Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния.

DOI: 10.37972/chgpu.2025.64.2.015 *EDN: SJOURE*

Научная статья *УДК: 539.319*

Е. В. Мурашкин, Ю. Н. Радаев

ОБ ОДНОМ АЛГОРИТМЕ АППРОКСИМАЦИИ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ ФОРМЫ ГЕМИТРОПНОГО МИКРОПОЛЯРНОГО ТЕЛА

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

Аннотация. В настоящем исследовании предлагается алгоритм получения аппроксимации пятого порядка потенциала силовых и моментных напряжений гемитропного микрополярного упругого тела, учитывающего (кроме базовой квадлатичной аппроксимации) поправки вплоть до пятого алгебраического порядка, при систематическом использовании теории алгебраических инвариантов. С этой целью обсуждается полный перечень неприводимых инвариантов для системы двух асимметричных тензоров второго ранга в форме инвариантных следов. В результате предложен исходный набор из 86 инвариантных следов, состоящий из 8 индивидуальных инвариантов, 17 парных, 44 инвариантных троек и 17 инвариантных четверок. Здесь классификация проведена по количеству тензорных литер (максимальное число литер равно 4). Максимальная степень исходных инваринатов равна 6. Из 86 элементов затем отфильтрованы 63 следа по правилу возрастания алгебраических степеней инвариантов: 2 линейных инварианта, 6 квадратичных, 12 кубических, 19 четвертой степени, 24 инварианта пятой степени. Предложена схема построения инвариантов пятой степени, разбитых для удобства по семи группам, на основе правил: произведения линейных инвариантов между собой, попарные произведения квадратичных и кубических инвариантов между собой, попарные произведения инвариантов первой и четвертой степени, произведения линейных и кубических инвариантов, произведения линейных, возведенных в куб, и квадратичных инвариантов, произведения линейных и квадратов квадратичных инвариантов, исходные инварианты пятой степени. Таким образом, гемитропный микрополярный потенциал определяется с помощью 366 механических модулей. Получены определяющие уравнения для силовых и моментных напряжений, включающие поправки второй, третьей и четвертой алгебраической степени, справедливые в произвольной криволинейной системе координат.

Ключевые слова: наномасштаб, микромасштаб, энергетическая форма, целочисленный рациональный алгебраический инвариант, неприводимая система инвариантов, кубическая аппроксимация, гемитропное микрополярное упругое тело

Мурашкин Евгений Валерьевич, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории моделирования в механике деформируемого твердого тела;
`e-mail:` murashkin@ipmnet.ru;
https://orcid.org/0000-0002-3267-4742; AuthorID: 129570

Радаев Юрий Николаевич, доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник лаборатории моделирования в механике деформируемого твердого тела;
`e-mail:` radayev@ipmnet.ru;
https://orcid.org/0000-0002-0866-2151; AuthorID: 103116

для цитирования: *Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н.* Об одном алгоритме аппроксимации энергетической формы гемитропного микрополярного тела // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2025. № 2(64). С. 282–300. DOI: 10.37972/chgpu.2025.64.2.015. EDN: SJOURE

Поступила: 12.01.2025; принята в печать: 24.02.2025; опубликована: 19.12.25.

Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost.

DOI: 10.37972/chgpu.2025.64.2.015 *EDN: SJOURE*

Research Article

E. V. Murashkin, Y. N. Radayev

ON AN ALGORITHM FOR APPROXIMATING ENERGY FORM OF A HEMITROPIC MICROPOLAR SOLID

Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow, Russia

Abstract. This study deals with an algorithm for deriving a quintic-order approximation of the potential for force and moment stresses in a hemitropic micropolar elastic solid. The formulation accounts for corrections up to the fifth algebraic order—extending beyond the fundamental quadratic approximation through the systematic application of algebraic invariant theory.

To this end, the complete set of irreducible invariants for a system of two asymmetric second-rank tensors is discussed and represented in the form of invariant traces. Consequently, an initial set of 86 invariant traces is proposed, comprising 8 single invariants, 17 dual combinations, 44 invariant triples, and 17 invariant quadruples. This classification is based on the number of tensor literals involved, with a maximum of four literals. The maximum degree of the initial invariants is six.

From these 86 elements, 63 traces are subsequently selected according to the rule of increasing algebraic degree: 2 linear invariants, 6 quadratic, 12 cubic, 19 of the fourth degree, and 24 invariants of the fifth degree. A scheme for obtaining the fifth-degree invariants is introduced, partitioned for convenience into seven groups based on the following rules: products of linear invariants with each other, pairwise products of quadratic and cubic invariants, pairwise products of first- and fourth-degree invariants, products of linear and cubic invariants, products of linear invariants raised to the third power with quadratic invariants, products of linear invariants with squares of quadratic invariants, and the original fifth-degree invariants.

Thus, the hemitropic micropolar potential is characterized by 366 mechanical moduli. Constitutive equations for force and couple stresses are derived, incorporating second-, third-, and fourth-order algebraic corrections, and are formulated to be valid in an arbitrary curvilinear coordinate system.

Keywords: algebraic weight, pseudotensor, nanoscale, microscale, energy form, integer rational algebraic invariant, irreducible system of invariants, cubic approximation, hemitropic micropolar elastic solid

Evgenii V. Murashkin, Cand. Sci. Phys. & Math., MD, Senior Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences; `e-mail:` evmurashkin@gmail.ru; https://orcid.org/0000-0002-3267-4742; AuthorID: 129570

Yuri N. Radayev, Dr. Sci. Phys. & Math., Prof., Leading Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences; `e-mail:` radayev@ipmnet.ru; https://orcid.org/0000-0002-0866-2151; AuthorID: 103116

to cite this article: *Murashkin E. V., Radayev Y. N.* On an algorithm for approximating energy form of a hemitropic micropolar solid // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2025. No 2(64). p. 282–300. DOI: 10.37972/chgpu.2025.64.2.015

Received: 12.01.2025; accepted: 24.02.2025; published: 19.12.25.

Введение.

Вводные замечания. При построении определяющих уравнений в механике континуума исключительное значение имеет теория рациональных алгебраических инвариантов [1—6]. Инварианты и псевдоинварианты позволяют без труда сформулировать аппроксимации заданной степени для энергетических потенциалов силовых и моментных напряжений в микрополярной механике упругих тел [7—18]. В особенности это справедливо при построении математических моделей гемитропных микрополярных упругих сред. В этом случае, наиболее подходящим является А-представление [17, 18] энергетических форм, являющееся линейной комбинацией индивидуальных и совместных целых рациональных алгебраических инвариантов асимметричного тензора деформаций и градиента поля микроповоротов относительно гемитропной группы преобразований.

Основным понятием теории алгебраических инвариантов является индивидуальный инвариант (псевдоинвариант) тензора (псевдотензора) [1, с. С. 136]. При этом, если алгебраический вес g инварианта равен нулю, то инвариант носит название абсолютного инварианта, а при g $\neq 0$ — относительного или псевдоинварианта. Инварианты тензора можно задавать несколькими способами [1, с. С. 327]. Например, для аффинора $A_{k\cdot}^{\cdot s}$, следы его степеней будут образовывать бесконечную систему целых рациональных инвариантов:

$$\underset{1}{S} = A_{s\cdot}^{\cdot s}, \qquad \underset{2}{S} = A_{s\cdot}^{\cdot k} A_{k\cdot}^{\cdot s}, \qquad \underset{3}{S} = A_{s\cdot}^{\cdot k} A_{k\cdot}^{\cdot l} A_{l\cdot}^{\cdot s}, \qquad \ldots . \tag{1}$$

С другой стороны, важную роль играют также следующие инварианты:

$$\underset{1}{I} = A_{s\cdot}^{\cdot s}, \qquad \underset{2}{I} = A_{[s\cdot}^{\cdot k} A_{k]\cdot}^{\cdot s}, \qquad \underset{3}{I} = A_{[s\cdot}^{\cdot k} A_{k\cdot}^{\cdot l} A_{l]\cdot}^{\cdot s}, \qquad \ldots . \tag{2}$$

Квадратные скобки в (2) обозначают операцию альтернирования по заключенным в них индексам. Например,

$$\underset{3}{I} = A_{[l\cdot}^{\cdot h} A_{h\cdot}^{\cdot k} A_{k]\cdot}^{\cdot l} = \frac{1}{6} \delta_{hkl}^{pqr} A_{p\cdot}^{\cdot h} A_{q\cdot}^{\cdot k} A_{r\cdot}^{\cdot l} . \tag{3}$$

Выполняя операцию альтернирования в (2), можно получить формулы Варинга связывающие между собой инварианты системы (2) и системы (1).

Совместные инварианты некоторого набора, состоящего из нескольких тензоров/псевдотензоров, определяются следами степеней внутренних совместных произведений тензоров, составляющих набор.

