

В. С. Бондарь

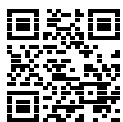
ПОСТРОЕНИЕ ВАРИАНТА ТЕОРИИ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ НА ОСНОВЕ ТЕОРИИ ТЕЧЕНИЯ ПРИ КОМБИНИРОВАННОМ УПРОЧНЕНИИ

Московский политехнический университет, Москва, Россия

Аннотация. На основе уравнений теории пластического течения при комбинированном упрочнении получен прикладной вариант теории упругопластических процессов. Приводится базовый эксперимент, на котором проводится идентификация параметров аппроксимации функционалов пластичности. Верификация прикладного варианта теории упругопластических процессов проводится при сложном нагружении с разгрузкой и обратном нагружении по многозвенной траектории деформаций в виде треугольника. Сравнение результатов расчета и эксперимента дается на ответной траектории напряжений, на скалярных и векторных свойствах.

Ключевые слова: теория пластичности, комбинированное упрочнение, теория упругопластических процессов, базовый эксперимент, идентификация, верификация.

Бондарь Валентин Степанович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры технической механики и компьютерного моделирования; e-mail: tm@mospolytech.ru; <https://orcid.org/0000-0001-6303-4396>



для цитирования: Бондарь В. С. Построение варианта теории упругопластических процессов на основе теории течения при комбинированном упрочнении // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2025. № 3(65). С. 81–91. DOI: 10.37972/chgpu.2025.65.3.003. EDN: QNQKVT

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0).

V. S. Bondar

CONSTRUCTION OF A VARIANT OF THE THEORY OF ELASTOPLASTIC PROCESSES BASED ON THE THEORY OF FLOW IN COMBINED HARDENING

Moscow Polytechnic University, Moscow, Russia

Abstract. Based on the equations of the theory of plastic flow in combined hardening, an applied version of the theory of elastoplastic processes is obtained. A basic experiment is given, in which the identification of the parameters of the approximation of the plasticity functionals is carried out. Verification of the applied version of the theory of elastoplastic processes is carried out under complex loading with unloading and reverse loading along a multi-link deformation trajectory in the form of a triangle. Comparison of the calculation and experimental results is given on the response stress trajectory, on scalar and vector properties.

Keywords: theory of plasticity, combined hardening, theory of elastoplastic processes, basic experiment, identification, verification.

Bondar Valentin Stepanovich, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Department of Technical Mechanics and Computer Modeling; **e-mail:** tm@mospolytech.ru; **https://orcid.org/0000-0001-6303-4396**



to cite this article: Bondar V.S. Construction of a Variant of the Theory of Elastoplastic Processes Based on the Theory of Flow in Combined Hardening // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2025. No 3(65). p. 81–91. DOI: 10.37972/chgpu.2025.65.3.003

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение. Построение математических моделей в теории пластичности является до настоящего времени весьма актуальной проблемой. Наибольшее распространение в практических расчетах нашли дифференциальные теории: варианты теории упругопластических процессов, базирующиеся на общей математической теории пластичности А. А. Ильюшина [1, 2] и теории пластического течения при комбинированном упрочнении, базирующиеся на концентрации микронапряжений, предложенной В. В. Новожиловым [3].

Существенный вклад в развитие теории упругопластических процессов и в изучение процессов сложного нагружения на основе экспериментальных исследований ряда конструкционных материалов при нагружениях по широкому спектру плоских и пространственных траекторий деформаций принадлежит Тверской школе механиков под руководством В. Г. Зубчанинова.

Из теорий пластического течения одной из достаточно экспериментально обоснованных на широком спектре конструкционных материалов и программ сложного нагружения является теория пластичности [4–6].

В настоящей работе рассматривается построение прикладного варианта теории упругопластических процессов и функционалов пластичности на основе уравнений теории пластичности при комбинированном упрочнении. Формулируется базовый эксперимент и метод идентификации материальных параметров, на которых построена аппроксимация функционалов пластичности.

Верификация прикладного варианта теории упругопластических процессов проводится на экспериментальных исследованиях [7] процесса сложного нагружения и сложной разгрузки стали 45 на плоской многозвенной траектории деформаций в виде треугольника с углами излома траектории деформаций равными 135, 135 и 90°. Сравнения результатов расчета и эксперимента приводится на ответной траектории напряжений, на скалярных и векторных свойствах.

