов, И. Э. Келлер

## ОПИСАНИЕ ЗАВИСИМОСТИ УСТАЛОСТНОЙ ДОЛГОВЕЧНОСТИ ОТ ЧАСТОТЫ НАГРУЖЕНИЯ И ВЫДЕРЖЕК В РАМКАХ ЭВОЛЮЦИОННОЙ МОДЕЛИ ПОВРЕЖДАЕМОСТИ

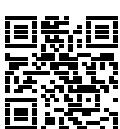
Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, Россия

**Аннотация.** Разрабатывается эволюционная модель накопления усталостной повреждённости, являющаяся функционалом изменения напряжения во времени в локальном объёме, не связанном с пластическими деформациями. Представлено обобщение модели для учёта региональных эффектов зависимости циклической долговечности от частоты нагружения и выдержек при максимальном напряжении в цикле. Определены материальные константы для двухфазного титанового сплава ВТ6 (аналог Ti-6Al-4V), проявляющего холодную ползучесть и чувствительность усталостных свойств к временным характеристикам циклического нагружения при комнатной температуре. Использованы новые данные усталостных испытаний с различными частотами и выдержками в циклах. Показано, что модель корректно описывает эти данные и позволяет прогнозировать усталостную долговечность в более широком диапазоне условий. Выполнён расчёт долговечности детали газотурбинного двигателя на полётных циклах с выдержками при максимальных и промежуточных значениях напряжения, показавший существенную неконсервативность расчёта методом схематизации программы нагружения в рамках гипотезы линейного суммирования повреждённости.

**Ключевые слова:** усталостное разрушение, эволюция повреждённости, модель, многоциклическая усталость, полётные циклы, зависимость от частоты, зависимость от времени выдержки, идентификация.

**Петухов Дмитрий Сергеевич**, ведущий инженер, лаборатория нелинейной механики деформируемого твёрдого тела; e-mail: petuhovds@mail.ru;

**Келлер Илья Эрнстович**, доктор физико-математических наук, заведующий лаборатории нелинейной механики деформируемого твердого тела; e-mail: kie@icmm.ru; <https://orcid.org/0000-0001-9914-8870>; AuthorID: 11695



**для цитирования:** Петухов Д. С., Келлер И. Э. Описание зависимости усталостной долговечности от частоты нагружения и выдержек в рамках эволюционной модели повреждаемости // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2025. № 2(64). С. 262–281. DOI: 10.37972/chgru.2025.64.2.007. EDN: NILHMC

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0).

D. S. Petukhov, I. E. Keller

## SIMULATING THE FREQUENCY AND DWELL EFFECTS ON FATIGUE LIFE USING AN EVOLUTIONARY DAMAGE MODEL

*Institute of Continuous Media Mechanics of UB RAS, Perm, Russia*

**Abstract.** An evolutionary model for the accumulation of fatigue damage is developed as a functional of the time history of stress in a local volume not associated with plastic deformation. The model is generalized to account for rheonomic effects: the dependence of cyclic lifetime on loading frequency and dwell times at the maximum stress within a cycle. Material constants are identified for the two-phase titanium alloy VT6 (Ti-6Al-4V analogue), which exhibits cold creep and sensitivity of fatigue properties to temporal features of cyclic loading at room temperature. New fatigue test data with various frequencies and dwell times are used. The model accurately describes these data and predicts fatigue life over a wider range of loading conditions. A fatigue life assessment is performed for a gas turbine engine component under flight cycles with dwells at maximum and intermediate stress levels, revealing significant nonconservatism of life estimates obtained via program block simplification under the linear damage summation hypothesis.

**Keywords:** fatigue failure; damage evolution; model; high/cycle fatigue; flight cycles; frequency dependence; dwell time dependence; identification.

**Dmitry S. Petukhov**, Leading Engineer; e-mail: petuhovds@mail.ru;

**Ilya E. Keller**, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Head of the Laboratory of Nonlinear Mechanics of Solids; e-mail: kie@icmm.ru;  
<https://orcid.org/0000-0001-9914-8870>; AuthorID: 11695



**to cite this article:** Petukhov D. S., Keller I. E. Simulating the frequency and dwell effects on fatigue life using an evolutionary damage model // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2025. No 2(64). p. 262–281.  
DOI: 10.37972/chgpu.2025.64.2.007

*This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)*

**1. Введение.** В процессе эксплуатации детали самолетов, вертолетов, экскаваторов, ветрогенераторов, наземного транспорта испытывают нерегулярное циклическое нагружение. Важными параметрами цикла нагружения являются кратковременные пиковые нагрузки, выдержки в нагруженном состоянии и их доли в цикле. Если первые можно учесть в рамках обычного при описании усталости склерономного описания, то выдержки в нагруженном состоянии могут вызывать в металлических сплавах при высоких (а иногда и комнатных) температурах деформации ползучести и повреждаемость, и потому вовлекают в описание процесса время. Подобные реономные эффекты лежат и в основе зависимости усталостных свойств от частоты регулярного нагружения там, где эта зависимость наблюдается.

Эффект зависимости усталостной долговечности от частоты нагрузки встречается и исследован для большого числа различных сплавов при комнатной и повышенной температуре [1, 2]. Экспериментальные кривые усталости, полученные при испытаниях на различных частотах, отличаются друг от друга; также отличаются и пределы выносливости. Зачастую эта зависимость немонотонна: при повышении частоты усталостная долговечность (в циклах) сначала увеличивается, а потом падает [1, 3]. Величина эффекта варьируется для разных сплавов и температур и может достигать двух порядков, наиболее он выражен для области низких амплитуд нагрузки [4]. Эффект зависит и от коэффициента асимметрии цикла  $R = \sigma_{\min}/\sigma_{\max}$ . Так, в [5] для  $\alpha - \beta$  титанового сплава Ti-6Al-4V изучалось повышение предела выносливости с увеличением частоты испытаний при различных  $R$ , и определено что эффект снижается с повышением  $R$ . В последние годы интерес к эффекту возрос в контексте сверхмногоциклической усталости [6, 7]. Испытания на базе порядка  $10^9$  и более циклов проводятся при высоких частотах (около 20 кГц), и возникает вопрос о сопоставимости результатов ускоренных испытаний и стандартных испытаний на усталость (с частотой 10-100 Гц), а также применимости результатов для оценки времени жизни в случаях, когда база  $10^9 - 10^{11}$  циклов достигается за годы эксплуатации. В частности, прояснение данных вопросов позволило бы определить, в каких случаях и с какими поправками можно использовать данные ускоренных высокочастотных (значительно более быстрых и дешёвых) испытаний для оценки усталостной долговечности. В [8] проведены испытания на многоциклическую усталость  $\alpha - \beta$  титанового сплава Ti-6Al-7Nb и ряда коммерчески чистых металлов при 100 Гц и 20 кГц. Для некоторых материалов эффект частоты почти отсутствовал, тогда как для других он был значителен. Таким образом, эффект влияния частоты нагружения на усталостную долговечность зависит от материала, температуры, коэффициента асимметрии и базы испытаний.

Чтобы объяснить влияние частоты испытаний на усталостную долговечность, некоторые авторы обращаются к чувствительности металлов к скорости деформации [2], что выражается в зависимости циклической  $\sigma - \varepsilon$  диаграммы от скорости нагружения. Физический механизм эффекта зависит от стадии

разрушения. В [9] на примере низкоуглеродистой стали определено, что зона пластической деформации в вершине распространяющейся трещины намного меньше при высокой частоте испытаний (20 кГц), чем при низкой (10 кГц). Это снижает зону повреждённого материала и затормаживает рост трещины. В [4] изучалось развитие дислокационных структур в ходе усталостного разрушения низкоуглеродистой стали. При низких частотах 0,2-140 Гц, формировались более крупные и упорядоченные структуры чем при высокой частоте 20 кГц. Крупные дислокационные структуры, в свою очередь, упрощают формирование трещин. Это можно объяснить тем, что, при высокой частоте, дислокации смещаются на меньшие расстояния за цикл нагрузки по сравнению с низкой. К такому же выводу пришли авторы [10] изучая влияние частоты на усталостную долговечность подшипниковой стали.

