

В. И. Гулятьев, А. А. Алексеев, А. Н. Булгаков

ЭКСПЕРИМЕНТЫ НА СЛОЖНОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ КОНСТРУКЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ И ИХ АППРОКСИМАЦИЯ ПО СООТНОШЕНИЯМ В.Г. ЗУБЧАНИНОВА

Тверской государственный технический университет, Тверь, Россия

Аннотация. В статье описаны результаты экспериментальных исследований упругопластического деформирования тонкостенных цилиндрических оболочек, изготовленных из конструкционного материала сталь 45. Опыты выполнены с применением автоматизированного оборудования в лаборатории кафедры сопротивления материалов, теории упругости и пластичности Тверского государственного технического университета. В процессе сложного деформирования образцов по заданным траекториям при резкой смене направления процесса деформирования наблюдается эффект снижения (нырок) напряжений, учет которого важен при прогнозировании отклика на реализуемый процесс. Математическое моделирование, полученных в ходе экспериментов результатов, выполнено по методике, предложенной профессором В.Г. Зубчаниновым. Для плоской двухзвенной траекторий деформирования с углом излома 135° подобраны параметры аппроксимации, выполнен анализ и сформулированы предложения по повышению точности аппроксимации.

Ключевые слова: пластичность, сложное деформирование, процесс нагружения, экспериментальные исследования, аппроксимация, математическое моделирование.

Гулятьев Вадим Иванович, д.т.н., проф.; e-mail: vig0@mail.ru;

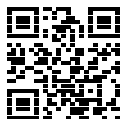
<https://orcid.org/0000-0001-6872-4505>; AuthorID: 174778

Алексеев Андрей Алексеевич, к.т.н., доц.; e-mail: alexeew@bk.ru;

<https://orcid.org/0000-0001-9336-1099>; AuthorID: 640538

Булгаков Александр Николаевич, асс.; e-mail: Elstatik@bk.ru;

<https://orcid.org/0009-0002-9059-1459>; AuthorID: 1091674



для цитирования: Гулятьев В. И., Алексеев А. А., Булгаков А. Н. Эксперименты на сложное деформирование конструкционных материалов и их аппроксимация по соотношениям В.Г. Зубчанинова // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2025. № 3(65). С. 111–124. DOI: 10.37972/chgpu.2025.65.3.005. EDN: SYSYLA

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0).

V. I. Gulyaev, A. A. Alekseev, A. N. Bulgakov

EXPERIMENTS ON COMPLEX DEFORMATION OF STRUCTURAL MATERIALS AND THEIR APPROXIMATION USING V.G. ZUBCHANINOV'S RELATIONS

Tver State Technical University, Tver, Russia

Abstract. The article describes the results of experimental studies of the elastic-plastic deformation of thin-walled cylindrical cells made of the structural material Steel 45. The experiments were performed using automated equipment in the laboratory of the Department of Resistance of Materials, Theory of Elasticity and Plasticity of Tver State Technical University. In the process of complex deformation of samples along specified trajectories, with a sharp change in the direction of the deformation process, the effect of stress reduction (diving) is observed, which is important in predicting the response to the process being implemented. The mathematical modeling of the experimental results was performed according to the methodology proposed by Professor V.G. Zubchaninov. For flat two-link deformation trajectories with a fracture angle of 135° , the approximation parameters were selected, the analysis was performed, and proposals were formulated to improve the accuracy of the approximation.

Keywords: plasticity, complex deformation, loading process, experimental studies, approximation, mathematical modeling.

Vadim I. Gultiaev, Doctor of Technical Sciences, Professor; e-mail: vig0@mail.ru;
<https://orcid.org/0000-0001-6872-4505>; AuthorID: 174778

Andrey A. Alekseev, CSc in Technical Sciences, Associate Professor; e-mail: alexew@bk.ru;
<https://orcid.org/0000-0001-9336-1099>; AuthorID: 640538

Aleksandr N. Bulgakov, Assistant of Department; e-mail: Elstatik@bk.ru;
<https://orcid.org/0009-0002-9059-1459>; AuthorID: 1091674



to cite this article: Gulyaev V. I., Alekseev A. A., Bulgakov A. N. Experiments on complex deformation of structural materials and their approximation using V.G. Zubchaninov's relations // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2025. No 3(65). p. 111–124. DOI: 10.37972/chgpu.2025.65.3.005

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение. Изучение поведения конструкционных материалов при сложном нагружении и деформировании является важным аспектом современной механики деформируемого твердого тела. Понимание и учёт упругопластических свойств материалов играет ключевую роль при проектировании ответственных инженерных конструкций, элементов летательных аппаратов, силовых установок, механизмов автодорожной и железнодорожной техники, узлов промышленного оборудования и т.д.