1. Векторные представления напряженно-деформированного состояния. Для изучения процессов нагружения согласно векторному представлению А. А. Ильюшина [1, 2] компоненты вектора напряжений $\bar{S}$ определяются следующим образом:

$$\bar{S} = \begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{3}{2}s_{11} \\ \sqrt{3}\left(s_{22} + \frac{s_{11}}{2}\right) \\ \sqrt{3}s_{12} \\ \sqrt{3}s_{13} \\ \sqrt{3}s_{23} \end{Bmatrix}, \quad (1)$$

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma_o, \quad \sigma_o = \frac{1}{3}\sigma_{ii}, \quad S = \sqrt{\frac{3}{2}s_{ij}s_{ij}} = \sigma_u. \quad (2)$$

Здесь σ_{ij} и s_{ij} – тензор и девиатор напряжений; δ_{ij} – символ Кронекера; σ_o – среднее напряжение; σ_u – интенсивность напряжений.

При нагружении тонкостенного трубчатого образца в случае одноосного растяжения (сжатия) вектор напряжений имеет следующий вид:

$$\bar{S} = [\sigma_{11} \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T, \quad (3)$$

в случае кручения

$$\bar{S} = [0 \ 0 \ \sqrt{3}\sigma_{12} \ 0 \ 0]^T, \quad (4)$$

в случае обобщенного плоского состояния

$$\bar{S} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} - \frac{1}{2}(\sigma_{22} + \sigma_{33}) \\ \frac{\sqrt{3}}{2}(\sigma_{22} - \sigma_{33}) \\ \sqrt{3}\sigma_{12} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (5)$$

Компоненты вектора деформаций $\bar{\Theta}$ определяются следующим образом:

$$\bar{\Theta} = \begin{Bmatrix} \Theta_1 \\ \Theta_2 \\ \Theta_3 \\ \Theta_4 \\ \Theta_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} e_{11} \\ \frac{2}{\sqrt{3}}(e_{22} + \frac{e_{11}}{2}) \\ \frac{2}{\sqrt{3}}e_{12} \\ \frac{2}{\sqrt{3}}e_{23} \\ \frac{2}{\sqrt{3}}e_{31} \end{Bmatrix}, \quad (6)$$

$$e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \delta_{ij}\varepsilon_o, \quad \varepsilon_o = \frac{1}{3}\varepsilon_{ii}, \quad \Theta = \sqrt{\frac{2}{3}}e_{ij}e_{ij} = \varepsilon_u. \quad (7)$$

Здесь ε_{ij} – тензор деформаций; e_{ij} – девиатор деформаций; ε_o – средняя деформация; ε_u – интенсивность деформаций.

Длина дуги траектории деформации (накопленная деформация) определяется выражением:

$$s = \int \left(\frac{2}{3} de_{ij} de_{ij} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (8)$$

В случае одноосного растяжения (сжатия) тонкостенного трубчатого образца компоненты вектора деформаций имеют вид:

$$\bar{\Theta} = [\frac{2}{3}(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}) \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T, \quad (9)$$

в случае кручения

$$\bar{\Theta} = [0 \ 0 \ \frac{2}{\sqrt{3}}\varepsilon_{12} \ 0 \ 0]^T, \quad (10)$$

в случае обобщенного плоского состояния

$$\bar{\Theta} = \begin{Bmatrix} \frac{2}{3}(\varepsilon_{11} - \frac{1}{2}(\varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})) \\ \frac{1}{\sqrt{3}}(\varepsilon_{22} - \varepsilon_{33}) \\ \frac{2}{\sqrt{3}}\varepsilon_{12} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (11)$$

Угол между вектором напряжений и касательной к траектории деформаций характеризует векторные свойства и этот угол называется углом сближения ϑ .

$$\vartheta = \arccos \frac{\bar{S} \cdot d\bar{\Theta}}{S \cdot d\bar{\Theta}}. \quad (12)$$

Изменение интенсивности напряжений по траектории деформаций характеризует скалярные свойства.

2. Векторное представление уравнений теории пластического течения. Уравнения теории пластического течения при комбинированном упрочнении в векторном виде представляются следующим образом. Приращение полной деформации $d\bar{\Theta}$ равно сумме приращений упругой $d\bar{\Theta}^e$ и пластической $d\bar{\Theta}^p$ деформаций

$$d\bar{\Theta} = d\bar{\Theta}^e + d\bar{\Theta}^p. \quad (13)$$

Приращение упругой деформации определяется из закона Гука, а приращение пластической деформации – из градиентального закона.

$$d\bar{\Theta}^e = \frac{d\bar{S}}{3G}, \quad (14)$$

$$\frac{d\bar{\Theta}^p}{ds^p} = \frac{1}{C_p(s^p)} (\bar{S} - \bar{A}). \quad (15)$$

Здесь $C_p(s^p)$ – радиус поверхности нагружения; вектор $\bar{A}$ – смещение поверхности нагружения; s^p – длина дуги траектории пластической деформации; G – упругий модуль.