Наличие выдержек в нагруженном состоянии (особенно при максимальной нагрузке) в цикле приводит к снижению усталостной долговечности, достигающему трёх порядков [11–13]. Этот феномен, называемый в англоязычной литературе *dwell fatigue*, далее будем называть “усталостью с выдержками”. Отличие данного феномена от накопления повреждений в ходе циклической ползучести, состоит, во-первых, в том, что он наблюдается при комнатной, или близкой к ней, температуре, а во-вторых, отсутствует значительная макроскопическая необратимая деформация. На сегодняшний момент, когда в литературе говорят об усталости с выдержками, речь идёт исключительно о титановых сплавах. На феномен усталости с выдержками впервые обратили внимание ещё во второй половине 1970-х годов, так как он приводил к непредвиденному разрушению элементов газотурбинных двигателей [14, 15]. Однако и на сегодняшний день он до сих пор приводит к авариям, так, в 2017 году произошло крушение самолёта в результате разрушения детали авиадвигателя из титанового сплава Ti-6Al-4V [16].

Эффект усталости с выдержками особенно выражен для титановых сплавов  $\alpha$  фазы или наличии небольшой доли  $\beta$  фазы, например, Ti-6242, IMI685, IMI829, IMI834, но он заметен и для сплавов смешанной  $\alpha - \beta$  фазы, таких как Ti-6Al-4V или Ti-17 [16] (доля фаз в сплавах может меняться в зависимости от термической и механической обработки). Эффект наблюдается в режиме малоцикловой усталости, т.е. при высоких уровнях напряжений и практически исчезает при понижении амплитуды нагрузки [12, 17]. С увеличением времени выдержки, количество циклов до разрушения сначала падает, а затем становится постоянным на рубеже десятков секунд [17–19].

Интересна связь эффекта усталости с выдержками с температурой. Снижение усталостной долговечности максимально при температуре 80-120°C [20, 21] и исчезает при температуре около 200°C [16, 20, 22]. Это связывают со снижением пластической анизотропии  $\alpha$ -фазы титана вблизи этой температуры [23]. Дополнительная выдержка при повышенной температуре и пониженном, по сравнению с пиком, напряжении может благоприятно влиять на усталостные свойства [12, 24], этот эффект называют *thermal alleviation*.

Физический механизм эффекта усталости с выдержками связан с высокой анизотропией кристаллической решётки  $\alpha$ -фазы титана: модуль Юнга варьируется в пределах 100-145 ГПа [25], а усилия начала деформации вдоль различных систем скольжения различаются до трёх раз [23]. Многие авторы принимают следующий механизм dwell fatigue [11, 12, 21]. Рассматривается граница между зонами с большой разницей ориентации кристаллической решётки. Причём в одной из этих зон системы скольжения благоприятно расположены по отношению к напряжённому состоянию (“мягкая” зона), а в другой – неблагоприятно (“твёрдая” зона). В ходе выдержки дислокации зарождаются в “мягкой” зоне и выходят на границу “твёрдой” зоны, релаксируя напряжения в “мягкой” зоне и перенося их на “твёрдую”, кроме того, создавая в “твёрдой” зоне концентрато-ры напряжений. На практике наблюдается что наличие вытянутых областей  $\alpha$  фазы титана увеличивает эффект. Так, в [17] были проведены эксперименты с двумя типами образцов из Timetal 834, подвергнутыми различной термической обработке. В случае первого типа, крупные зоны одинаковой ориентации имеют примерно одинаковый размер вдоль различных направлений и эффект небольшой. А в случае второго – крупные зоны одинаковой ориентации вытянуты вдоль направления приложения нагрузки, а снижение усталостной долговечности составляет 1-2 порядка вплоть до времени жизни  $\approx 4 \cdot 10^4$  циклов, где исчезает. Таким образом, экспериментально выяснено, что наличие вытянутых кластеров  $\alpha$ -фазы негативно сказывается на времени жизни, а укрупнение зёрен и создание “переплетённой” структуры длинных зёрен  $\alpha$  фазы в  $\beta$ -фазе (basket weave structure) – положительно.

Накопление повреждений в ходе циклической ползучести тоже может приводить к зависимости усталостной долговечности от частоты нагружения и наличия выдержек [26, 27]. Циклическая ползучесть сопровождается макроскопическими деформациями и обычно наблюдается при повышенных температурах. Физические механизмы ползучести меняются в зависимости от материала и температуры [28]. Низкие напряжения, высокая температура и долгие выдержки (или низкая скорость деформации) благоприятствуют механизму диффузионной ползучести Набарро – Херринга [29, 30], при которой диффузия вакансий и атомов происходит внутри зёрен, а также механизму диффузионной ползучести Кобла [31], при которой вакансии и атомы движутся вдоль границ зёрен. Высокие напряжения и высокая скорость деформации способствуют дислокационному механизму ползучести, при которой дислокации движутся консервативно в плоскости скольжения и в ортогональном к ней направлении дисси-пативным переползанием за счёт диффузии атомов [32].

В расчётах на усталостную долговечность влияние частоты и выдержек присутствует почти исключительно в контексте ползучести при повышенных температурах. Так, авторы работ [33, 34] линейно складывают склерономную повреждённость и повреждённость за счёт ползучести. Однако в расчётах на усталость при комнатной температуре практически не встречается явный учёт частоты и выдержек. В отдельных исследованиях влияния частоты на усталостную долговечность предлагаются способы его учета в расчетах. В [2] авторы связывают эффект частоты с чувствительностью деформационной диаграммы к скорости деформации. Они рассматривают соотношение Джонсона – Кука для предела текучести и предлагаю считать, что количество циклов до разрушения зависит только от размаха пластической деформации. Тогда множитель, содержащий скорость деформации, увеличивает напряжение при постоянном размахе пластической деформации, что приводит к вертикальному смещению модельной кривой усталости вверх при увеличении частоты испытаний. Похожего подхода придерживаются и авторы [9] при учете эффекта частоты для низкоуглеродистой стали. Кривые усталости для частот 0.2-140 Гц почти совпадают если нормировать ординату к пределу текучести, зависящему от скорости деформации. Однако, кривая усталости для 20 кГц не приводится к остальным такой нормировкой, что может свидетельствовать о смене механизма накопления повреждений. Модели усталости, учитывающие выдержки, нам не известны.

В работе [35] нами была предложена эволюционная модель усталостного разрушения, в которой рост повреждённости не зависит от скорости приложения нагрузки и наличия выдержек, а в [36] эта модель применена для расчёта усталостной долговечности диска компрессора высокого давления. В настоящей работе данная модель модифицируется для учета эффекта частоты и выдержек. Модель определяет накопление повреждённости по истории изменения тензора напряжений  $\sigma(t)$ ,  $t \geq 0$  в опасной точке, при этом не учитываются неупругие деформации. Также не предполагается зависимости механических свойств от накопленной повреждённости. Данная относительно простая несвязанная модель используется расчетах в режиме постпроцессинга, когда после расчёта напряжений от рабочих нагрузок определяется опасная точка детали, для которой по истории изменения тензора напряжений определяется накопленная повреждённость и усталостная долговечность. Вследствие несвязанности и использования только истории напряжений в расчётах, модель применима при отсутствии значительных неупругих деформаций в течение цикла; малоцикловая усталость и накопление повреждений в ходе циклической ползучести лежат за рамками данной работы.