Системы инвариантов (1) и (2) являются бесконечными множествами. Кроме того, целая рациональная функция (с числовыми коэффициентами) от нескольких инвариантов системы также будет (при известных условиях) инвариантом того же набора.

В связи с этим, возникает понятие неприводимого инварианта системы, т.е. такого инварианта, который не является целой рациональной функцией от некоторых других инвариантов той же системы. Множество всех неприводимых инвариантов системы называется её полной системой инвариантов, т.е. множество инвариантов, представляющих собой целые рациональные функции инвариантов и если, кроме того, никакой из инвариантов не является целой рациональной функцией остальных (или некоторых из них).

Следует отметить, что с монография [2] посвящена построению систем инвариантов для различных наборов тензоров. Однако, в ней и ее английском оригинале присутствуют досадные опечатки [2, С. 65, Табл. 2]. Среди индивидуальных инвариантов матрицы $\mathbf{a}$ присутствует инвариант $\mathbf{b}^3$. В строке для набора совместных инвариантов двух симметричных и двух антисимметричных матриц второго ранга $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ отсутствуют инварианты $\mathbf{u}^2\mathbf{avb}^{2*\dagger}$, вместо инвариантов $\mathbf{uva}^2\mathbf{b}^{*\dagger}$ присутствуют инварианты $\mathbf{uva}^2\mathbf{b}^*$ и $\mathbf{uvba}^{2*}$. Однако, руководствуясь статьями [5, 6] можно составить верный полный набор индивидуальных и совместных гемитропных инвариантов двух симметричных и двух антисимметричных тензоров второго ранга (см. [6, P. 80, Table 1]). Вместе с тем, первую часть статьи [5] следует читать с осторожностью, т.к. по утверждению самого автора в ней также присутствуют неточности.

Настоящая работа продолжает цикл работ [19—21], посвященных формулировкам энергетических форм нелинейных микрополярных континуумов. Здесь. предлагается алгоритм получения аппроксимации пятого порядка потенциала силовых и моментных напряжений гемитропного микрополярного упругого тела, учитывающего (кроме базовой квадлатичной аппроксимации) поправки вплоть до пятого алгебраического порядка, при систематическом использовании теории алгебраических инвариантов. С этой целью обсуждается полный перечень неприводимых инвариантов для системы двух асимметричных тензоров второго ранга в форме инвариантных следов. В результате предложен исходный набор из 86 инвариантных следов, состоящий из 8 индивидуальных инвариантов, 17 парных, 44 инвариантных троек и 17 инвариантных четверок. Здесь классификация проведена по количеству тензорных литер (максимальное число литер равно 4). Максимальная степень исходных инваринатов равна 6.

Из 86 элементов затем отфильтрованы 63 следа по правилу возрастания алгебраических степеней инвариантов: 2 линейных инварианта, 6 квадратичных, 12 кубических, 19 четвертой степени, 24 инварианта пятой степени. Предложена схема построения инвариантов пятой степени, разбитых для удобства по семи группам, на основе правил: произведения линейных инвариантов между собой, попарные произведения квадратичных и кубических инвариантов между собой, попарные произведения инвариантов первой и четвертой степени, произведения линейных и кубических инвариантов, произведения линейных, возведенных в куб, и квадратичных инвариантов, произведения линейных и квадратов квадратичных инвариантов, исходные инварианты пятой степени.

Таким образом, гемитропный микрополярный потенциал определяется с помощью 366 механических модулей. Получены определяющие уравнения для силовых и моментных напряжений, включающие поправки второй, третьей и четвертой алгебраической степени, справедливые в произвольной криволинейной системе координат.

Изложение в значительной степени использует терминологию, обозначения, методы и результаты, развитые в предыдущих статьях [17—32].

1. Инвариантные следы не выше пятой степени и образующие целый рациональный базис относительно гемитропной группы. Рассмотрим систему, состоящую из двух асимметричных тензоров второго ранга. Каждый из этих тензоров можно представить в виде алгебраической суммы симметричной и антисимметричной частей, т.е.

$$\mathbf{A}+\mathbf{V};\qquad \mathbf{B}+\mathbf{W}. \tag{4}$$

При этом, справедливы следующие равенства:

$$\begin{aligned}\mathbf{A}&=\mathbf{A}^{\mathrm{T}};\quad \mathbf{V}=-\mathbf{V}^{\mathrm{T}};\\ \mathbf{B}&=\mathbf{B}^{\mathrm{T}};\quad \mathbf{W}=-\mathbf{W}^{\mathrm{T}}.\end{aligned} \tag{5}$$

Используя результаты, полученные в работах [2, 5, 6], для системы, состоящей из двух симметричных **A**, **B** и двух антисимметричных **V**, **W** тензоров второго ранга, можно построить систему исходных инвариантов. Следует отметить, что рассуждения о совместных и индивидуальных инвариантах такой системы существенно зависят от размерности пространства. Положим далее, что она равна 3. Полный набор исходных индивидуальных и совместных гемитропных инвариантов указанной системы тензоров состоит из 86 неприводимых элементов [2, 5, 6], упорядоченных согласно [2, С. 65, Табл. 2], с исправлениями:

$$
\begin{array}{llll}
\mathit{1.})\ \mathrm{tr}\,[\mathbf{A}] & \mathit{2.})\ \mathrm{tr}\,[\mathbf{A}^2] & \mathit{3.})\ \mathrm{tr}\,[\mathbf{A}^3] & \mathit{4.})\ \mathrm{tr}\,[\mathbf{B}] \\
\mathit{5.})\ \mathrm{tr}\,[\mathbf{B}^2] & \mathit{6.})\ \mathrm{tr}\,[\mathbf{B}^3] & \mathit{7.})\ \mathrm{tr}\,[\mathbf{V}^2] & \mathit{8.})\ \mathrm{tr}\,[\mathbf{W}^2] \\
\mathit{9.})\ \mathrm{tr}\,[\mathbf{AB}] & \mathit{10.})\ \mathrm{tr}\,[\mathbf{AB^2}] & \mathit{11.})\ \mathrm{tr}\,[\mathbf{BA^2}] & \mathit{12.})\ \mathrm{tr}\,[\mathbf{A^2B^2}] \\
\mathit{13.})\ \mathrm{tr}\,[\mathbf{V^2A}] & \mathit{14.})\ \mathrm{tr}\,[\mathbf{V^2A^2}] & \mathit{15.})\ \mathrm{tr}\,[\mathbf{V^2AVA^2}] & \mathit{16.})\ \mathrm{tr}\,[\mathbf{V^2B}] \\
\mathit{17.})\ \mathrm{tr}\,[\mathbf{V^2B^2}] & \mathit{18.})\ \mathrm{tr}\,[\mathbf{V^2BVB^2}] & \mathit{19.})\ \mathrm{tr}\,[\mathbf{W^2A}] & \mathit{20.})\ \mathrm{tr}\,[\mathbf{W^2A^2}] \\
\mathit{21.})\ \mathrm{tr}\,[\mathbf{W^2AWA^2}] & \mathit{22.})\ \mathrm{tr}\,[\mathbf{W^2B}] & \mathit{23.})\ \mathrm{tr}\,[\mathbf{W^2B^2}] & \mathit{24.})\ \mathrm{tr}\,[\mathbf{W^2BWB^2}] \\
\mathit{25.})\ \mathrm{tr}\,[\mathbf{VW}] & \mathit{26.})\ \mathrm{tr}\,[\mathbf{VAB}] & \mathit{27.})\ \mathrm{tr}\,[\mathbf{VA^2B}] & \mathit{28.})\ \mathrm{tr}\,[\mathbf{VB^2A}] \\
\mathit{29.})\ \mathrm{tr}\,[\mathbf{VA^2B^2}] & \mathit{30.})\ \mathrm{tr}\,[\mathbf{VA^2BA}] & \mathit{31.})\ \mathrm{tr}\,[\mathbf{VB^2AB}] & \mathit{32.})\ \mathrm{tr}\,[\mathbf{VA^2B^2A}] \\
\mathit{33.})\ \mathrm{tr}\,[\mathbf{VB^2A^2B}] & \mathit{34.})\ \mathrm{tr}\,[\mathbf{V^2AB}] & \mathit{35.})\ \mathrm{tr}\,[\mathbf{V^2A^2B}] & \mathit{36.})\ \mathrm{tr}\,[\mathbf{V^2B^2A}] \\
\mathit{37.})\ \mathrm{tr}\,[\mathbf{V^2AVB}] & \mathit{38.})\ \mathrm{tr}\,[\mathbf{V^2AVB^2}] & \mathit{39.})\ \mathrm{tr}\,[\mathbf{V^2BVA^2}] & \mathit{40.})\ \mathrm{tr}\,[\mathbf{WAB}] \\
\mathit{41.})\ \mathrm{tr}\,[\mathbf{WA^2B}] & \mathit{42.})\ \mathrm{tr}\,[\mathbf{WB^2A}] & \mathit{43.})\ \mathrm{tr}\,[\mathbf{WA^2B^2}] & \mathit{44.})\ \mathrm{tr}\,[\mathbf{WA^2BA}] \\
\mathit{45.})\ \mathrm{tr}\,[\mathbf{WB^2AB}] & \mathit{46.})\ \mathrm{tr}\,[\mathbf{WA^2B^2A}] & \mathit{47.})\ \mathrm{tr}\,[\mathbf{WB^2A^2B}] & \mathit{48.})\ \mathrm{tr}\,[\mathbf{W^2AB}] \\
\mathit{49.})\ \mathrm{tr}\,[\mathbf{W^2A^2B}] & \mathit{50.})\ \mathrm{tr}\,[\mathbf{W^2B^2A}] & \mathit{51.})\ \mathrm{tr}\,[\mathbf{W^2AWB}] & \mathit{52.})\ \mathrm{tr}\,[\mathbf{W^2AWB^2}] \\
\mathit{53.})\ \mathrm{tr}\,[\mathbf{W^2BWA^2}] & \mathit{54.})\ \mathrm{tr}\,[\mathbf{VWA}] & \mathit{55.})\ \mathrm{tr}\,[\mathbf{VWA^2}] & \mathit{56.})\ \mathrm{tr}\,[\mathbf{V^2WA}] \\
\mathit{57.})\ \mathrm{tr}\,[\mathbf{W^2VA}] & \mathit{58.})\ \mathrm{tr}\,[\mathbf{V^2WA^2}] & \mathit{59.})\ \mathrm{tr}\,[\mathbf{W^2VA^2}] & \mathit{60.})\ \mathrm{tr}\,[\mathbf{V^2AWA^2}] \\
\mathit{61.})\ \mathrm{tr}\,[\mathbf{W^2AVA^2}] & \mathit{62.})\ \mathrm{tr}\,[\mathbf{VWB}] & \mathit{63.})\ \mathrm{tr}\,[\mathbf{VWB^2}] & \mathit{64.})\ \mathrm{tr}\,[\mathbf{V^2WB}] \\
\mathit{65.})\ \mathrm{tr}\,[\mathbf{W^2VB}] & \mathit{66.})\ \mathrm{tr}\,[\mathbf{V^2WB^2}] & \mathit{67.})\ \mathrm{tr}\,[\mathbf{W^2VB^2}] & \mathit{68.})\ \mathrm{tr}\,[\mathbf{V^2BWB^2}] \\
\mathit{69.})\ \mathrm{tr}\,[\mathbf{W^2BVB^2}] & \mathit{70.})\ \mathrm{tr}\,[\mathbf{VWAB}] & \mathit{71.})\ \mathrm{tr}\,[\mathbf{VWBA}] & \mathit{72.})\ \mathrm{tr}\,[\mathbf{VWA^2B}] \\
\mathit{73.})\ \mathrm{tr}\,[\mathbf{VWB^2A}] & \mathit{74.})\ \mathrm{tr}\,[\mathbf{WVA^2B}] & \mathit{75.})\ \mathrm{tr}\,[\mathbf{WVB^2A}] & \mathit{76.})\ \mathrm{tr}\,[\mathbf{VWA^2B^2}] \\
\mathit{77.})\ \mathrm{tr}\,[\mathbf{VWA^2BA}] & \mathit{78.})\ \mathrm{tr}\,[\mathbf{VWB^2AB}] & \mathit{79.})\ \mathrm{tr}\,[\mathbf{V^2WAB}] & \mathit{80.})\ \mathrm{tr}\,[\mathbf{W^2VAB}] \\
\mathit{81.})\ \mathrm{tr}\,[\mathbf{V^2AWB}] & \mathit{82.})\ \mathrm{tr}\,[\mathbf{W^2AVB}] & \mathit{83.})\ \mathrm{tr}\,[\mathbf{V^2BWA^2}] & \mathit{84.})\ \mathrm{tr}\,[\mathbf{V^2AWB^2}] \\
\mathit{85.})\ \mathrm{tr}\,[\mathbf{W^2BVA^2}] & \mathit{86.})\ \mathrm{tr}\,[\mathbf{W^2AVB^2}]. & &
\end{array}
\tag{6}
$$

Здесь и далее будем опускать операцию внутреннего произведения тензоров, т.е. запись $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ сокращается до $\mathbf{AB}$. В дальнейших рассуждениях ограничимся гемитропными инвариантами не выше пятой степени из набора (6). Таких инвариантов оказывается всего 63. Для удобства перенумеруем их согласно следующим правилам: 1.) инварианты нумеруются в порядке возрастания их алгебраической степени; 2.) — в порядке увеличения количества различных сомножителей во внутреннем произведении; 3.) — в алфавитном порядке литер. При этом главным является правило 1.), а привила 2.) и 3.) — подчиненными. Кроме того, правило 3.) подчинено также правилу 2.). В таком случае получим следующий упорядоченный набор инвариантов не выше пятой степени:

$$
\begin{array}{llll}
1.)\ \mathrm{tr}\,[\mathbf{A}] & 2.)\ \mathrm{tr}\,[\mathbf{B}] & 3.)\ \mathrm{tr}\,[\mathbf{A}^2] & 4.)\ \mathrm{tr}\,[\mathbf{B}^2] \\
5.)\ \mathrm{tr}\,[\mathbf{V}^2] & 6.)\ \mathrm{tr}\,[\mathbf{W}^2] & 7.)\ \mathrm{tr}\,[\mathbf{AB}] & 8.)\ \mathrm{tr}\,[\mathbf{VW}] \\
9.)\ \mathrm{tr}\,[\mathbf{A}^3] & 10.)\ \mathrm{tr}\,[\mathbf{B}^3] & 11.)\ \mathrm{tr}\,[\mathbf{AB}^2] & 12.)\ \mathrm{tr}\,[\mathbf{BA}^2] \\
13.)\ \mathrm{tr}\,[\mathbf{V}^2\mathbf{A}] & 14.)\ \mathrm{tr}\,[\mathbf{V}^2\mathbf{B}] & 15.)\ \mathrm{tr}\,[\mathbf{W}^2\mathbf{A}] & 16.)\ \mathrm{tr}\,[\mathbf{W}^2\mathbf{B}] \\
17.)\ \mathrm{tr}\,[\mathbf{VAB}] & 18.)\ \mathrm{tr}\,[\mathbf{WAB}] & 19.)\ \mathrm{tr}\,[\mathbf{VWA}] & 20.)\ \mathrm{tr}\,[\mathbf{VWB}] \\
21.)\ \mathrm{tr}\,[\mathbf{A}^2\mathbf{B}^2] & 22.)\ \mathrm{tr}\,[\mathbf{V}^2\mathbf{A}^2] & 23.)\ \mathrm{tr}\,[\mathbf{V}^2\mathbf{B}^2] & 24.)\ \mathrm{tr}\,[\mathbf{W}^2\mathbf{A}^2] \\
25.)\ \mathrm{tr}\,[\mathbf{W}^2\mathbf{B}^2] & 26.)\ \mathrm{tr}\,[\mathbf{VA}^2\mathbf{B}] & 27.)\ \mathrm{tr}\,[\mathbf{WA}^2\mathbf{B}] & 28.)\ \mathrm{tr}\,[\mathbf{VB}^2\mathbf{A}] \\
29.)\ \mathrm{tr}\,[\mathbf{WB}^2\mathbf{A}] & 30.)\ \mathrm{tr}\,[\mathbf{VWA}^2] & 31.)\ \mathrm{tr}\,[\mathbf{VWB}^2] & 32.)\ \mathrm{tr}\,[\mathbf{V}^2\mathbf{AB}] \\
33.)\ \mathrm{tr}\,[\mathbf{W}^2\mathbf{AB}] & 34.)\ \mathrm{tr}\,[\mathbf{V}^2\mathbf{WA}] & 35.)\ \mathrm{tr}\,[\mathbf{V}^2\mathbf{WB}] & 36.)\ \mathrm{tr}\,[\mathbf{W}^2\mathbf{VA}] \\
37.)\ \mathrm{tr}\,[\mathbf{W}^2\mathbf{VB}] & 38.)\ \mathrm{tr}\,[\mathbf{VWAB}] & 39.)\ \mathrm{tr}\,[\mathbf{VWBA}] & 40.)\ \mathrm{tr}\,[\mathbf{VA}^2\mathbf{B}^2] \\
41.)\ \mathrm{tr}\,[\mathbf{VA}^2\mathbf{BA}] & 42.)\ \mathrm{tr}\,[\mathbf{VB}^2\mathbf{AB}] & 43.)\ \mathrm{tr}\,[\mathbf{V}^2\mathbf{A}^2\mathbf{B}] & 44.)\ \mathrm{tr}\,[\mathbf{V}^2\mathbf{B}^2\mathbf{A}] \\
45.)\ \mathrm{tr}\,[\mathbf{V}^2\mathbf{AVB}] & 46.)\ \mathrm{tr}\,[\mathbf{WA}^2\mathbf{B}^2] & 47.)\ \mathrm{tr}\,[\mathbf{WA}^2\mathbf{BA}] & 48.)\ \mathrm{tr}\,[\mathbf{WB}^2\mathbf{AB}] \\
49.)\ \mathrm{tr}\,[\mathbf{W}^2\mathbf{A}^2\mathbf{B}] & 50.)\ \mathrm{tr}\,[\mathbf{W}^2\mathbf{B}^2\mathbf{A}] & 51.)\ \mathrm{tr}\,[\mathbf{W}^2\mathbf{AWB}] & 52.)\ \mathrm{tr}\,[\mathbf{V}^2\mathbf{WA}^2] \\
53.)\ \mathrm{tr}\,[\mathbf{W}^2\mathbf{VA}^2] & 54.)\ \mathrm{tr}\,[\mathbf{V}^2\mathbf{WB}^2] & 55.)\ \mathrm{tr}\,[\mathbf{W}^2\mathbf{VB}^2] & 56.)\ \mathrm{tr}\,[\mathbf{VWA}^2\mathbf{B}] \\
57.)\ \mathrm{tr}\,[\mathbf{VWB}^2\mathbf{A}] & 58.)\ \mathrm{tr}\,[\mathbf{WVA}^2\mathbf{B}] & 59.)\ \mathrm{tr}\,[\mathbf{WVB}^2\mathbf{A}] & 60.)\ \mathrm{tr}\,[\mathbf{V}^2\mathbf{WAB}] \\
61.)\ \mathrm{tr}\,[\mathbf{W}^2\mathbf{VAB}] & 62.)\ \mathrm{tr}\,[\mathbf{V}^2\mathbf{AWB}] & 63.)\ \mathrm{tr}\,[\mathbf{W}^2\mathbf{AVB}] &
\end{array}
\qquad (7)
$$