На протяжении XX века учёными было разработано множество теорий и моделей, описывающих упругопластическое поведение материалов [1]. При этом особое внимание уделялось экспериментальным методам изучения напряжённо-деформированного состояния при сложных видах нагружения и деформирования, позволяющих получить более полную картину работы материала по сравнению с одноосными испытаниями. Однако проведение таких экспериментов имело ряд ограничений, связанных с трудоёмкостью, недостаточной точностью измерений и сложностью обработки данных.

Развитие вычислительной техники позволило автоматизировать процесс проведения и анализа результатов экспериментов. В частности, внедрение автоматизированных исследовательских комплексов, объединяющих силовое оборудование с вычислительными машинами, разработка новых тензометрических приборов открыло новые перспективы для высокоточной регистрации механических воздействий, деформаций и последующего математического моделирования поведения материалов.

Настоящая работа посвящена экспериментальному исследованию упругопластического деформирования конструкционных материалов при сложном нагружении и деформировании с использованием автоматизированного комплекса СЧ-ЭВМ. В ходе исследования проведена аппроксимация полученных экспериментальных данных с применением математических моделей теории процессов сложного пластического деформирования. Полученные результаты позволяют не только уточнить параметры аппроксимации, но и сформировать основу для развития современных подходов в области теории пластичности.

1. Материалы и методы. В качестве образцов на комплексе СЧ-ЭВМ используются тонкостенные цилиндрические оболочки (рис. 1). Перед проведением эксперимента каждый образец проходит проверку геометрических параметров в 12 точках на длине рабочей части $l=110$ мм. Для рассматриваемого опыта наружный диаметр оболочки $D=32.02\pm 0.01$ мм, толщина стенки $h=1.01\pm 0.02$ мм, радиус срединной поверхности $R=15.51\pm 0.03$ мм. По результатам измерений установлено, что параллельность торцевых поверхностей и величина радиального биения цилиндрической оболочки находятся в пределах установленных допусков, изделие соответствует заданным техническим требованиям и может быть допущено к опыту.

Все испытанные образцы были изготовлены из одной партии углеродистой конструкционной нелегированной специальной стали марки 45, химический состав подтвержден результатами спектрального анализа и соответствует ГОСТ

1050-2013. В целях подтверждения начальной изотропии материала образцов и определения механических характеристик первоначально пять образцов были испытаны на простое (пропорциональное) нагружении [2]. По результатам этих опытов материал образцов с достаточной степенью точности можно считать начально изотропным. Поскольку $R \gg h$ напряженное состояние в рабочей части образца размером считалось близким к однородному. В пластической зоне материал считался несжимаемым.

Автоматизированный испытательный комплекс СН-ЭВМ лаборатории механических испытаний кафедры Сопротивления материалов теории упругости и пластичности Тверского государственного технического университета позволяет проводить многоканальное измерение осевой нагрузки P с погрешностью $\pm 0.2\%$, крутящего момента $M_{кр}$ с погрешностью $\pm 0.6\%$, внутреннего давления p с погрешностью $\pm 0.7\%$, изменения длины рабочей части образца Δl с погрешностью $\pm 0.3\%$, изменения радиуса ΔR с погрешностью измерения $\pm 0.5\%$, а также угла взаимного поворота сечений φ с погрешностью $\pm 0.3\%$. Более подробно описание комплекса приводится в работах [3, 4]. Для расчета компонент тензоров напряжений σ_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) и деформаций ε_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) использовались формулы:

$$\sigma_{11} = \frac{P}{2\pi R h}; \quad \sigma_{22} = p \frac{R}{h}; \quad \sigma_{12} = \frac{M_{кр}}{2\pi R^2 h}; \quad \sigma_{13} = \sigma_{23} \approx 0; \quad \sigma_{33} \approx 0$$