**2. Эволюционная модель усталостного разрушения** Предлагается модификация модели [35] для учёта скоростных эффектов

$$\begin{aligned}
 \beta &= \frac{1}{\sigma_{-1}} \left( \sqrt{\frac{3}{2}} \|\mathbf{s} - \boldsymbol{\alpha}\| + g(I_1) - r(\|\boldsymbol{\alpha}\|) + w(\Delta\sigma_{\max}) + r_{dw} \right), \\
 \dot{\boldsymbol{\alpha}} &= \|\dot{\mathbf{s}}\| q(\beta) H(\beta) f(\vartheta) \frac{\mathbf{s} - \boldsymbol{\alpha}}{\|\mathbf{s} - \boldsymbol{\alpha}\|}, \\
 \dot{D} &= \dot{D}_{sc} + \dot{D}_{dw}, \\
 \dot{D}_{sc} &= \frac{\|\dot{\mathbf{s}}\|}{\sigma_{-1}} p(\beta) H(\beta) f(\vartheta) \frac{1}{(1-F(\boldsymbol{\sigma}))^\omega}, \\
 \dot{D}_{dw} &= k_{dw} p(\beta) H(\beta) \frac{1}{(1-F(\boldsymbol{\sigma}))^\omega} \left( 1 - \frac{D_{dw}}{k_{dw}^{\max} D_{sc}} \right), \\
 \dot{r}_{dw} &= \left( \frac{r_0 - r_{dw}}{t_r} \right) - k_r \langle -(\sigma_{-1}\beta + r_0 - r_{dw}) \rangle,
 \end{aligned} \tag{1}$$

где  $\beta$  — внутренняя переменная, измеряющая опасность текущего уровня напряжений,  $\boldsymbol{\sigma}$  — симметричный тензор напряжений,  $\mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3}I_1\mathbf{I}$  — его дефиликатор,  $I_1 = \text{sp } \boldsymbol{\sigma}$  — его первый инвариант,  $\boldsymbol{\alpha}$  — симметричный тензор внутренних напряжений, определяющий центр поверхности выносливости,  $\|\mathbf{A}\| = \sqrt{\mathbf{A} : \mathbf{A}}$  — евклидова норма симметричного тензора второго ранга  $\mathbf{A}$ ,  $\vartheta = \arccos(\dot{\mathbf{s}} : (\mathbf{s} - \boldsymbol{\alpha}) / (\|\dot{\mathbf{s}}\| \|\mathbf{s} - \boldsymbol{\alpha}\|))$  — угол между тензорами  $\dot{\mathbf{s}}$  и  $\mathbf{s} - \boldsymbol{\alpha}$  как векторами,  $D, D_{sc}, D_{dw}$  — параметр повреждённости, склерономная и реономная его части,  $r_{dw}$  — внутренний параметр,  $\Delta\sigma_{\max}(t) = \max_{t_1 < t_2 \leq t} (\|\sigma(t_1) - \sigma(t_2)\|)$  — максимальный размах напряжений за предысторию,  $F(\boldsymbol{\sigma})$  — функция статической прочности:  $F(\boldsymbol{\sigma}) = 1$ ,  $g, r, w, q, p$  — материальные функции,  $\omega, \hat{\omega}, k_{dw}, k_{dw}^{\max}, r_0, k_r, t_r$  — материальные константы,  $\sigma_{-1}$  — предел выносливости при регулярном симметричном нагружении,  $H(x) = \{0, x < 0; 1, x \geq 0\}$  — функция Хевисайда,  $\langle x \rangle = \{0, x < 0; x, x \geq 0\}$  — скобки Маколея, точка обозначает производную по времени. Структура и математический смысл выражений (1) и входящих в него величин подробнее изложены ниже.

В основе данной модели лежит понятие поверхности выносливости в пространстве напряжений, задаваемой уравнением  $\beta = 0$  и имеющей центр симметрии. Пока напряжённое состояние лежит внутри поверхности ( $\beta \leq 0$ , рис. 1, а), параметр повреждённости  $D$  имеет постоянное значение, а когда напряжённое состояние выходит за её пределы ( $\beta > 0$ , рис. 1, б),  $D$  начинает расти. Поверхность выносливости может менять свой радиус и перемещаться как жесткое целое, приспосабливаясь к нагружению.

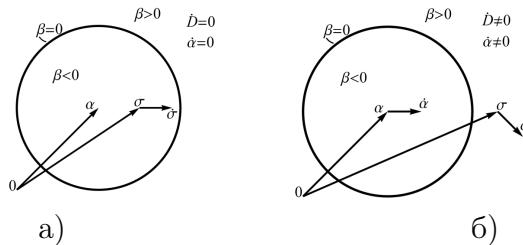


Рис. 1. Поверхность выносливости в пространстве напряжений

Скалярный параметр  $\beta$  является мерой опасности текущего уровня напряжений, от которой зависит текущая скорость накопления повреждённости и движение поверхности выносливости. Выражение для  $\beta$  в системе (1) имеет следующую структуру. Первое слагаемое определяет расстояние между центром поверхности выносливости  $\alpha$  и девиатором напряжений  $s$  и описывает зависимость от девиаторной части напряжённого состояния. Второе слагаемое учитывает вклад шаровой части напряжённого состояния. Третье слагаемое задаёт радиус поверхности выносливости, который зависит от положения её центра  $\alpha$  в пространстве напряжений. Четвёртое слагаемое описывает сокращение радиуса поверхности выносливости при наличии циклов максимальной амплитуды. Последнее слагаемое  $r_{dw}$  моделирует эффект зависимости предела выносливости от частоты нагружения и наличия выдержек.

Движение поверхности выносливости как жесткого целого описывается эволюционным уравнением для  $\alpha$  в системе (1). В этом уравнении  $q(\beta) \geq 0$  есть материальная функция, задающая скорость движения поверхности выносливости в зависимости от  $\beta$ . Функция Хевисайда  $H(\beta)$  выполняет роль переключателя: пока напряжённое состояние находится внутри поверхности выносливости, она неподвижна. Материальная функция  $0 \leq f(\vartheta) \leq 1$  определяет зависимость от угла  $\vartheta$  между векторами направления движения точки напряжённого состояния в пространстве и ее положения относительно центра поверхности. Если эти направления совпадают, то  $f(0) = 1$ , а если они противоположно направлены, то  $f(\pi) = -1$ . Поверхность выносливости движется в направлении от ее центра к точке напряжённого состояния, поскольку  $\dot{\alpha}$  пропорционально  $s - \alpha$ . Наличие выдержек и частота не влияют на движение центра поверхности выносливости.

Повреждённость  $D$  состоит из склерономной  $D_{sc}$  и реономной  $D_{dw}$  частей. Склерономность обеспечивается дифференциальной линейностью эволюционного уравнения для  $D_{sc}$  в (1). По структуре оно отличается от уравнения для  $\dot{\alpha}$  только скалярностью и присутствием множителя с функцией  $F(\sigma)$ , с помощью которой записывается критерий статической прочности  $F(\sigma) = 1$ . Скорость роста склерономной части повреждённости зависит от расстояния от напряженного состояния до поверхности выносливости (регулируется материальной функцией  $p(\beta) \geq 0$ ) и направления изменения напряжённого состояния (регулируется материальной функцией  $f(\vartheta)$ ). При приближении напряженного состояния к поверхности прочности, скорость роста повреждённости становится неограниченной.

Эволюционное уравнение реономной части повреждённости  $D_{dw}$  вдохновлена моделью Кельвина Фойгта. В случае выдержки при постоянном напряжении  $D_{dw}$  будет (с постепенно понижающейся скоростью) увеличиваться до значения  $k_{dw}^{\max} D_{sc}$  (знаменатель внутри скобок в 5-й строке (1)). Это максимальное значение пропорционально  $D_{sc}$ , таким образом, накопленная на текущий момент склерономная повреждённость определяет возможность накопления реономной повреждённости. Константа  $k_{dw}$  задаёт скорость роста  $D_{dw}$  при выдержках,  $k_{dw}^{\max}$

определяет максимальный прирост  $D_{dw}$  за один цикл,  $\hat{\omega}$  регулирует увеличение эффекта выдержек при повышении уровня нагрузки.

Для моделирования эффекта зависимости предела выносливости от частоты нагрузки в выражении для  $\beta$  введён параметр  $r_{dw}$ . Предел выносливости постепенно снижается, пока напряжённое состояние находится вне поверхности выносливости. Константы  $r_0$  и  $t_{dw}$  отвечают за максимальное снижение предела выносливости и скорость его снижения соответственно, а параметр  $k_r$  — за скорость восстановления предела выносливости до его исходного значения, пока напряжённое состояние лежит внутри поверхности выносливости.