Каждый из инвариантных следов снабжается индивидуальным идентификационным номером. Отметим, что в наборе (7) присутствует: два инварианта первой степени — 1.), 2.); шесть инвариантов второй степени — 3.)–8.); двенадцать инвариантов третьей степени — 9.)–20.); девятнадцать инвариантов четвертой степени — 21.)–39.); двадцать четыре инварианта пятой степени — 40.)–63.).

Сначала выберем линейные инварианты из списка (7). Их всегда два:

$$1,\ 2. \qquad (8)$$

Сформируем затем набор квадратичных инвариантов из приведенного списка. Ясно, что указанные инварианты суть (номера указывают на сами инварианты):

$$
\begin{array}{l}
1^2,\ 1\cdot 2; \\
2^2; \\
3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8.
\end{array}
\qquad (9)
$$

Набор (9) состоит из 9 квадратичных гемитропных инвариантов, которые были использованы ранее для построения квадратичной энергетической формы гемитропного микрополярного упругого тела [17, 18, 28—30].

Для определения аппроксимаций более высокой степени (третьей, четвертой, пятой, шестой ...) энергетических форм в конечном итоге необходимо расширить систему рациональных инвариантов до инвариантов более высоких целых степеней (3, 4, 5, ...).

Выпишем далее неприводимую систему кубических инвариантов, представляющих собой совместные произведения инвариантов из списка (7) общей степени 3. Полный перечень из 28 кубических гемитропных инвариантов принимает вид:

$$\begin{aligned}
&1^3,\ 1^2\cdot 2,\ 1\cdot 2^2;\\
&2^3;\\
&1\cdot 3,\ 1\cdot 4,\ 1\cdot 5,\ 1\cdot 6,\ 1\cdot 7,\ 1\cdot 8;\\
&2\cdot 3,\ 2\cdot 4,\ 2\cdot 5,\ 2\cdot 6,\ 2\cdot 7,\ 2\cdot 8;\\
&9,\ 10,\ 11,\ 12,\ 13,\ 14,\ 15,\ 16,\ 17,\ 18,\ 19,\ 20.
\end{aligned}\tag{10}$$

Найдем полный набор инвариантов четвертой степени, представляющих собой произведения инвариантов из списка (7) общей итоговой алгебраической степени 4 по следующей схеме. Сначала найдем произведения линейных инвариантов друг с другом:

$$\begin{aligned}
&1^4,\ 1^3\cdot 2,\ 1^2\cdot 2,\ 1\cdot 2^3;\\
&2^4.
\end{aligned}\tag{11}$$

Затем отберем произведения квадратичных инвариантов друг с другом:

$$\begin{aligned}
&3^2,\ 3\cdot 4,\ 3\cdot 5,\ 3\cdot 6,\ 3\cdot 7,\ 3\cdot 8;\\
&4^2,\ 4\cdot 5,\ 4\cdot 6,\ 4\cdot 7,\ 4\cdot 8;\\
&5^2,\ 5\cdot 6,\ 5\cdot 7,\ 5\cdot 8;\\
&6^2,\ 6\cdot 7,\ 6\cdot 8;\\
&7^2,\ 7\cdot 8;\\
&8^2.
\end{aligned}\tag{12}$$

Произведения общей четвертой алгебраической степени, включающие линейные и квадратичные инварианты, вычисляются согласно:

$$\begin{aligned}
&1^2\cdot 3,\ 1^2\cdot 4,\ 1^2\cdot 5,\ 1^2\cdot 6,\ 1^2\cdot 7,\ 1^2\cdot 8;\\
&2^2\cdot 3,\ 2^2\cdot 4,\ 2^2\cdot 5,\ 2^2\cdot 6,\ 2^2\cdot 7,\ 2^2\cdot 8;\\
&1\cdot 2\cdot 3,\ 1\cdot 2\cdot 4,\ 1\cdot 2\cdot 5,\ 1\cdot 2\cdot 6,\ 1\cdot 2\cdot 7,\ 1\cdot 2\cdot 8.
\end{aligned}\tag{13}$$

Произведения четвертой степени, состоящие из линейных и кубических инвариантов, перечисляются ниже:

$$\begin{aligned}
&1\cdot 9,\ 1\cdot 10,\ 1\cdot 11,\ 1\cdot 12,\ 1\cdot 13,\ 1\cdot 14,\ 1\cdot 15,\ 1\cdot 16,\ 1\cdot 17,\ 1\cdot 18,\ 1\cdot 19,\ 1\cdot 20;\\
&2\cdot 9,\ 2\cdot 10,\ 2\cdot 11,\ 2\cdot 12,\ 2\cdot 13,\ 2\cdot 14,\ 2\cdot 15,\ 2\cdot 16,\ 2\cdot 17,\ 2\cdot 18,\ 2\cdot 19,\ 2\cdot 20.
\end{aligned}\tag{14}$$

Наконец отделим исходные инварианты четвертой степени:

$$21,\ 22,\ 23,\ 24,\ 25,\ 26,\ 27,\ 28,\ 29,\ 30,\ 31,\ 32,\ 33,\ 34,\ 35,\ 36,\ 37,\ 38,\ 39. \quad (15)$$

Объединив полученные группы произведений (11), (12), (13), (14), (15) получим искомый полный набор из $5+21+18+24+19=87$ инвариантов четвертой степени.

Найдем теперь полный набор инвариантов пятой алгебраической степени, представляющих собой совместные произведения инвариантов из списка (7) общей алгебраической степени 5 по схеме, которая была использована для получения полного набора гемитропных инвариантов общей алгебраической степени 4.

Сначала найдем произведения линейных инвариантов друг с другом:

$$\begin{aligned}&1^5,\ 1^4\cdot 2,\ 1^3\cdot 2^2,\ 1^2\cdot 2^3,\ 1\cdot 2^4;\\ &2^5.\end{aligned} \quad (16)$$

Произведения квадратичных и кубических инвариантов друг с другом примут вид:

$$\begin{aligned}&3\cdot 9,\ 3\cdot 10,\ 3\cdot 11,\ 3\cdot 12,\ 3\cdot 13,\ 3\cdot 14,\ 3\cdot 15,\ 3\cdot 16,\ 3\cdot 17,\ 3\cdot 18, 3\cdot\ 19,\ 3\cdot 20;\\ &4\cdot 9,\ 4\cdot 10,\ 4\cdot 11,\ 4\cdot 12,\ 4\cdot 13,\ 4\cdot 14,\ 4\cdot 15,\ 4\cdot 16,\ 4\cdot 17,\ 4\cdot 18,\ 4\cdot 19,\ 4\cdot 20;\\ &5\cdot 9,\ 5\cdot 10,\ 5\cdot 11,\ 5\cdot 12,\ 5\cdot 13,\ 5\cdot 14,\ 5\cdot 15,\ 5\cdot 16,\ 5\cdot 17,\ 5\cdot 18,\ 5\cdot 19,\ 5\cdot 20;\\ &6\cdot 9,\ 6\cdot 10,\ 6\cdot 11,\ 6\cdot 12,\ 6\cdot 13,\ 6\cdot 14,\ 6\cdot 15,\ 6\cdot 16,\ 6\cdot 17,\ 6\cdot 18,\ 6\cdot 19,\ 6\cdot 20;\\ &7\cdot 9,\ 7\cdot 10,\ 7\cdot 11,\ 7\cdot 12,\ 7\cdot 13,\ 7\cdot 14,\ 7\cdot 15,\ 7\cdot 16,\ 7\cdot 17,\ 7\cdot 18,\ 7\cdot 19,\ 7\cdot 20;\\ &8\cdot 9,\ 8\cdot 10,\ 8\cdot 11,\ 8\cdot 12,\ 8\cdot 13,\ 8\cdot 14,\ 8\cdot 15,\ 8\cdot 16,\ 8\cdot 17,\ 8\cdot 18,\ 8\cdot 19,\ 8\cdot 20.\end{aligned} \quad (17)$$