Для поверхности нагружения принимается следующее уравнение:

$$|\bar{S} - \bar{A}| = C_p(s^p). \quad (16)$$

Эволюционное уравнение для смещения центра поверхности нагружения имеет следующий вид:

$$d\bar{A} = g d\bar{\Theta}^p + (g_{\Theta} \bar{\Theta}^p + g_A \bar{A}) ds^p, \quad (17)$$

где g, g_{Θ}, g_A – определяющие функции, выражающиеся через материальные и определяемые из базового эксперимента.

$$g = E_a + \beta \sigma_a, \quad g_{\Theta} = \beta E_a, \quad g_A = -\beta. \quad (18)$$

Если продифференцировать уравнение (15) по s и использовать (13)–(17), то можно получить уравнение

$$N_2 \frac{d^2 \bar{S}}{ds^2} + N_1 \frac{d\bar{S}}{ds} + N_0 \bar{S} = D_0 \bar{\Theta} + D_1 \frac{d\bar{\Theta}}{ds} + D_2 \frac{d^2 \bar{\Theta}}{ds^2}. \quad (19)$$

Здесь

$$N_0 = \frac{M_4}{3G} - M_2, \quad N_1 = \left(1 + \frac{M_1}{3G}\right) \left(\frac{ds^p}{ds}\right)^{-1} - \frac{M_3}{3G} \frac{d^2 s^p}{ds^2} \left(\frac{ds^p}{ds}\right)^{-3}, \quad (20)$$

$$N_2 = \frac{M_3}{3G} \left(\frac{ds^p}{ds}\right)^{-2},$$

$$D_0 = M_4, \quad D_1 = M_1 \left(\frac{ds^p}{ds} \right)^{-1} - M_3 \frac{d^2 s^p}{ds^2} \left(\frac{ds^p}{ds} \right)^{-3}, \quad D_2 = M_3 \left(\frac{ds^p}{ds} \right)^{-2}, \quad (21)$$

$$M_1 = g - g_A C_p(s^p) + \frac{dC_p(s^p)}{ds^p}, \quad M_2 = g_A, \quad M_3 = C_p(s^p), \quad M_4 = g_{\Theta}. \quad (22)$$

На основе общей теории пластичности А. А. Ильюшина [1, 2] вектора деформаций, напряжений и производных напряжений представляются в репере Френе $\{\bar{p}_i\}$ в следующем виде:

$$\bar{\Theta} = D_i \bar{p}_i, \quad \bar{S} = P_i \bar{p}_i, \quad \frac{d\bar{S}}{ds} = P_i^* \bar{p}_i, \quad \frac{d^2 \bar{S}}{ds^2} = P_i^{**} \bar{p}_i, \quad (23)$$

или репере $\{d^i \bar{\Theta}/ds^i\}$:

$$\bar{\Theta} = G_i \frac{d^i \bar{\Theta}}{ds^i}, \quad \bar{S} = Q_i \frac{d^i \bar{\Theta}}{ds^i}, \quad \frac{d\bar{S}}{ds} = Q_i^* \frac{d^i \bar{\Theta}}{ds^i}, \quad \frac{d^2 \bar{S}}{ds^2} = Q_i^{**} \frac{d^i \bar{\Theta}}{ds^i} \quad (24)$$

Из последних трех уравнений (24) можно получить уравнения для производных третьего, четвертого и пятого порядков для деформаций, далее подставить в (23) и тогда получится уравнение, аналогичное уравнению (19). Откуда следует, что теория пластического течения при комбинированном упрочнении является вариантом общей теории пластичности А. А. Ильюшина.

3. Прикладной вариант теории упругопластических процессов.