**3. Определение констант склерономной части модели** Материальные функции  $g(I_1)$  и  $r(||\boldsymbol{\alpha}||)$  в выражении для  $\beta$  (1) можно идентифицировать по двум диаграммам Хейга зависимостей пределов выносливости при одноосном и сдвиговом нагружениях от среднего напряжения в цикле. На первом этапе рассматривается регулярное сдвиговое нагружение со средним значением  $\tau_m$  и амплитудой  $\tau_a$ . Ненулевыми компонентами тензора напряжений являются  $\sigma_{12} = \sigma_{21}$ ; вследствие (1) те же ненулевые компоненты  $\alpha_{12} = \alpha_{21}$  имеет и тензор  $\boldsymbol{\alpha}$ . Такое нагружение лежит на сдвиговой диаграмме Хейга, если максимальное  $\tau_{\max} = \tau_m + \tau_a$  и минимальное  $\tau_{\min} = \tau_m - \tau_a$  напряжения цикла лежат на поверхности выносливости  $\beta = 0$ . Подставив эти значения в уравнение  $\beta = 0$ , получим

$$\sqrt{3}(\tau_m + \tau_a - \alpha_0) - r(\sqrt{2}\alpha_0) = 0, \quad \sqrt{3}(-\tau_m + \tau_a + \alpha_0) - r(\sqrt{2}\alpha_0) = 0, \quad (2)$$

где  $\alpha_0$  есть компонента  $\alpha_{12}$ , постоянная при таком нагружении, поскольку цикл целиком лежит внутри поверхности выносливости. Исключая  $\alpha_0$  из (2), получим выражение

$$\tau_a(\tau_m) = \frac{1}{\sqrt{3}}r(\sqrt{2}\tau_m) \quad \text{или} \quad r(x) = \sqrt{3}\tau_a(x/\sqrt{2}),$$

позволяющее определить функцию  $r(x)$  по сдвиговой диаграмме Хейга.

На втором этапе рассматривается регулярное одноосное нагружение со средним значением  $\sigma_m$  и амплитудой  $\sigma_a$ . Тензор напряжений имеет единственную ненулевую компоненту  $\sigma_{11}$ , откуда в силу (1) тензор  $\boldsymbol{\alpha}$  имеет ненулевые диагональные элементы  $\alpha_{11}$  и  $\alpha_{22} = \alpha_{33} = -\frac{1}{2}\alpha_{11}$ . Нагружение лежит на диаграмме Хейга, если максимальное  $\sigma_{\max} = \sigma_m + \sigma_a$  и минимальное  $\sigma_{\min} = \sigma_m - \sigma_a$  напряжения цикла лежат на поверхности выносливости  $\beta = 0$ , подставляя которые в выражение для  $\beta$  и обозначая  $\alpha_{11}$  как  $\alpha_0$ , получим

$$\begin{aligned} \sigma_m + \sigma_a - \frac{3}{2}\alpha_0 - r(\sqrt{\frac{3}{2}}\alpha_0) + g(\sigma_m + \sigma_a) &= 0, \\ -\sigma_m + \sigma_a + \frac{3}{2}\alpha_0 - r(\sqrt{\frac{3}{2}}\alpha_0) + g(\sigma_m - \sigma_a) &= 0. \end{aligned}$$

Исключая отсюда  $\alpha_0$ , будем иметь

$$\sigma_a + \frac{1}{2} \left( g(\sigma_m + \sigma_a) + g(\sigma_m - \sigma_a) - r \left( \frac{g(\sigma_m + \sigma_a) - g(\sigma_m - \sigma_a)}{\sqrt{6}} + 2\sigma_m \right) \right) = 0. \quad (3)$$

Если известна функция  $\sigma_a(\sigma_m)$ , задающая диаграмму Хейга для одноосного нагружения, то выражение (3) можно рассматривать как функциональное уравнение относительно  $g(x)$ . Если заданной считать функцию  $g(x)$ , то выражение (3) будет определять неявную зависимость между  $\sigma_a$  и  $\sigma_m$ . Если экспериментальная диаграмма Хейга задана в виде набора из  $n$  пар  $\{\sigma_m^i, \sigma_a^i\}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , то функция  $g(x)$  параметризуется набором констант, задающих её форму. Она должна быть монотонно возрастающей, так как повышение  $I_1$  снижает усталостную прочность. При некотором конкретном наборе констант выражение (3) сопоставляет значениям  $\sigma_m^i$  значениям  $\hat{\sigma}_a^i$ , отличающиеся от экспериментальных  $\sigma_a^i$ . Константы подбираются так, чтобы невязка между прогнозируемыми  $\hat{\sigma}_a^i$  и экспериментальными  $\sigma_a^i$  значениями становилась минимальной.

Функции в (3) ищутся в виде

$$\begin{aligned} g_1(x) &= \text{sign}(x) \int_0^{|x|} \exp(-|\xi|^\kappa) d\xi, \\ g(I_1) &= k_g I_1 - k_g c_g \left( g_1 \left( \frac{I_1 - I_0}{c_g} \right) - g_1 \left( \frac{-I_0}{c_g} \right) \right), \\ r_1(x) &= \begin{cases} \tau_u - x - k_r (\tau_u - x)^\gamma & x \geq \tau_u - c_r \\ \tau_{-1} & x < \tau_u - c_r \end{cases}, \\ r(||\alpha||) &= \sqrt{3} r_1(||\alpha||/\sqrt{2}), \\ k_r &= \frac{1}{\gamma c_r^{\gamma-1}}, \quad \gamma = \frac{c_r}{c_r - \tau_{-1}}, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\kappa$ ,  $k_g$ ,  $c_g$ ,  $I_0$  — константы функции  $g(I_1)$ ,  $c_r$  — константа функции  $r(||\alpha||)$ ,  $\tau_u$  — предел прочности на сдвиг,  $\tau_{-1}$  — предел выносливости при симметричном сдвиговом циклическом нагружении. Функции вида (4) хорошо описывают диаграммы Хейга для разнообразных материалов [37].

Модель идентифицирована для  $\alpha - \beta$  титанового сплава Ti-6Al-4V в условиях комнатной температуры по экспериментальным данным [38]. Ввиду отсутствия сдвиговой диаграммы Хейга для данного материала была использована кривая типичной для металлов формы: с постоянным  $\tau_a$  при небольших  $\tau_m$  и спадом к статическому пределу прочности, для данного материала равному  $\tau_u = 680$  МПа. Предел выносливости на сдвиг при симметричном циклическом нагружении был принят  $\tau_{-1} = 0.5\sigma_{-1}$  [37]. Модельная диаграмма Хейга в сравнении с экспериментальными данными приведена на рис. 2. Графики материальных функций  $g(I_1)$ ,  $r(||\alpha||)$  изображены на рис. 3, а входящие в них их константы приведены в табл. 1.

$\kappa$	$k_g$	$c_g$ , МПа	$I_0$ , МПа	$c_r$ , МПа
0.867	0.527	516	752	401

Таблица 1. Материальные константы функций  $g$  и  $r$

Используется критерий прочности Шлейхера

$$F(\sigma) = \frac{\frac{3}{2}\mathbf{s} : \mathbf{s} - a_1 I_1 - a_2 I_1^2}{a_0} = 1.$$

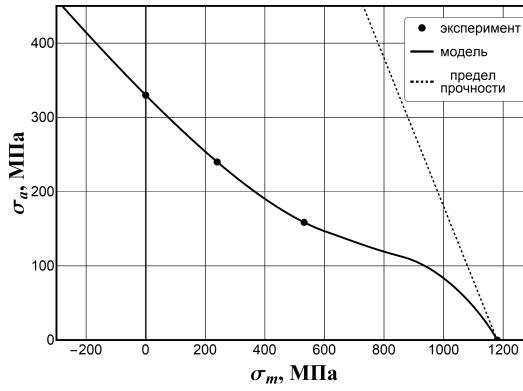


Рис. 2. Диаграмма Хейга для сплава Ti-6Al-4V

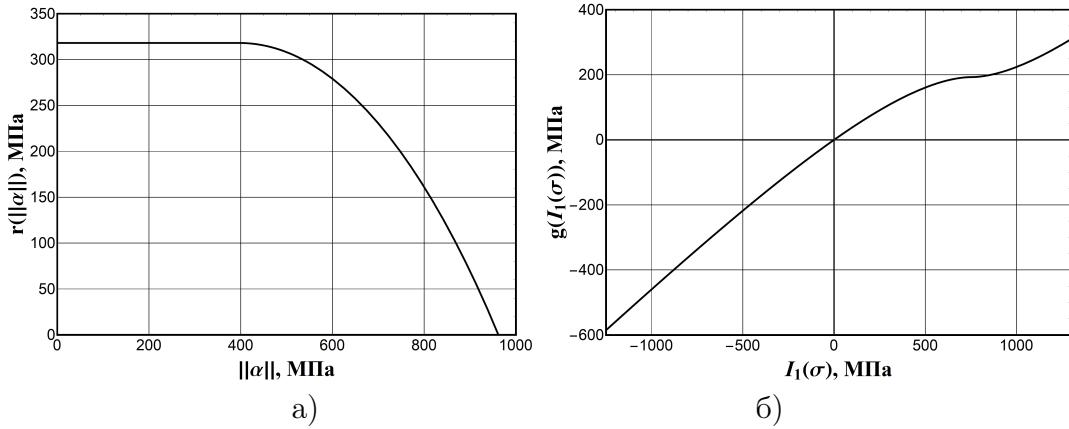


Рис. 3. Материальные функции  $r(||\alpha||)$  (а) и  $g(I_1)$  (б) для сплава Ti-6Al-4V