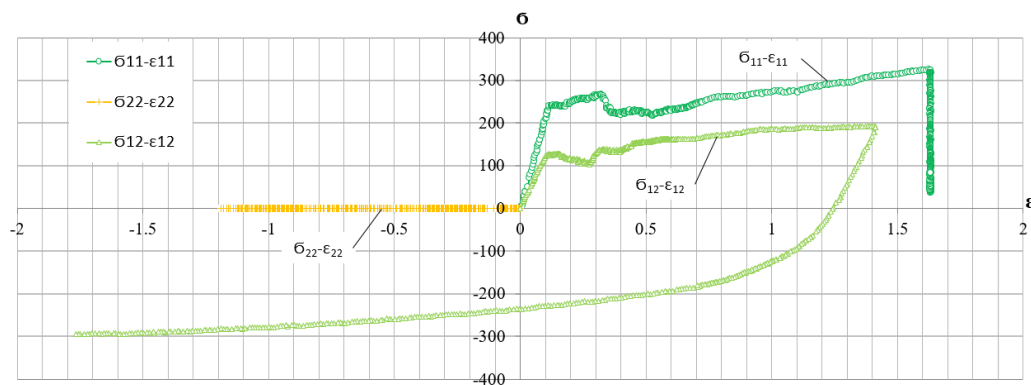
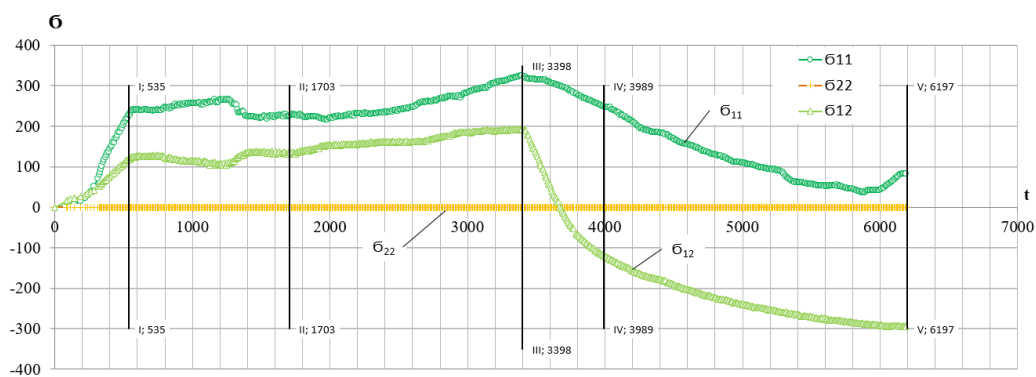
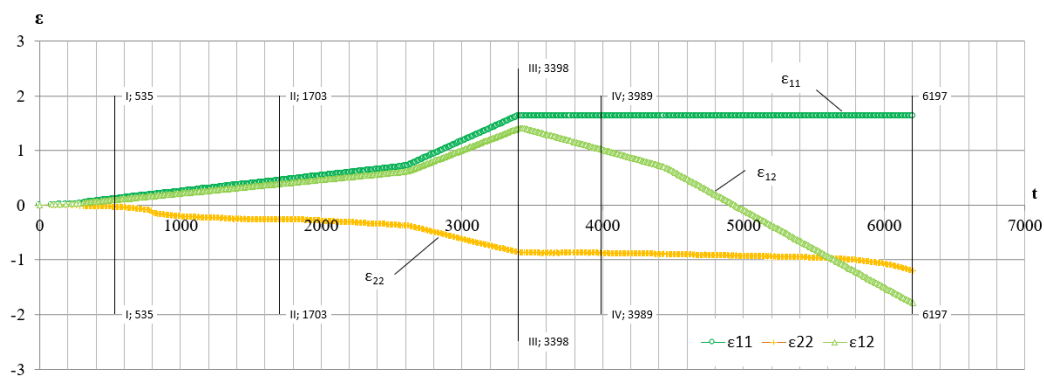
$$\varepsilon_{11} = \frac{\Delta l}{l}; \quad \varepsilon_{22} = \frac{\Delta R}{R}; \quad \varepsilon_{12} = \varphi \frac{R}{2l}; \quad \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} \approx 0; \quad \varepsilon_{33} \approx 0$$

В таблице 1 приведены выборочные данные с комплекса для образца 14, испытанного на знакопеременное кручение после предварительного растяжения с кручением. Среднее значение предела текучести, полученного при испытании на растяжение $\sigma^T = \sigma_T / \sqrt{2/3} = 313 \pm 2$ МПа, значение модуля продольной упругости $E = 218 \pm 9$ ГПа, удвоенный модуль сдвига из испытания на кручение $2G = 141 \pm 3$ ГПа, коэффициент Пуассона принимается $\mu = 0.3$, пластический коэффициент Пуассона $\mu_p \rightarrow 0.5$.

На рисунке 2 приведены диаграммы деформирования σ – ε , на рисунках 3–4 диаграммы зависимостей напряжений и деформаций от времени.