Произведения инвариантов первой и четвертой степеней примут вид:

$$\begin{aligned}&1\cdot 21,\ 1\cdot 22,\ 1\cdot 23,\ 1\cdot 24,\ 1\cdot 25,\ 1\cdot 26,\ 1\cdot 27,\ 1\cdot 28,\ 1\cdot 29,\ 1\cdot 30,\\ &1\cdot 31,\ 1\cdot 32,\ 1\cdot 33,\ 1\cdot 34,\ 1\cdot 35,\ 1\cdot 36,\ 1\cdot 37,\ 1\cdot 38,\ 1\cdot 39;\\ &2\cdot 21,\ 2\cdot 22,\ 2\cdot 23,\ 2\cdot 24,\ 2\cdot 25,\ 2\cdot 26,\ 2\cdot 27,\ 2\cdot 28,\ 2\cdot 29,\ 2\cdot 30,\\ &2\cdot 31,\ 2\cdot 32,\ 2\cdot 33,\ 2\cdot 34,\ 2\cdot 35,\ 2\cdot 36,\ 2\cdot 37,\ 2\cdot 38,\ 2\cdot 39.\end{aligned} \quad (18)$$

Произведения инвариантов первой и третьей степеней примут вид:

$$\begin{aligned}&1^2\cdot 9,\ 1^2\cdot 10,\ 1^2\cdot 11,\ 1^2\cdot 12,\ 1^2\cdot 13,\ 1^2\cdot 14,\\ &1^2\cdot 15,\ 1^2\cdot 16,\ 1^2\cdot 17,\ 1^2\cdot 18,\ 1^2\cdot 19,\ 1^2\cdot 20;\\ &2^2\cdot 9,\ 2^2\cdot 10,\ 2^2\cdot 11,\ 2^2\cdot 12,\ 2^2\cdot 13,\ 2^2\cdot 14,\\ &2^2\cdot 15,\ 2^2\cdot 16,\ 2^2\cdot 17,\ 2^2\cdot 18,\ 2^2\cdot 19,\ 2^2\cdot 20;\\ &1\cdot 2\cdot 9,\ 1\cdot 2\cdot 10,\ 1\cdot 2\cdot 11,\ 1\cdot 2\cdot 12,\ 1\cdot 2\cdot 13,\ 1\cdot 2\cdot 14,\\ &1\cdot 2\cdot 15,\ 1\cdot 2\cdot 16,\ 1\cdot 2\cdot 17,\ 1\cdot 2\cdot 18,\ 1\cdot 2\cdot 19,\ 1\cdot 2\cdot 20.\end{aligned} \quad (19)$$

Произведения кубов инвариантов первой и второй степеней друг с другом примут вид:

$$\begin{aligned}
&1^3\cdot 3,\ 1^3\cdot 4,\ 1^3\cdot 5,\ 1^3\cdot 6,\ 1^3\cdot 7,\ 1^3\cdot 8;\\
&2^3\cdot 3,\ 2^3\cdot 4,\ 2^3\cdot 5,\ 2^3\cdot 6,\ 2^3\cdot 7,\ 2^3\cdot 8;\\
&1^2\cdot 2\cdot 3,\ 1^2\cdot 2\cdot 4,\ 1^2\cdot 2\cdot 5,\ 1^2\cdot 2\cdot 6,\ 1^2\cdot 2\cdot 7,\ 1^2\cdot 2\cdot 8;\\
&1\cdot 2^2\cdot 3,\ 1\cdot 2^2\cdot 4,\ 1\cdot 2^2\cdot 5,\ 1\cdot 2^2\cdot 6,\ 1\cdot 2^2\cdot 7,\ 1\cdot 2^2\cdot 8.
\end{aligned}\tag{20}$$

Произведения инвариантов первой степени и квадратов квадратичных инвариантов примут вид:

$$\begin{aligned}
&1\cdot 3^2,\ 1\cdot 3\cdot 4,\ 1\cdot 3\cdot 5,\ 1\cdot 3\cdot 6,\ 1\cdot 3\cdot 7,\ 1\cdot 3\cdot 8;\\
&1\cdot 4^2,\ 1\cdot 4\cdot 5,\ 1\cdot 4\cdot 6,\ 1\cdot 4\cdot 7,\ 1\cdot 4\cdot 8;\\
&1\cdot 5^2,\ 1\cdot 5\cdot 6,\ 1\cdot 5\cdot 7,\ 1\cdot 5\cdot 8;\\
&1\cdot 6^2,\ 1\cdot 6\cdot 7,\ 1\cdot 6\cdot 8;\\
&1\cdot 7^2,\ 1\cdot 7\cdot 8;\\
&1\cdot 8^2;\\
&2\cdot 3^2,\ 2\cdot 3\cdot 4,\ 2\cdot 3\cdot 5,\ 2\cdot 3\cdot 6,\ 2\cdot 3\cdot 7,\ 2\cdot 3\cdot 8;\\
&2\cdot 4^2,\ 2\cdot 4\cdot 5,\ 2\cdot 4\cdot 6,\ 2\cdot 4\cdot 7,\ 2\cdot 4\cdot 8;\\
&2\cdot 5^2,\ 2\cdot 5\cdot 6,\ 2\cdot 5\cdot 7,\ 2\cdot 5\cdot 8;\\
&2\cdot 6^2,\ 2\cdot 6\cdot 7,\ 2\cdot 6\cdot 8;\\
&2\cdot 7^2,\ 2\cdot 7\cdot 8;\\
&2\cdot 8^2.
\end{aligned}\tag{21}$$

Наконец отберем исходные инварианты пятой алгебраически степени:

$$\begin{aligned}
&40,\ 41,\ 42,\ 43,\ 44,\ 45,\ 46,\ 47,\ 48,\ 49,\ 50,\ 51,\\
&52,\ 53,\ 54,\ 55,\ 56,\ 57,\ 58,\ 59,\ 60,\ 61,\ 62,\ 63.
\end{aligned}\tag{22}$$

Объединив группы произведений исходных вариантов друг с другом (16)–(22) получим искомый полный набор из $6 + 72 + 38 + 36 + 24 + 42 + 24 = 242$ гемитропных инварианта пятой степени.

2. Аппроксимация пятого порядка энергетической формы гемитропного микрополярного упругого тела. Опираясь на результаты предыдущего раздела, построим систему индивидуальных и совместных целых рациональных алгебраических инвариантов симметричных и антисимметричных частей асимметричных тензоров деформаций и тензора изгиба–кручения. Для этого следует положить:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{A} = \operatorname{sym}\boldsymbol{\epsilon}, \quad \mathbf{B} = \operatorname{sym}\boldsymbol{\kappa},\\
&\mathbf{V} = \operatorname{asym}\boldsymbol{\epsilon}, \quad \mathbf{W} = \operatorname{asym}\boldsymbol{\kappa}.
\end{aligned}\tag{23}$$

В смешанных компонентах соотношения (23) примут вид

$$\begin{aligned} A_{s\cdot}^{\cdot k} &= \frac{1}{2}\left[\epsilon_{s\cdot}^{\cdot k} + \epsilon_{\cdot s}^{k\cdot}\right], \quad B_{s\cdot}^{\cdot k} = \frac{1}{2}\left[\kappa_{s\cdot}^{\cdot k} + \kappa_{\cdot s}^{k\cdot}\right], \\ V_{s\cdot}^{\cdot k} &= \frac{1}{2}\left[\epsilon_{s\cdot}^{\cdot k} - \epsilon_{\cdot s}^{k\cdot}\right], \quad W_{s\cdot}^{\cdot k} = \frac{1}{2}\left[\kappa_{s\cdot}^{\cdot k} - \kappa_{\cdot s}^{k\cdot}\right]. \end{aligned} \tag{24}$$

Воспользовавшись заменой (23) и принимая схему нумерации из работ [17, 18], систему квадратичных гемитропных инвариантов (9) можно выписать согласно [33], а систему гемитропных кубических инвариантов (10) согласно [20]. Аналогичным способом можно получить систему гемитропных инвариантов четвертой степени.