Входящие в него константы  $a_i$  выражаются через пределы прочности на растяжение  $\sigma_{tu}$ , сжатие  $\sigma_{cu} > 0$  и сдвиг  $\tau_u$ :

$$a_0 = 3\tau_u, \quad a_1 = -3\tau_u \frac{\sigma_{cu} - \sigma_{tu}}{\sigma_{cu}\sigma_{tu}}, \quad a_2 = \frac{3\tau_u}{\sigma_{cu}\sigma_{tu}} - 1.$$

Для сплава Ti-6Al-4V  $\sigma_{tu} = 1180$  МПа,  $\sigma_{cu} = 1240$  МПа,  $\tau_u = 680$  МПа.

Оставшиеся в (1) материальные функции взяты в виде:

$$\begin{aligned} w(x) &= k_1 \left( \frac{1}{2}x + \frac{1}{10}b_1 \ln \left( \frac{\cosh(5(1-x/b_1))}{\cosh(5)} \right) \right), \\ q(\beta) &= k_2 \beta^{l_1} + b_2, \\ p(\beta) &= k_3 (\exp(l_2 \beta) - (1 - b_3)), \end{aligned} \tag{5}$$

где  $k_1, k_2, k_3, b_1, b_2, b_3, l_1, l_2$  — материальные константы.

Функция  $w(x)$  представляет собой слаженную кусочно-линейную функцию, принимающую значение 0 при  $x \leq b_1$  и имеющую наклон  $k_1$  при  $x > b_1$ .

Материальная функция  $f(\vartheta)$  отвечает за накопление  $D_{sc}$  в зависимости от сложности траектории движения точки напряжённого состояния в пространстве напряжений. Она имеет вид

$$f_0(x) = 1 - \operatorname{erf}\left(3\left(x - \frac{\pi}{2}l_4\right)\right), \quad f(\vartheta) = \frac{f_0(\pi) - f_0(\vartheta)}{f_0(\pi) - f_0(0)}$$

и содержит одну материальную константу  $l_4$ , определяемую из экспериментов на несинфазное многоосное нагружение. В рамках данной статьи рассматривается только пропорциональные нагружения одноосным растяжением и сдвигом, поэтому значение  $l_4$  не влияет на результат.

**4. Определение констант реономной части модели.** Далее определяются константы  $k_1, k_2, k_3, b_1, b_2, b_3, l_1, l_2$ , входящие в функции (5), а также констант  $k_{dwell}, t_{dwell}, \hat{\omega}, r_0, t_r, k_r$  (1) и  $\omega$ , отвечающие за эффект частоты и выдержек. Для этого использованы экспериментальные данные а) испытаний плоских образцов из сплава Ti-6Al-4V на одноосное растяжение по синусоидальной программе с частотой 30 Гц с  $R = -1; 0; 0.54$  (рис. 4, а, [38]), б) испытаний цилиндрических образцов из сплава ВТ6 на одноосное растяжение с  $R = 0$  по программе с треугольными циклами и частотой 1 Гц и в) аналогичных испытаний по программе с трапецидальными циклами с выдержкой 120 с при максимальном напряжении (рис. 4, б, выполнено в ПНИПУ). Невязка записывалась как

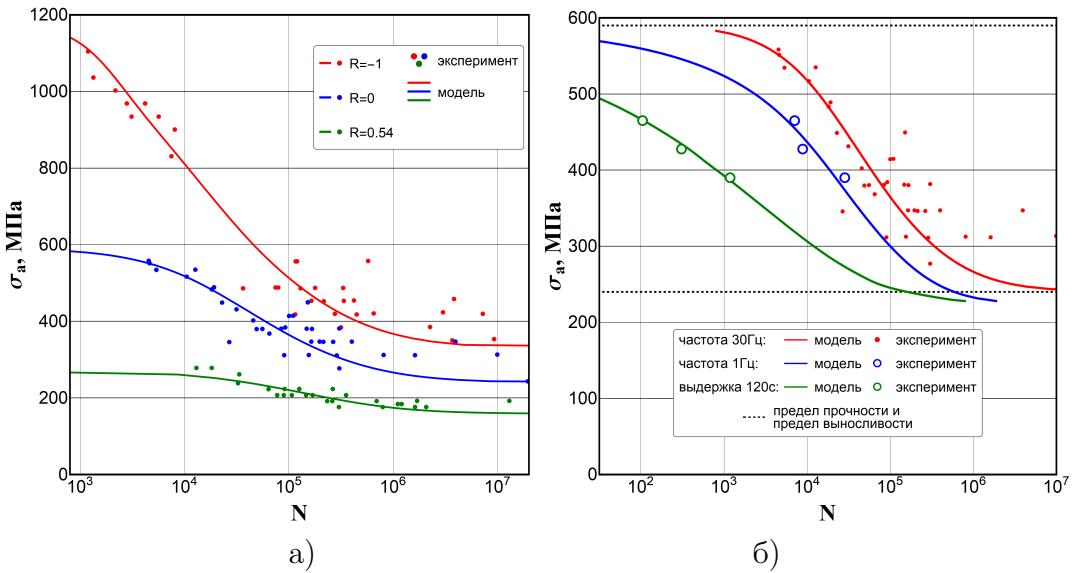
$$X = \sum_{i=1}^n \left(1 - \frac{\ln(N_i)}{\ln(N_i^{\exp})}\right)^2, \quad (6)$$

где  $N_i^{\exp}$  есть экспериментальное значение числа циклов до разрушения в  $i$ -й точке диаграммы Вёлера,  $N_i$  — прогноз по эволюционной модели при том же нагружении,  $n$  — общее число экспериментальных точек, использованных в невязке. Набор констант, минимизирующих невязку (6) приведён в табл. 2. Экспериментальные данные и их аппроксимации кривыми Вёлера приведены на рис. 4.

$k_1$	$k_2$	$k_3$	$b_1$ , МПа	$b_2$	$b_3$	$l_1$	$l_2$	$\omega$
0.176	0.077	$10^{-5.04}$	3033	0.0376	0.331	6.99	1.28	1.74
$k_{dw}, c^{-1}$	$k_{dw}^{\max}$	$\hat{\omega}$	$r_0$ , МПа	$t_r$ ,	$k_r$			
1.01	274	3.48	33	0.24	1			

**Таблица 2.** Материальные константы, входящие в уравнения (1), (5)

**5. Расчёт усталостной долговечности на полётном цикле** Модель (1) использована для расчёта усталостной прочности детали газотурбинного двигателя на полётном цикле. Истории изменения напряжений в течение полётного цикла в опасной точке форсунки приведено на рис. 5, а. На рис. 5, б приведена схематизация этой истории методом дождя по ГОСТ 25.101-83,



**Рис. 4.** Кривые усталости сплава Ti-6Al-4V и их аппроксимации для испытаний: а) при различных  $R$  и частоте 30 Гц, б) при различных частотах и с выдержками при  $R = 0$

согласно которому в расчётах на усталость принимается во внимание лишь выборка минимумов и максимумов нагрузки без учета из последовательности, а выдержки не учитываются.

Материальные константы модели для  $\alpha - \beta$  титанового сплава Ti-6Al-4V (ВТ6) в условиях комнатной температуры приведены в табл. 1, 2. Оценка числа полётных циклов до разрушения для истории рис. 4, а составила  $N = 22$ , тогда как при отсутствии учета накопления реономной составляющей повреждённости  $N = 4445$ , что соответствует расчету по схематизированной диаграмме методом суммирования поврежденности с использованием кривой усталости для частоты 30 Гц. Накопление склерономной и реономной частей повреждённости во время полётного цикла приведено на рис. 6. Подавляющую часть общей повреждённости составляет реономная часть, которая накапливается во время выдержек при максимальном напряжении в цикле.