При активном упругопластическом деформировании с учетом величин материальных параметров сталей и сплавов [4–6] принимаются следующие допущения:

$$\begin{aligned} \bar{\Theta} &\approx \bar{\Theta}^p, \quad s \approx s^p, \\ \frac{ds^p}{ds} &\approx 1, \quad \frac{d^2 s^p}{ds^2} \approx 0, \\ \frac{M_4}{2G M_2} &<< 1, \quad \frac{M_1}{2G} << 1, \quad \frac{M_3}{2G} << 1 \\ \left| D_2 \frac{d^2 \bar{\Theta}}{ds^2} \right| &<< \left| D_1 \frac{d\bar{\Theta}}{ds} + D_0 \bar{\Theta} - N_0 \bar{S} \right|. \end{aligned} \quad (25)$$

Тогда уравнение (19) будет иметь вид:

$$\frac{d\bar{S}}{ds} = N \frac{d\bar{\Theta}}{ds} + N_S \bar{S} + N_{\Theta} \bar{\Theta}, \quad (26)$$

где

$$\begin{aligned} N &= g - g_A C_p(s) + \frac{dC_p(s)}{ds}, \\ N_S &= g_A, \quad N_{\Theta} = g_{\Theta}, \\ g &= E_a + \beta \sigma_a, \quad g_A = -\beta, \quad g_{\Theta} = \beta E_a. \end{aligned} \quad (27)$$

Уравнение (26) можно получить на основе уравнения А. А. Ильюшина [1, 2]

$$\frac{d\bar{S}}{ds} = N \frac{d\bar{\Theta}}{ds} + N_S \bar{S} + X_S \bar{x} \quad (28)$$

при $\bar{x} = \bar{\Theta}$.

Уравнение (26) в работе В. Г. Зубчанинова [8] определяется как "нелокальная форма" теории процессов.

В случае разгрузки и учета эффекта Баушингера для вектора смещения $\bar{A}$ вводится следующее уравнение:

$$\frac{d\bar{A}}{ds} = g \frac{d\bar{\Theta}}{ds} + g_{\Theta} \bar{\Theta} + g_A \bar{A} \quad (29)$$

Тогда условия упругого и пластического состояний примут следующий вид:

$$\begin{aligned} |\bar{S} - \bar{A}| < C_p(s) \cup (\bar{S} - \bar{A}) \cdot d\bar{\Theta} \leq 0 & - \text{упругость,} \\ |\bar{S} - \bar{A}| = C_p(s) \cap (\bar{S} - \bar{A}) \cdot d\bar{\Theta} > 0 & - \text{пластичность.} \end{aligned} \quad (30)$$

И окончательно в случае упругости

$$\frac{d\bar{S}}{ds} = 3G \frac{d\bar{\Theta}}{ds}, \quad \frac{d\bar{A}}{ds} = 0, \quad (31)$$

а в случае пластичности имеют место уравнения (26) и (29).

4. Материальные функции, базовый эксперимент, метод идентификации. Для полученного варианта теории упругопластических процессов необходимо определить следующие материальные параметры G , $C_p(s)$, E_a , β , σ_a на основе следующих результатов экспериментов при одноосном нагружении образцов осевой силой:

- диаграмма растяжения;
- диаграмма растяжения после предварительного сжатия.

В работах [4–6] приведен метод определения материальных параметров на основе этих экспериментов.

Следует отметить, что диаграмму растяжения после предварительного сжатия можно построить, используя принцип Мазинга.

Далее в таблицах 1,2 приведены материальные параметры стали 45.

G , МПа	E_a , МПа	β	σ_a , МПа
80700	6770	265	160

Таблица 1.

s	0	0,0013	0,008	0,018	0,027	0,047	0,21
C_p , МПа	350	330	280	286	296	305	325

Таблица 2.

5. Верификация прикладного варианта теории упругопластических процессов. В качестве верификации прикладного варианта используются результаты экспериментальных исследований стали 45 по плоской траектории деформаций в виде треугольника (рис. 1), рассмотренные в работах В. Г. Зубчанинова [7, 8]. Углы излома траектории составляют 135, 135 и 90°. На рис. 2, 3 и 4 представлены расчетные (сплошные кривые) и экспериментальные (светлые кружки) траектории напряжений, векторные и скалярные свойства.