A-представление аппроксимации четвертого порядка энергетической формы гемитропного микрополярного упругого тела, соответствующее системе инвариантов второй, третьей, четвертой и пятой степеней запишем в сокращенной форме:

$$\mathscr{U} = \sum_{\mathfrak{a}=1}^{9} {}^2\underset{\mathfrak{a}}{C}\, {}^2\underset{\mathfrak{a}}{\mathrm{I}} + \sum_{\mathfrak{c}=1}^{28} {}^3\underset{\mathfrak{c}}{C}\, {}^3\underset{\mathfrak{c}}{\mathfrak{J}} + \sum_{\mathfrak{m}=1}^{87} {}^4\underset{\mathfrak{m}}{C}\, {}^4\underset{\mathfrak{m}}{\mathfrak{K}} + \sum_{\mathfrak{s}=1}^{242} {}^5\underset{\mathfrak{s}}{C}\, {}^5\underset{\mathfrak{s}}{\mathfrak{L}}, \tag{25}$$

где введены новые обозначения для определяющих модулей: ${}^2\underset{\mathfrak{a}}{C}$ $(\mathfrak{a} = 1, ..., 9)$ — определяющие модули квадратичного приближения; ${}^3\underset{\mathfrak{c}}{C}$ $(\mathfrak{c} = 1, ..., 28)$ — определяющие модули, связанные с кубическими поправками; ${}^4\underset{\mathfrak{m}}{C}$ $(\mathfrak{m} = 1, ..., 87)$ — определяющие модули, связанные с поправками четвертой степени; ${}^5\underset{\mathfrak{s}}{C}$ $(\mathfrak{s} = 1, ..., 242)$ — определяющие модули, связанные с поправками четвертой степени; ${}^2\underset{\mathfrak{a}}{\mathrm{I}}$ $(\mathfrak{a} = 1, ..., 9)$ — квадратичные инварианты; ${}^3\underset{\mathfrak{c}}{\mathfrak{J}}$ $(\mathfrak{c} = 1, ..., 28)$ — кубические инварианты; ${}^4\underset{\mathfrak{m}}{\mathfrak{K}}$ $(\mathfrak{m} = 1, ..., 87)$ — инварианты четвертой степени; ${}^5\underset{\mathfrak{s}}{\mathfrak{L}}$ $(\mathfrak{s} = 1, ..., 242)$ — инварианты пятой степени. Стоит отметить чувствительность некоторых определяющих модулей к зеркальным отражениям и инверсиям трехмерного пространства, что связано с возможностью присвоения нечетного алгебраического веса тензору изгиба–кручения.

Определяющие модули $(9 + 28 + 87 + 242 = 366)$: ${}^2\underset{\mathfrak{a}}{C}$ $(\mathfrak{a} = 1, ..., 9)$; ${}^3\underset{\mathfrak{c}}{C}$ $(\mathfrak{c} = 1, ..., 28)$; ${}^4\underset{\mathfrak{m}}{C}$ $(\mathfrak{m} = 1, ..., 87)$ и ${}^5\underset{\mathfrak{s}}{C}$ $(\mathfrak{s} = 1, ..., 242)$, присутствующие в потенциале силовых и моментных напряжений (25), являются неопределенными коэффициентами в линейной комбинации неприводимой системы инвариантов второй, третьей, четвертой и пятой алгебраических степеней системы двух асимметричных тензоров второго ранга.

Определяющие уравнения для силовых и моментных напряжений, соответствующие энергетической форме (25), получены как в виде

$$t_{\cdot k}^{s\cdot} = \frac{\partial \mathscr{U}}{\partial\left(\epsilon_{s\cdot}^{\cdot k}\right)}, \qquad \mu_{\cdot k}^{s\cdot} = \frac{\partial \mathscr{U}}{\partial\left(\kappa_{s\cdot}^{\cdot k}\right)}. \tag{26}$$

Для симметричных и антисимметричных частей силовых и моментных напряжений справедливы следующие соотношения

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\big[t_{s\cdot}^{\cdot k} + t_{\cdot s}^{k\cdot}\big] &= \frac{1}{2}\Big[\frac{\partial \mathscr{U}}{\partial\,(\epsilon_{s\cdot}^{\cdot k})} + \frac{\partial \mathscr{U}}{\partial\,(\epsilon_{\cdot s}^{k\cdot})}\Big],\\
\frac{1}{2}\big[\mu_{s\cdot}^{\cdot k} + \mu_{\cdot s}^{k\cdot}\big] &= \frac{1}{2}\Big[\frac{\partial \mathscr{U}}{\partial\,(\kappa_{s\cdot}^{\cdot k})} + \frac{\partial \mathscr{U}}{\partial\,(\kappa_{\cdot s}^{k\cdot})}\Big],\\
\frac{1}{2}\big[t_{s\cdot}^{\cdot k} - t_{\cdot s}^{k\cdot}\big] &= \frac{1}{2}\Big[\frac{\partial \mathscr{U}}{\partial\,(\epsilon_{s\cdot}^{\cdot k})} - \frac{\partial \mathscr{U}}{\partial\,(\epsilon_{\cdot s}^{k\cdot})}\Big],\\
\frac{1}{2}\big[\mu_{s\cdot}^{\cdot k} - \mu_{\cdot s}^{k\cdot}\big] &= \frac{1}{2}\Big[\frac{\partial \mathscr{U}}{\partial\,(\kappa_{s\cdot}^{\cdot k})} - \frac{\partial \mathscr{U}}{\partial\,(\kappa_{\cdot s}^{k\cdot})}\Big].
\end{aligned}
\tag{27}
$$

Подставив выражение для потенциала (25) в уравнения (26), получим:

$$
\begin{aligned}
t_{\cdot k}^{s\cdot} &= \sum_{\mathfrak{c}=1}^{9} {}^2\underset{\mathfrak{c}}{C}\frac{\partial\,{}^2\underset{\mathfrak{c}}{\mathrm{I}}}{\partial\,(\epsilon_{s\cdot}^{\cdot k})} + \sum_{\mathfrak{a}=1}^{28} {}^3\underset{\mathfrak{a}}{C}\,\frac{\partial\,{}^3\underset{\mathfrak{a}}{\mathfrak{J}}}{\partial\,(\epsilon_{s\cdot}^{\cdot k})} + \sum_{\mathfrak{m}=1}^{87} {}^4\underset{\mathfrak{m}}{C}\,\frac{\partial\,{}^4\underset{\mathfrak{m}}{\mathfrak{K}}}{\partial\,(\epsilon_{s\cdot}^{\cdot k})} + \sum_{\mathfrak{s}=1}^{242} {}^5\underset{\mathfrak{s}}{C}\,\frac{\partial\,{}^5\underset{\mathfrak{s}}{\mathfrak{L}}}{\partial\,(\epsilon_{s\cdot}^{\cdot k})},\\
\mu_{\cdot k}^{s\cdot} &= \sum_{\mathfrak{c}=1}^{9} {}^2\underset{\mathfrak{c}}{C}\frac{\partial\,{}^2\underset{\mathfrak{c}}{\mathrm{I}}}{\partial\,(\kappa_{s\cdot}^{\cdot k})} + \sum_{\mathfrak{a}=1}^{28} {}^3\underset{\mathfrak{a}}{C}\,\frac{\partial\,{}^3\underset{\mathfrak{a}}{\mathfrak{J}}}{\partial\,(\kappa_{s\cdot}^{\cdot k})} + \sum_{\mathfrak{m}=1}^{87} {}^4\underset{\mathfrak{m}}{C}\,\frac{\partial\,{}^4\underset{\mathfrak{m}}{\mathfrak{K}}}{\partial\,(\kappa_{s\cdot}^{\cdot k})} + \sum_{\mathfrak{s}=1}^{242} {}^5\underset{\mathfrak{s}}{C}\,\frac{\partial\,{}^5\underset{\mathfrak{s}}{\mathfrak{L}}}{\partial\,(\kappa_{s\cdot}^{\cdot k})}.
\end{aligned}
\tag{28}
$$

Остается вычислить частные производные в выражениях (28) для получения точной формулировки определяющих уравнений нелинейного гемитропного микрополярного тела, учитывающие поправка второй, третьей, четвертой и пятой алгебраической степени.

3. Заключение. В настоящей работе теория алгебраических инвариантов используется с целью получения аппроксимации пятого порядка энергетической формы нелинейного гемитропного микрополярного упругого тела. Алгоритм развивается на базе исходной системы инвариантных следов. Алгебраические инварианты представляют собой инвариантные следы, вообще говоря, неперестановочных степеней внутренних произведений целых степеней тензоров второго ранга, составляющих исследуемую систему. Подводя итог настоящего исследования, заключаем:

(1) С помощью теории целых рациональных алгебраических инвариантов (псевдоинвариантов) исследовано полное множество неприводимых инвариантов для системы двух асимметричных тензоров второго ранга в форме инвариантных следов. В результате выделен набор из 86 инвариантных следов, состоящий из 8 индивидуальных инвариантов, 17 парных, 44 инвариантных троек и 17 инвариантных четверок, т.е. $8 + 17 + 44 + 17 = 86$.