**6. Заключение.** В эволюционной модели накопления усталостной поврежденности, последняя является функционалом изменения напряжения от времени в локальном объеме, не связанным с пластическими деформациями. Представлено обобщение этой модели для учета реономных эффектов зависимости циклической долговечности от частоты нагружения и выдержек при постоянном напряжении в цикле. Определены материальные константы модели для двухфазного титанового сплава ВТ6 (аналога Ti-6Al-4V), проявляющего холодную ползучесть — чувствительность усталостных свойств к времененным

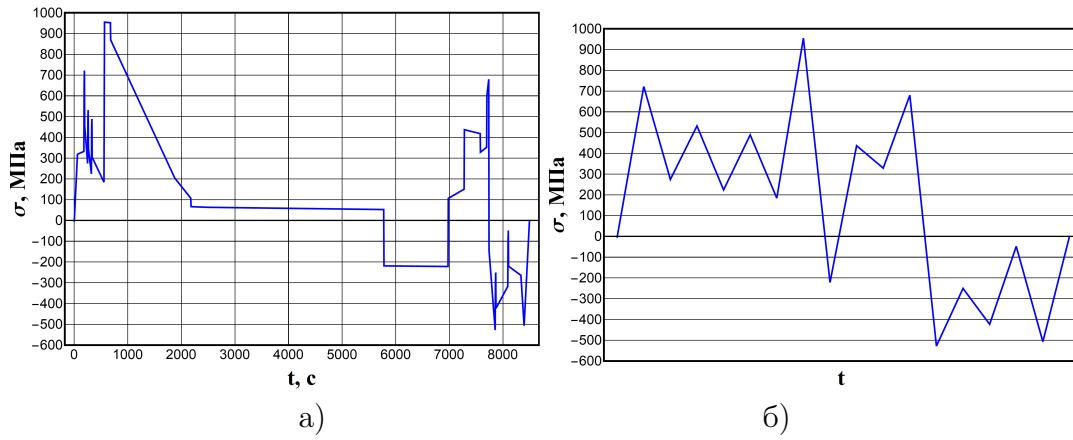


Рис. 5. История изменения напряжений в течение полётного цикла (а) и схематизация этой истории по методу дождя (б)

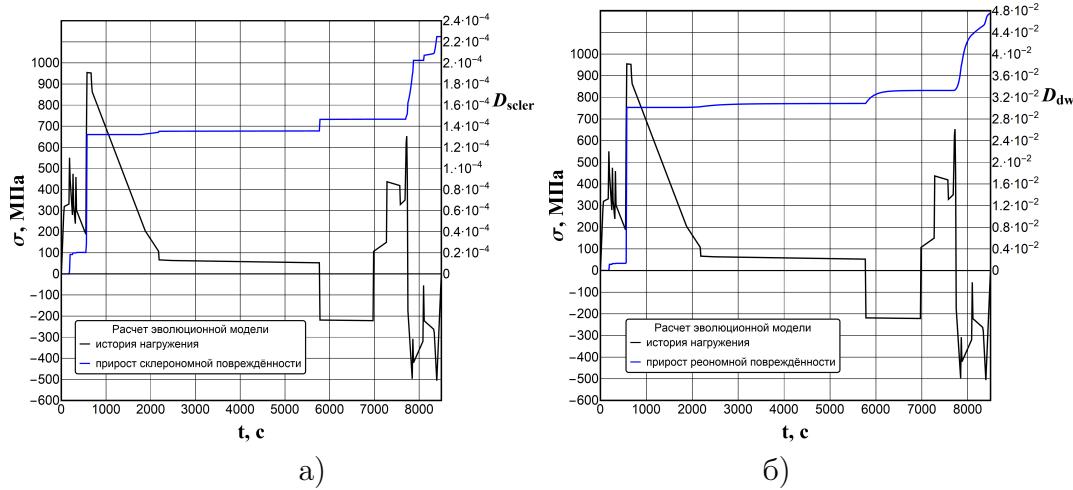


Рис. 6. Накопление повреждённости в течение полётного цикла: склерономная (а) и реономная (б) части повреждённости

характеристикам циклического нагружения в условиях комнатной температуры. Использованы новые данные усталостных испытаний с различными частотами и с выдержками в циклах. Показано, что модель может корректно описывать эти данные, а также прогнозировать усталостную долговечность для более широкого диапазона условий нагружения. Выполнен расчет усталостной долговечности детали газотурбинного двигателя на полетных циклах, содержащих выдержки при максимальном и промежуточных значениях напряжения в цикле, показавший существенную неконсервативность расчета усталостной долговечности методом схематизации программы нагружения в рамках гипотезы линейного суммирования поврежденности.

## ДОПОЛНИТЕЛЬНО

**Вклад авторов.** Авторы внесли равный вклад в проведение исследований и написание рукописи.

**Конфликт интересов.** Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

**Источник финансирования.** Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда и Пермского края № 24-29-20148.

## ADDITIONAL INFORMATION

**Authors' contribution.** The authors made an equal contribution to the research and writing of the manuscript.

**Competing interests.** The authors declare that they have no competing interests.

**Funding.** This research was funded by a grant from the Russian Science Foundation and the Perm Krai, No. 24-29-20148.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Fatigue testing with high frequency cycling / V. A. Kuzmenko [et al.] ; ed. by V. A. Kuzmenko. – Kiev : Naukova Dumka, 1979. – 336 p. – In Russian.
2. Dynamic frequency-dependent fatigue damage in metals: A state-of-the-art review / K. Tahmasbi [et al.] // Forces in Mechanics. – 2023. – Vol. 10. – DOI: 10.1016/j.finmec.2023.100167.
3. Organ F. E., Gell M. The effect of frequency on the elevated temperature fatigue of a nickel-base superalloy // Metall. Trans. – 1971. – Vol. 2. – P. 943–952. – DOI: 10.1007/BF02664223.
4. Effect of the loading frequency on fatigue properties of JIS S15C low carbon steel and some discussions based on micro-plasticity behavior / B. Guennec [et al.] // Int. J. Fatigue. – 2014. – Vol. 66. – P. 29–38. – DOI: 10.1016/j.ijfatigue.2014.03.005.
5. Morrissey R. J., McDowell D. L., Nicholas T. Frequency and stress ratio effects in high cycle fatigue of Ti-6Al-4V // Int. J. Fatigue. – 1999. – Vol. 21, no. 7. – P. 679–685. – DOI: 10.1016/S0142-1123(99)00030-4.
6. Sharma A., Oh M. C., Ahn B. Recent Advances in Very High Cycle Fatigue Behavior of Metals and Alloys — A Review // Metals. – 2020. – Vol. 10, no. 9. – DOI: 10.3390/met10091200.
7. A Brief Review of the Application and Problems in Ultrasonic Fatigue Testing / W. Peng [et al.] // AASRI Procedia. – 2012. – Vol. 2. – P. 127–133. – DOI: 10.1016/j.aasri.2012.09.024.
8. Influence of loading frequency on high cycle fatigue properties of B.C.C. and H.C.P. Metals / M. Papakyriacou [et al.] // Mater. Sci. Eng., A. – 2001. – Vol. 308, no. 1/2. – P. 143–152. – DOI: 10.1016/S0921-5093(00)01978-X.
9. Tsutsumi N., Murakami Y., Doquet V. Effect of test frequency on fatigue strength of low carbon steel // Fatigue Fract. Eng. Mater. Struct. – 2009. – Vol. 32, no. 6. – P. 473–483. – DOI: 10.1111/j.1460-2695.2009.01350.x.
10. Effects of strength level and loading frequency on very-high-cycle fatigue behavior for a bearing steel / A. Zhao [et al.] // Int. J. Fatigue. – 2012. – Vol. 38. – P. 46–56. – DOI: 10.1016/j.ijfatigue.2011.11.014.