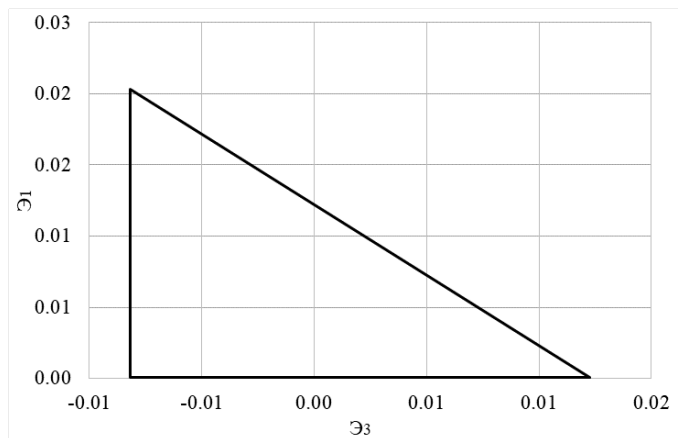


Рис. 1. Траектория деформаций в виде треугольника

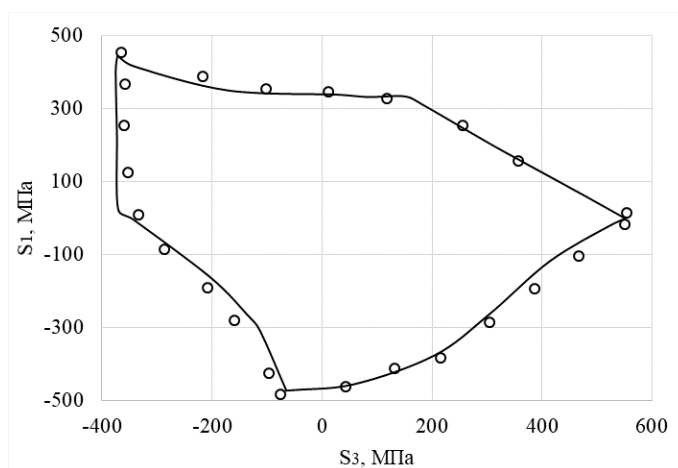


Рис. 2. Траектория напряжений

После первого излома траектории деформаций на 135° на траектории напряжений наблюдается двухкомпонентный линейный упругий участок разгрузки,

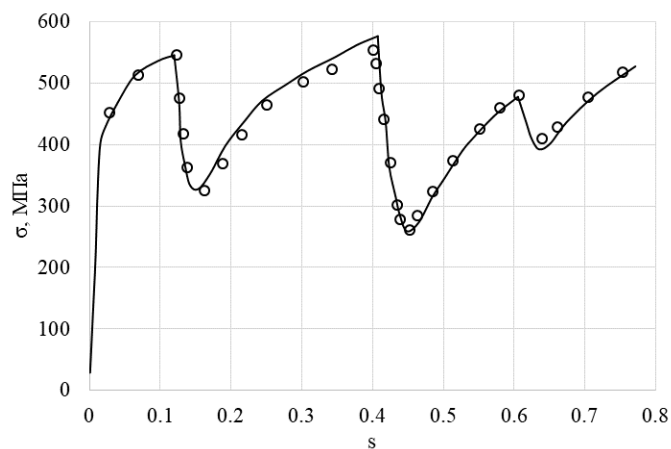


Рис. 3. Скалярные свойства

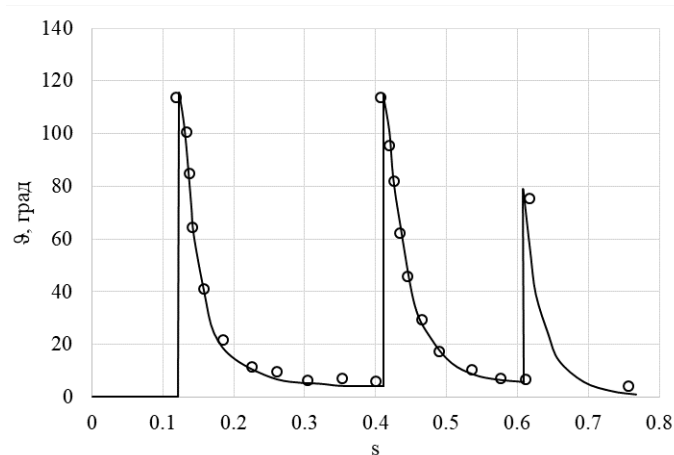


Рис. 4. Векторные свойства

а затем нелинейный пластический. После второго излома траектории деформации на 135° на траектории напряжений наблюдается однокомпонентный линейный упругий участок разгрузки, где изменяется только компонента вектора напряжений S_1 . Далее на нелинейном пластическом участке изменяются уже две компоненты вектора напряжений, хотя на этом участке продолжает изменяться только одна компонента вектора деформаций $\mathcal{E}_1$. После третьего излома траектории деформаций на 90° наблюдается двухкомпонентный нелинейный пластический участок, хотя на этом участке изменяется только одна компонента вектора деформаций $\mathcal{E}_3$.