(2) Из 86 элементов затем отфильтрованы по правилу возрастания алгебраических степеней инвариантов: 2 линейных инварианта, 6 квадратичных, 12 кубических и 19 инвариантов четвертой степени, $(2+6+12+19 = 39)$.

Предложена схема построения 39 инвариантов пятой степени, разбитых по семи группам.

(3) Найдены целые рациональные произведения пятой алгебраической степени, сформированных из исходных 63 элементов, по следующей схеме: произведения линейных инвариантов между собой (5), произведения квадратичных инвариантов между собой (21), произведения линейных и квадратичных инвариантов (18), попарные произведения линейных и кубических инвариантов (24), собственно инварианты четвертой степени (19). Всего: $(5 + 21 + 18 + 24 + 19 = 87)$.

(4) Построен потенциал силовых и моментных напряжений гемитропного микрополярного упругого тела, содержащий аппроксимации второго, третьего, четвертого и пятого порядков. Таким образом микрополярный потенциал содержит всего $9 + 28 + 87 + 242 = 366$ гемитропных механических модулей.

(5) Получены определяющие уравнения для силовых и моментных напряжений, включающие поправки второй, третьей и четвертой алгебраической степени.

ДОПОЛНИТЕЛЬНО

Вклад авторов. Все авторы подтверждают соответствие своего авторства международным критериям ICMJE (все авторы внесли существенный вклад в разработку концепции, проведение исследования и подготовку статьи, прочли и одобрили финальную версию перед публикацией).

Конфликт интересов. Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

Источник финансирования. Работа выполнена по теме государственного задания (№ госрегистрации 124012500437-9).

ADDITIONAL INFORMATION

Authors' contribution. All authors confirm that their authorship meets the international ICMJE criteria (all authors have made a significant contribution to the development of the concept, research and preparation of the article, read and approved the final version before publication).

Competing interests. The authors declare that they have no competing interests.

Funding. This study was in part financially supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (State Registration Number 124012500437-9).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гуревич Г. Б.* Основы теории алгебраических инвариантов. – М., Л. : ГИТТЛ, 1948. – 408 с. – [Gurevich G. B. Foundations of the theory of algebraic invariants. Gröningen, P. Noordhoff, 1964. 429 p.]
2. *Спенсер Э.* Теория инвариантов. – Мир, 1974.
3. *Жилин П. А.* Рациональная механика сплошных сред. – Санкт-Петербург: Изд-во политехн. ун-та, 2012.
4. *Сушкевич А. К.* Основы высшей алгебры. – Онти. Глав. ред. техн.-теоретич. лит-ры, 1937.

5. *Spencer A.*, *Rivlin R.* Isotropic integrity bases for vectors and second-order tensors: part I // Archive for rational mechanics and analysis. – 1962. – Т. 9. – С. 45–63.
6. *Spencer A.* Isotropic integrity bases for vectors and second-order tensors: part II // Archive for rational mechanics and analysis. – 1965. – Т. 18, № 1. – С. 51–82.
7. *Cosserat E. M. P.*, *Cosserat F.* Théorie des corps déformables. – Paris : A. Hermann et fils, 1909. – VI+226.
8. *G unther W.* Zur Statik und Kinematik des Cosseratschen Kontinuums // Abh. Braunschweig. Wiss. Ges. – 1958. – Т. 10. – С. 195–213.
9. *Kessel S.* Lineare Elastizitätstheorie des anisotropen Cosserat-kontinuums // Abhandlungen der Braunschweig. Wiss. Ges. – 1964. – Т. 16. – С. 1–22.
10. *Neuber H.* Über Probleme der Spannungskonzentration im Cosserat-Körper // Acta Mechanica. – 1966. – Т. 2. – С. 48–69. – DOI: 10.1007/BF01176729.
11. *Neuber H.* On the general solution of linear-elastic problems in isotropic and anisotropic Cosserat continua // Applied Mechanics: Proceedings of the Eleventh International Congress of Applied Mechanics Munich (Germany) 1964. – Springer. 1966. – С. 153–158. – DOI: 10.1007/978-3-662-29364-5_16.
12. *Neuber H.* On the Effect of Stress Concentration in Cosserat Continua // Mechanics of Generalized Continua / под ред. E. Kröner. – Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 1968. – С. 109–113.
13. *Nowacki W.* Theory of micropolar elasticity. Berlin: Springer. – Berlin : Springer Science & Business Media, 1972.
14. *Besdo D.* A contribution to the nonlinear theory of the Cosserat-continuum // Acta Mechanica. – 1974. – Т. 20. – С. 105–131.
15. *Nowacki W.* Theory of Asymmetric Elasticity. – Oxford, New York, Toronto, Sydney, Paris, Frankfurt : Pergamon Press, 1986. – viii+383.
16. *Dyszlewicz J.* Micropolar Theory of Elasticity. – Berlin : Springer Science & Business Media, 1986. – xv+345. – (Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics).
17. *Радаев Ю. Н.* Правило множителей в ковариантных формулировках микрополярных теорий механики континуума // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. – 2018. – Т. 22, вып. 3. – С. 504–517. – DOI: 10.14498/vsgtu1635.
18. *Радаев Ю.*, *Мурашкин Е.* Псевдотензорная формулировка механики гемитропных микрополярных сред // Проблемы прочности и пластичности. – 2020. – Т. 82, № 4. – С. 399–412. – DOI: 10.32326/1814-9146-2020-82-4-399-412.
19. *Murashkin E. V.*, *Radayev Y. N.* Theory of Poisson's ratio for a thermoelastic micropolar acentric isotropic solid // Lobachevskii Journal of Mathematics. – Russian Federation, 2024. – Т. 45, № 5. – С. 2378–2390. – DOI: 10.1134/s1995080224602480.
20. *Murashkin E. V.*, *Radayev Y. N.* О квадратичных поправках определяющих уравнений для гемитропного микрополярного упругого тела // Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.] – 2025. – Т. 29, № 2. – С. 207–219. – DOI: 10.14498/vsgtu2144.
21. *Мурашкин Е. В.*, *Радаев Ю. Н.* О квадратичных поправках определяющих уравнений для гемитропного микрополярного упругого тела // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия Физико-математические науки. – Самара, 2025. – Т. 29, № 2. – С. 274–293. – DOI: 10.14498/vsgtu2144.
22. *Murashkin E. V.*, *Radaev Y. N.* Heat Conduction of Micropolar Solids Sensitive to Mirror Reflections of Three–Dimensional Space // Uchenye Zapiski Kazanskogo

Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki. – 2023. – T. 165, № 4. – C. 389–403. – DOI: 10.26907/2541-7746.2023.4.389-403.

23. *Murashkin E. V.*, *Radayev Y. N.* Heat transfer in anisotropic micropolar solids // Mechanics of Solids. – United States, 2023. – T. 58, № 9. – C. 3111–3119. – DOI: 10.3103/S0025654423700255.
24. *Murashkin E. V.*, *Radayev Y. N.* On algebraic triple weights formulation of micropolar thermoelasticity // Mechanics of Solids. – United States, 2024. – T. 59, № 1. – C. 555–580. – DOI: 10.1134/s0025654424700274.
25. *Murashkin E. V.*, *Radaev Y. N.* Coupled Thermoelasticity of Hemitropic Media. Pseudotensor Formulation // Mechanics of Solids. – 2023. – T. 58, № 3. – C. 802–813. – DOI: 10.3103/s0025654423700127.
26. *Мурашкин Е. В.*, *Радаев Ю. Н.* К поливариантности основных уравнений связанной термоупругости микрополярного тела // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния. – 2023. – 3(57). – С. 112–128. – DOI: 10.37972/chgpu.2023.57.3.010.
27. *Мурашкин Е. В.*, *Радаев Ю. Н.* Мультивесовая термомеханика гемитропных микрополярных тел // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния. – 2023. – 4(58). – С. 86–120. – DOI: 10.37972/chgpu.2023.58.4.010.
28. *Мурашкин Е. В.*, *Радаев Ю. Н.* Приведение естественных форм гемитропных энергетических потенциалов к конвенциональным // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния. – 2022. – 4(54). – С. 108–115. – DOI: 10.37972/chgpu.2022.54.4.009.
29. *Мурашкин Е. В.*, *Радаев Ю. Н.* О двух основных естественных формах потенциала асимметричных тензоров силовых и моментных напряжений в механике гемитропных тел // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния. – 2022. – 3(53). – С. 86–100. – DOI: 10.37972/chgpu.2022.53.3.010.
30. *Мурашкин Е. В.* О связи микрополярных определяющих параметров термодинамических потенциалов состояния // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния. – 2023. – 1(55). – С. 110–121. – DOI: 10.37972/chgpu.2023.55.1.012.
31. *Murashkin E. V.*, *Radayev Y. N.* A negative weight pseudotensor formulation of coupled hemitropic thermoelasticity // Lobachevskii Journal of Mathematics. – Russian Federation, 2023. – T. 44, № 6. – C. 2440–2449. – DOI: 10.1134/s1995080223060392.
32. *Krylova E. Y.*, *Murashkin E. V.*, *Radaev Y. N.* The Nye cells and figures for athermic hemitropic, isotropic, and ultraisotropic micropolar elastic solids // Mechanics of Solids. – United States, 2024. – T. 59, № 3. – C. 1311–1320. – DOI: 10.1134/s0025654424603719.
33. *Murashkin E. V.*, *Radayev Y. N.* Cubic Approximation of Stress Potential for a Hemitropic Micropolar Elastic Solid // Lobachevskii Journal of Mathematics. – Russian Federation, 2025. – T. 46, № 5. – C. 2391–2400. – DOI: 10.1134/S1995080225606514.