11. *Bache M. R.* A review of dwell sensitive fatigue in titanium alloys: the role of microstructure, texture and operating conditions // *Int. J. Fatigue.* – 2003. – Vol. 25. – P. 1079–1087. – DOI: 10.1016/S0142-1123(03)00145-2.
12. Predicting dwell fatigue life in titanium alloys using modelling and experiment / Y. Xu [et al.] // *Nat. Commun.* – 2020. – Vol. 11. – P. 58–68. – DOI: 10.1038/s41467-020-19470-w.
13. Recent developments in cold dwell fatigue of titanium alloys for aero-engine applications: A review / Z. Wu [et al.] // *J. Mater. Res. Technol.* – 2022. – Vol. 20. – P. 469–484. – DOI: 10.1016/j.jmrt.2022.07.094.
14. *Eylon D., Hall J. A.* Fatigue behavior of beta processed titanium alloy IMI 685 // *Metall. Trans. A.* – 1977. – Vol. 8. – P. 981–990. – DOI: 10.1007/BF02661583.
15. *Evans W. J., Gostelow C. R.* The effect of hold time on the fatigue properties of a  $\beta$ -processed titanium alloy // *Metall. Trans. A.* – 1979. – Vol. 10. – P. 1837–1846. – DOI: 10.1007/BF02811727.
16. *Bureau d'Enquêtes et d'Analyses (BEA)*. Investigation report: Accident to the AIR-BUS A380-861 30.09.2017 : tech. rep. – 09/2020. – P. 85. – BEA2017-0568.en.
17. Dwell sensitive fatigue in a near alpha titanium alloy at ambient temperature / M. R. Bache [et al.] // *Int. J. Fatigue.* – 1997. – Vol. 19, no. 93. – P. 83–88. – DOI: 10.1016/S0142-1123(97)00020-0.
18. *Wang F., Cui W.* Experimental investigation on dwell-fatigue property of Ti-6Al-4V ELI used in deep-sea manned cabin // *Mater. Sci. Eng., A.* – 2015. – Vol. 642. – P. 136–141. – DOI: 10.1016/j.msea.2015.06.089.
19. Dwell fatigue and cycle deformation of CP-Ti at ambient temperature / J. Peng [et al.] // *Mater. Des.* – 2015. – Vol. 71. – P. 1–16. – DOI: 10.1016/j.matdes.2015.01.007.
20. *Dutton R.* A review of the low-temperature creep behaviour of titanium : tech. rep. / AECL Whiteshell Laboratories. – Pinawa, MB, Canada, 1996. – P. 59.
21. *Zhang Z., Cuddihy M. A., Dunne F. P. E.* On rate-dependent polycrystal deformation: the temperature sensitivity of cold dwell fatigue // *Proc. R. Soc. A.* – 2015. – Vol. 471. – DOI: 10.1098/rspa.2015.0214.
22. *Luetjering G., Williams J. C.* Titanium. – Berlin, Heidelberg : Springer, 2007. – DOI: 10.1007/978-3-540-73036-1.
23. *Ozturk D., Shahba A., Ghosh S.* Crystal plasticity FE study of the effect of thermo-mechanical loading on fatigue crack nucleation in titanium alloys // *Fatigue Fract. Eng. Mater. Struct.* – 2016. – Vol. 9, no. 6. – P. 752–769. – DOI: 10.1111/ffe.12410.
24. Cyclic plasticity and thermomechanical alleviation in titanium alloys / Y. Xu [et al.] // *Int. J. Plasticity.* – 2020. – Vol. 134. – P. 102753. – DOI: 10.1016/j.ijplas.2020.102753.
25. *Zarkardes A., Larson F. R.* Elasticity of Titanium Alloys // *The Science Technology and Application of Titanium Alloys. Proc. Int. Conf.*, London, 21–24 May 1968 / ed. by R. I. Jaffee, N. E. Promisel. – 1970. – P. 933–944.
26. Crack growth micro-mechanisms in the IN718 alloy under the combined influence of fatigue, creep and oxidation / D. G. Leo Prakash [et al.] // *Int. J. Fatigue.* – 2009. – Vol. 31, no. 11/12. – P. 1966–1977. – DOI: 10.1016/j.ijfatigue.2009.01.023.

27. Hold-time effects on elevated-temperature low-cycle-fatigue and crack-propagation behaviors of HAYNES 188 superalloy / S. Lee [et al.] // J. Mater. Sci. – 2009. – Vol. 44. – P. 2945–2956. – DOI: 10.1007/s10853-009-3391-1.
28. Assessment of creep-fatigue behavior, deformation mechanisms, and microstructural evolution of alloy 709 under accelerated conditions / T. D. Porter [et al.] // Int. J. Fatigue. – 2019. – Vol. 124. – P. 205–216. – DOI: 10.1016/j.ijfatigue.2019.02.037.
29. *Nabarro F. R. N.* Deformation of Crystals by the Motion of Single Lonsin // Report of a Conference on the Strength of Solids (Bristol, U.K.) – Physical Society, London, 1948. – P. 75–90.
30. *Herring C.* Diffusional Viscosity of a Polycrystalline Solid // J. Appl. Phys. – 1950. – Vol. 21, no. 5. – P. 437–445. – DOI: 10.1063/1.1699681.
31. *Coble R. L.* A Model for Boundary Diffusion Controlled Creep in Polycrystalline Materials // J. Appl. Phys. – 1962. – Vol. 34, no. 6. – P. 1679–1682. – DOI: 10.1063/1.1702656.
32. *Weertman J. R.* Theory of Steady-State Creep Based on Dislocation Climb // J. Appl. Phys. – 1955. – Vol. 26. – P. 1213–217. – DOI: 10.1063/1.1721875.
33. *Byrne J., Hall R., Grabowski L.* Elevated temperature fatigue crack growth under dwell conditions in Waspaloy // Int. J. Fatigue. – 1997. – Vol. 19, no. 5. – P. 359–367. – DOI: 10.1016/S0142-1123(97)00056-X.
34. A new creep-fatigue crack growth model and a correlation of the creep-fatigue crack growth rate with unified constraint parameter / R.-S. Lu [et al.] // Int. J. Fatigue. – 2023. – Vol. 166. – P. 107248. – DOI: 10.1016/j.ijfatigue.2022.107248.
35. *Petukhov D. S., Keller I. E.* Evolutionary Model of Fatigue Fracture under Irregular Loading // Mechanics of Solids. – 2022. – Vol. 57, no. 2. – P. 263–270. – DOI: 10.3103/S0025654422020194.
36. *Petukhov D. S., Dudin D. S., Keller I. E.* Method of calculating the fatigue life of parts under the non-regular loading in the presence of surface residual stresses // Izvestiya VUZov. Mashinostroenie [Universities Proceedings. Mechanical Engineering]. – 2025. – 1 (778). – C. 3–20. – In Russian.
37. *Forrest P. G.* Fatigue of Metals. – Oxford : Pergamon Press, 1962. – 425 p.
38. Metallic Materials Properties Development and Standardization : tech. rep. / R. Rice [et al.] ; U.S. Department of Transportation, Federal Aviation Administration. – Washington, D.C., 01/2003. – P. 1728. – DOT/FAA/AR-MMPDS-01.

## REFERENCES

1. Fatigue testing with high frequency cycling / V. A. Kuzmenko [и др.] ; под ред. V. A. Kuzmenko. – Kiev : Naukova Dumka, 1979. – 336 с. – In Russian.
2. Dynamic frequency-dependent fatigue damage in metals: A state-of-the-art review / K. Tahmasbi [et al.] // Forces in Mechanics. – 2023. – Vol. 10. – DOI: 10.1016/j.finmec.2023.100167.
3. *Organ F. E., Gell M.* The effect of frequency on the elevated temperature fatigue of a nickel-base superalloy // Metall. Trans. – 1971. – Vol. 2. – P. 943–952. – DOI: 10.1007/BF02664223.
4. Effect of the loading frequency on fatigue properties of JIS S15C low carbon steel and some discussions based on micro-plasticity behavior / B. Guennec [et al.] //