На рис. 3, где представлены скалярные свойства, имеют место три нырка на диаграмме деформирования. Следует отметить, что первый и второй нырки имеют существенно разную глубину, хотя они отвечают одинаковым углам излома в 135° . Глубина третьего нырка существенно меньше, т.к. и излом траектории деформации здесь значительно меньше – всего 90° .

На рис. 4, где представлены векторные свойства, наблюдается исчерпание отклонения вектора напряжений от касаний к траектории деформаций в конце каждого звена траектории деформаций, т.е. каждый излом траектории деформаций осуществляется из состояния, когда вектор напряжений практически лежит на траектории деформаций.

Окончательно следует отметить, что отличие расчётных и экспериментальных результатов удовлетворительное и составляет не более 10%. Таким образом, вариант теории упругопластических процессов может быть использован для практических исследований процессов сложного нагружения.

Заключение. Получены уравнения теории упругопластических процессов и определены функционалы пластичности, входящие в вариант теории. Аппроксимации функционалов пластичности могут быть определены на основе экспериментальной диаграммы деформирования материала при одноосном растяжении. Рассмотрены расчетно-экспериментальные исследования процесса сложного нагружения по плоской траектории деформаций в виде треугольника, на которой имеет место сложная разгрузка. Отличие расчетных и экспериментальных результатов не превышает 10%, что говорит о возможности использования варианта теории для практических исследований процессов сложного нагружения.

ДОПОЛНИТЕЛЬНО

Вклад авторов. 100 %.

Конфликт интересов. Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

Источник финансирования. Авторы заявляют об отсутствии внешнего финансирования при проведении исследования.

ADDITIONAL INFORMATION

Authors' contribution. 100 %.

Competing interests. The authors declare that they have no competing interests.

Funding. This study was not supported by any external sources of funding.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ильющин А. А. Пластичность. Основы общей математической теории. Москва : Изд-во АН СССР, 1963. 271 с.
- [2] Ильющин А. А. Механика сплошной среды. Москва : Изд-во МГУ, 1990. 310 с.
- [3] Новожилов В. В., Кадашев Ю. И. Микронапряжения в конструкционных материалах. Ленинград : Машиностроение, 1990. 224 с.
- [4] Бондарь В. С., Даншин В. В. Пластичность. Пропорциональные и непропорциональные нагружения. Москва : Физматлит, 2008. 176 с.
- [5] Бондарь В. С. Неупругость. Варианты теории. Москва : Физматлит, 2004. 144 с.

- [6] Bondar V. S. Inelasticity. Variants of the theory. New York : Begell House, 2013. 194 p.
- [7] Зубчанинов В. Г. Механика процессов пластических сред. Москва : Физматлит, 2010. 352 с.
- [8] Зубчанинов В. Г., Охлопков Н. Л., Гараников В. В. Экспериментальная пластичность. Кн. 1. Процессы сложного деформирования. Тверь : ТГТУ, 2003. 172 с.

REFERENCES

- [1] Ilyushin A. A. Plasticity: Foundations of the General Mathematical Theory. Moscow : Academy of Sciences Press, 1963. 271 p. (in Russian).
- [2] Ilyushin A. A. Mechanics of Continuous Media. Moscow : Moscow State University Press, 1990. 310 p. (in Russian).
- [3] Novozhilov V. V., Kadashevich Y. I. Microstresses in Structural Materials. Leningrad : Mashinostroenie, 1990. 224 p. (in Russian).
- [4] Bondar V. S., Danshin V. V. Plasticity: Proportional and Non-Proportional Loadings. Moscow : Fizmatlit, 2008. 176 p. (in Russian).
- [5] Bondar V. S. Inelasticity: Variants of the Theory. Moscow : Fizmatlit, 2004. 144 p. (in Russian).
- [6] Bondar V. S. Inelasticity: Variants of the Theory. New York : Begell House, 2013. 194 p.
- [7] Zubchaninov V. G. Mechanics of Plastic Media Processes. Moscow : Fizmatlit, 2010. 352 p. (in Russian).
- [8] Zubchaninov V. G., Okhlopkov N. L., Garanikov V. V. Experimental Plasticity, Vol. 1: Complex Deformation Processes. Tver : TSTU Press, 2003. 172 p. (in Russian).