REFERENCES

1. *Gurevich G. B.* Foundations of the Theory of Algebraic Invariants. – Moscow, Leningrad : GITTL, 1948. – 408 p.
2. *Spencer E.* Theory of Invariants. – Mir, 1974.
3. *Zhilin P. A.* Rational Mechanics of Continuous Media. – Saint Petersburg: Polytechnic University Press, 2012.
4. *Sushkevich A. K.* Foundations of Higher Algebra. – ONTI. Main Editorial Office for Technical, Theoretical Literature, 1937.
5. *Spencer A. J. M.*, *Rivlin R. S.* Isotropic integrity bases for vectors and second-order tensors: part I // Archive for Rational Mechanics and Analysis. – 1962. – Vol. 9. – P. 45–63.
6. *Spencer A. J. M.* Isotropic integrity bases for vectors and second-order tensors: part II // Archive for Rational Mechanics and Analysis. – 1965. – Vol. 18, no. 1. – P. 51–82.
7. *Cosserat E. M. P.*, *Cosserat F.* Théorie des corps déformables. – Paris : A. Hermann et fils, 1909. – VI+226.
8. *G unther W.* Zur Statik und Kinematik des Cosseratschen Kontinuums // Abh. Braunschweig. Wiss. Ges. – 1958. – Vol. 10. – P. 195–213.
9. *Kessel S.* Lineare Elastizitätstheorie des anisotropen Cosserat-kontinuums // Abhandlungen der Braunschweig. Wiss. Ges. – 1964. – Vol. 16. – P. 1–22.
10. *Neuber H.* Über Probleme der Spannungskonzentration im Cosserat-Körper // Acta Mechanica. – 1966. – Vol. 2. – P. 48–69. – DOI: 10.1007/BF01176729.
11. *Neuber H.* On the general solution of linear-elastic problems in isotropic and anisotropic Cosserat continua // Applied Mechanics: Proceedings of the Eleventh International Congress of Applied Mechanics Munich (Germany) 1964. – Springer. 1966. – P. 153–158. – DOI: 10.1007/978-3-662-29364-5_16.
12. *Neuber H.* On the Effect of Stress Concentration in Cosserat Continua // Mechanics of Generalized Continua / ed. by E. Kröner. – Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 1968. – P. 109–113.
13. *Nowacki W.* Theory of Micropolar Elasticity. – Berlin : Springer Science & Business Media, 1972.
14. *Besdo D.* A contribution to the nonlinear theory of the Cosserat-continuum // Acta Mechanica. – 1974. – Vol. 20. – P. 105–131.
15. *Nowacki W.* Theory of Asymmetric Elasticity. – Oxford, New York, Toronto, Sydney, Paris, Frankfurt : Pergamon Press, 1986. – viii+383.
16. *Dyszlewicz J.* Micropolar Theory of Elasticity. – Berlin : Springer Science & Business Media, 1986. – xv+345. – (Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics).
17. *Radayev Y. N.* Multiplier Rule in Covariant Formulations of Micropolar Continuum Mechanics Theories // Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya: Fiziko-matematicheskie nauki. – 2018. – Vol. 22, iss. 3. – P. 504–517. – DOI: 10.14498/vsgtu1635.
18. *Radayev Y. N.*, *Murashkin E. V.* Pseudotensor Formulation of the Mechanics of Hemitropic Micropolar Media // Problemy prochnosti i plastichnosti. – 2020. – Vol. 82, no. 4. – P. 399–412. – DOI: 10.32326/1814-9146-2020-82-4-399-412.

19. *Murashkin E. V.*, *Radayev Y. N.* Theory of Poisson's ratio for a thermoelastic micropolar acentric isotropic solid // Lobachevskii Journal of Mathematics. – Russian Federation, 2024. – Vol. 45, no. 5. – P. 2378–2390. – DOI: 10.1134/s1995080224602480.
20. *Murashkin E. V.*, *Radayev Y. N.* On Quadratic Corrections to the Constitutive Equations for a Hemitropic Micropolar Elastic Solid // Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.] – 2025. – Vol. 29, no. 2. – P. 207–219. – DOI: 10.14498/vsgtu2144.
21. *Murashkin E. V.*, *Radayev Y. N.* On Quadratic Corrections to the Constitutive Equations for a Hemitropic Micropolar Elastic Solid // Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya Fiziko-matematicheskie nauki. – Samara, 2025. – Vol. 29, no. 2. – P. 274–293. – DOI: 10.14498/vsgtu2144.
22. *Murashkin E. V.*, *Radaev Y. N.* Heat Conduction of Micropolar Solids Sensitive to Mirror Reflections of Three–Dimensional Space // Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki. – 2023. – Vol. 165, no. 4. – P. 389–403. – DOI: 10.26907/2541-7746.2023.4.389-403.
23. *Murashkin E. V.*, *Radayev Y. N.* Heat transfer in anisotropic micropolar solids // Mechanics of Solids. – United States, 2023. – Vol. 58, no. 9. – P. 3111–3119. – DOI: 10.3103/S0025654423700255.
24. *Murashkin E. V.*, *Radayev Y. N.* On algebraic triple weights formulation of micropolar thermoelasticity // Mechanics of Solids. – United States, 2024. – Vol. 59, no. 1. – P. 555–580. – DOI: 10.1134/s0025654424700274.
25. *Murashkin E. V.*, *Radaev Y. N.* Coupled Thermoelasticity of Hemitropic Media. Pseudotensor Formulation // Mechanics of Solids. – 2023. – Vol. 58, no. 3. – P. 802–813. – DOI: 10.3103/s0025654423700127.
26. *Murashkin E. V.*, *Radayev Y. N.* On the Polyvariance of the Basic Equations of Coupled Micropolar Thermoelasticity // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I. Ya. Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya. – 2023. – 3(57). – P. 112–128. – DOI: 10.37972/chgpu.2023.57.3.010.
27. *Murashkin E. V*., *Radayev Y. N.* Multiweights Thermomechanics of Hemitropic Micropolar Solids // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I. Ya. Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya. – 2023. – 4(58). – P. 86–120. – DOI: 10.37972/chgpu.2023.58.4.010.
28. *Murashkin E. V*., *Radayev Y. N.* Reduction of Natural Forms of Hemitropic Energy Potentials to Conventional Ones // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I. Ya. Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya. – 2022. – 4(54). – P. 108–115. – DOI: 10.37972/chgpu.2022.54.4.009.
29. *Murashkin E. V*., *Radayev Y. N.* On Two Basic Natural Forms of the Potential of Asymmetric Force-Stress and Couple-Stress Tensors in the Mechanics of Hemitropic Bodies // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I. Ya. Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya. – 2022. – 3(53). – P. 86–100. – DOI: 10.37972/chgpu.2022.53.3.010.
30. *Murashkin E. V.* On the Relation Between Micropolar Constitutive Parameters of Thermodynamic State Potentials // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I. Ya. Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya. – 2023. – 1(55). – P. 110–121. – DOI: 10.37972/chgpu.2023.55.1.012.

31. *Murashkin E. V.*, *Radayev Y. N.* A negative weight pseudotensor formulation of coupled hemitropic thermoelasticity // Lobachevskii Journal of Mathematics. – Russian Federation, 2023. – Vol. 44, no. 6. – P. 2440–2449. – DOI: 10.1134/s1995080223060392.
32. *Krylova E. Y.*, *Murashkin E. V.*, *Radaev Y. N.* The Nye cells and figures for athermic hemitropic, isotropic, and ultraisotropic micropolar elastic solids // Mechanics of Solids. – United States, 2024. – Vol. 59, no. 3. – P. 1311–1320. – DOI: 10.1134/s0025654424603719.
33. *Murashkin E. V.*, *Radayev Y. N.* Cubic Approximation of Stress Potential for a Hemitropic Micropolar Elastic Solid // Lobachevskii Journal of Mathematics. – Russian Federation, 2025. – Vol. 46, no. 5. – P. 2391–2400. – DOI: 10.1134/S1995080225606514.