- Int. J. Fatigue. – 2014. – Vol. 66. – P. 29–38. – DOI: 10.1016/j.ijfatigue.2014.03.005.
5. Morrissey R. J., McDowell D. L., Nicholas T. Frequency and stress ratio effects in high cycle fatigue of Ti-6Al-4V // Int. J. Fatigue. – 1999. – Vol. 21, no. 7. – P. 679–685. – DOI: 10.1016/S0142-1123(99)00030-4.
  6. Sharma A., Oh M. C., Ahn B. Recent Advances in Very High Cycle Fatigue Behavior of Metals and Alloys — A Review // Metals. – 2020. – Vol. 10, no. 9. – DOI: 10.3390/met10091200.
  7. A Brief Review of the Application and Problems in Ultrasonic Fatigue Testing / W. Peng [et al.] // AASRI Procedia. – 2012. – Vol. 2. – P. 127–133. – DOI: 10.1016/j.aasri.2012.09.024.
  8. Influence of loading frequency on high cycle fatigue properties of B.C.C. and H.C.P. Metals / M. Papakyriacou [et al.] // Mater. Sci. Eng., A. – 2001. – Vol. 308, no. 1/2. – P. 143–152. – DOI: 10.1016/S0921-5093(00)01978-X.
  9. Tsutsumi N., Murakami Y., Doquet V. Effect of test frequency on fatigue strength of low carbon steel // Fatigue Fract. Eng. Mater. Struct. – 2009. – Vol. 32, no. 6. – P. 473–483. – DOI: 10.1111/j.1460-2695.2009.01350.x.
  10. Effects of strength level and loading frequency on very-high-cycle fatigue behavior for a bearing steel / A. Zhao [et al.] // Int. J. Fatigue. – 2012. – Vol. 38. – P. 46–56. – DOI: 10.1016/j.ijfatigue.2011.11.014.
  11. Bache M. R. A review of dwell sensitive fatigue in titanium alloys: the role of microstructure, texture and operating conditions // Int. J. Fatigue. – 2003. – Vol. 25. – P. 1079–1087. – DOI: 10.1016/S0142-1123(03)00145-2.
  12. Predicting dwell fatigue life in titanium alloys using modelling and experiment / Y. Xu [et al.] // Nat. Commun. – 2020. – Vol. 11. – P. 58–68. – DOI: 10.1038/s41467-020-19470-w.
  13. Recent developments in cold dwell fatigue of titanium alloys for aero-engine applications: A review / Z. Wu [et al.] // J. Mater. Res. Technol. – 2022. – Vol. 20. – P. 469–484. – DOI: 10.1016/j.jmrt.2022.07.094.
  14. Eylon D., Hall J. A. Fatigue behavior of beta processed titanium alloy IMI 685 // Metall. Trans. A. – 1977. – Vol. 8. – P. 981–990. – DOI: 10.1007/BF02661583.
  15. Evans W. J., Gostelow C. R. The effect of hold time on the fatigue properties of a  $\beta$ -processed titanium alloy // Metall. Trans. A. – 1979. – Vol. 10. – P. 1837–1846. – DOI: 10.1007/BF02811727.
  16. Bureau d'Enquêtes et d'Analyses (BEA). Investigation report: Accident to the AIR-BUS A380-861 30.09.2017 : tech. rep. – 09/2020. – P. 85. – BEA2017-0568.en.
  17. Dwell sensitive fatigue in a near alpha titanium alloy at ambient temperature / M. R. Bache [et al.] // Int. J. Fatigue. – 1997. – Vol. 19, no. 93. – P. 83–88. – DOI: 10.1016/S0142-1123(97)00020-0.
  18. Wang F., Cui W. Experimental investigation on dwell-fatigue property of Ti-6Al-4V ELI used in deep-sea manned cabin // Mater. Sci. Eng., A. – 2015. – Vol. 642. – P. 136–141. – DOI: 10.1016/j.msea.2015.06.089.
  19. Dwell fatigue and cycle deformation of CP-Ti at ambient temperature / J. Peng [et al.] // Mater. Des. – 2015. – Vol. 71. – P. 1–16. – DOI: 10.1016/j.matdes.2015.01.007.
  20. Dutton R. A review of the low-temperature creep behaviour of titanium : tech. rep. / AECL Whiteshell Laboratories. – Pinawa, MB, Canada, 1996. – P. 59.

21. *Zhang Z., Cuddihy M. A., Dunne F. P. E.* On rate-dependent polycrystal deformation: the temperature sensitivity of cold dwell fatigue // Proc. R. Soc. A. – 2015. – Vol. 471. – DOI: 10.1098/rspa.2015.0214.
22. *Luetjering G., Williams J. C.* Titanium. – Berlin, Heidelberg : Springer, 2007. – DOI: 10.1007/978-3-540-73036-1.
23. *Ozturk D., Shahba A., Ghosh S.* Crystal plasticity FE study of the effect of thermo-mechanical loading on fatigue crack nucleation in titanium alloys // Fatigue Fract. Eng. Mater. Struct. – 2016. – Vol. 9, no. 6. – P. 752–769. – DOI: 10.1111/ffe.12410.
24. Cyclic plasticity and thermomechanical alleviation in titanium alloys / Y. Xu [et al.] // Int. J. Plasticity. – 2020. – Vol. 134. – P. 102753. – DOI: 10.1016/j.ijplas.2020.102753.
25. *Zarkardes A., Larson F. R.* Elasticity of Titanium Alloys // The Science Technology and Application of Titanium Alloys. Proc. Int. Conf., London, 21–24 May 1968 / ed. by R. I. Jaffee, N. E. Promisel. – 1970. – P. 933–944.
26. Crack growth micro-mechanisms in the IN718 alloy under the combined influence of fatigue, creep and oxidation / D. G. Leo Prakash [et al.] // Int. J. Fatigue. – 2009. – Vol. 31, no. 11/12. – P. 1966–1977. – DOI: 10.1016/j.ijfatigue.2009.01.023.
27. Hold-time effects on elevated-temperature low-cycle-fatigue and crack-propagation behaviors of HAYNES 188 superalloy / S. Lee [et al.] // J. Mater. Sci. – 2009. – Vol. 44. – P. 2945–2956. – DOI: 10.1007/s10853-009-3391-1.
28. Assessment of creep-fatigue behavior, deformation mechanisms, and microstructural evolution of alloy 709 under accelerated conditions / T. D. Porter [et al.] // Int. J. Fatigue. – 2019. – Vol. 124. – P. 205–216. – DOI: 10.1016/j.ijfatigue.2019.02.037.
29. *Nabarro F. R. N.* Deformation of Crystals by the Motion of Single Lonsin // Report of a Conference on the Strength of Solids (Bristol, U.K.) – Physical Society, London, 1948. – P. 75–90.
30. *Herring C.* Diffusional Viscosity of a Polycrystalline Solid // J. Appl. Phys. – 1950. – Vol. 21, no. 5. – P. 437–445. – DOI: 10.1063/1.1699681.
31. *Coble R. L.* A Model for Boundary Diffusion Controlled Creep in Polycrystalline Materials // J. Appl. Phys. – 1962. – Vol. 34, no. 6. – P. 1679–1682. – DOI: 10.1063/1.1702656.
32. *Weertman J. R.* Theory of Steady-State Creep Based on Dislocation Climb // J. Appl. Phys. – 1955. – Vol. 26. – P. 1213–217. – DOI: 10.1063/1.1721875.
33. *Byrne J., Hall R., Grabowski L.* Elevated temperature fatigue crack growth under dwell conditions in Waspaloy // Int. J. Fatigue. – 1997. – Vol. 19, no. 5. – P. 359–367. – DOI: 10.1016/S0142-1123(97)00056-X.
34. A new creep-fatigue crack growth model and a correlation of the creep-fatigue crack growth rate with unified constraint parameter / R.-S. Lu [et al.] // Int. J. Fatigue. – 2023. – Vol. 166. – P. 107248. – DOI: 10.1016/j.ijfatigue.2022.107248.
35. *Petukhov D. S., Keller I. E.* Evolutionary Model of Fatigue Fracture under Irregular Loading // Mechanics of Solids. – 2022. – Vol. 57, no. 2. – P. 263–270. – DOI: 10.3103/S0025654422020194.
36. *Petukhov D. S., Dudin D. S., Keller I. E.* Method of calculating the fatigue life of parts under the non-regular loading in the presence of surface residual

- stresses // Izvestiya VUZov. Mashinostroenie [Universities Proceedings. Mechanical Engineering]. – 2025. – 1 (778). – C. 3–20. – In Russian.
- 37. *Forrest P. G.* Fatigue of Metals. – Oxford : Pergamon Press, 1962. – 425 p.
  - 38. Metallic Materials Properties Development and Standardization : tech. rep. / R. Rice [et al.] ; U.S. Department of Transportation, Federal Aviation Administration. – Washington, D.C., 01/2003. – P. 1728. – DOT/FAA/AR-MMPDS-01.