Рис. 1. Оболочка после испытаний

Рис. 2. Диаграммы деформирования σ (МПа) – ϵ (%)Рис. 3. Диаграммы напряжений σ (МПа) по времени t (сек)Рис. 4. Диаграммы деформаций ϵ (%) по времени t (сек)

Методика проведения обработки результатов экспериментальных исследований, используемая в данной работе, базируются на векторном представлении

напряжений и деформаций по А.А. Ильюшину [5]. Значения компонент тензоров девиаторов напряжений S_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) и деформаций Θ_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$), модуля векторов напряжений σ в девиаторном пространстве напряжений Σ_3 , модуля вектора деформаций Θ в девиаторном пространстве деформаций E_3 и длины дуги траектории s производился по формулам [1]:

$$S_1 = \sqrt{\frac{2}{3}} \left(\sigma_{11} - \frac{\sigma_{22}}{2} \right); \quad S_2 = \frac{\sigma_{22}}{\sqrt{2}}; \quad S_3 = \sqrt{2} S_{12} = \sqrt{2} \sigma_{12}$$

$$\Theta_1 = \sqrt{\frac{3}{2}} \varepsilon_{11}; \quad \Theta_2 = \sqrt{2} \left(\varepsilon_{22} + \frac{1}{2} \cdot \varepsilon_{11} \right); \quad \Theta_3 = \sqrt{2} \varepsilon_{12}$$

$$\sigma = \sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2}; \quad \Theta = \sqrt{\Theta_1^2 + \Theta_2^2 + \Theta_3^2}; \quad S = \sqrt{\Delta \Theta_1^2 + \Delta \Theta_2^2 + \Delta \Theta_3^2}$$

Косинус угла отклонения ϑ_1 вектора напряжений $\bar{\sigma}$ от касательной к траектории деформирования $\bar{p}_1$ в каждой точке определялся по формуле:

$$\cos \vartheta_1 = \frac{1}{\sigma} \left(S_1 \frac{\Delta \Theta_1}{\Delta s} + S_2 \frac{\Delta \Theta_2}{\Delta s} + S_3 \frac{\Delta \Theta_3}{\Delta s} \right)$$

2. Аппроксимация и математическое моделирование. Численное моделирование процессов сложного упругопластического деформирования по плоским двухзвенным траекториям осуществлялось решением дифференциальных уравнений методом Рунге-Кутты 4-го порядка малости [1, 6]:

$$\begin{aligned} \frac{dS_i}{ds} &= M_1 \frac{d\Theta_i}{ds} + \left(\frac{d\sigma}{ds} - M_1 \cos \vartheta_1 \right) \frac{S_i}{\sigma} \\ \frac{d\vartheta_1}{ds} &= -\frac{M_1}{\sigma} \sin \vartheta_1 \end{aligned}$$

где S_i, Θ_i ($i = 1, 2, 3$) - координаты векторов напряжений $\bar{\sigma}$ и деформаций $\bar{\Theta}$; s - длина дуги траектории деформирования.

Функционалы процесса, зависящие от параметров внутренней геометрии траектории деформаций, определялись по формулам, предложенным В.Г. Зубчаиновым [7–9]:

$$\begin{aligned} \sigma(s) &= \Phi(s) + A f_0^P \Omega(\Delta s) - \Delta \sigma_k \\ M_1 &= 2G_p + (2G - 2G_p^0) f^q \\ f &= \frac{1 - \cos \vartheta_1}{2}, \quad f_0 = \frac{1 - \cos \vartheta_1^0}{2} \end{aligned}$$

где $\Delta s = s - s_k^T$ - приращение длины дуги траектории после её излома в точке K ; $\Delta \sigma_k = \Phi(s_k^T) - \sigma_k^T$ - разница в точках излома между значениями универсальной функции Одквидста-Ильюшина и расчетным значением модуля вектора напряжений σ_k^T ; $2G_p = \Phi(s)/s$ - удвоенный пластический модуль при простом нагружении; G_p^0 - то же в точке излома траектории; f - функция, учитывающая

ориентацию вектора напряжений в процессе деформирования, f_0 то же в точке излома. Для описания скалярного нырка напряжений после излома траектории деформирования использована функция:

$$\Omega(\Delta s) = - [\gamma \cdot \Delta s \cdot e^{-\gamma \Delta s} + b \cdot (1 - e^{-\gamma \Delta s})]$$

где A , b , γ , p , q – параметры аппроксимаций.

№	$\varepsilon_{11}, \%$	$\varepsilon_{22}, \%$	$\varepsilon_{12}, \%$	σ_{11}, MPa	σ_{22}, MPa	σ_{12}, MPa
1	0.0000	0.0000	0.0000	0.00	0.00	0.00
2	0.0160	-0.0040	0.0243	23.90	0.45	31.15
3	0.0400	-0.0160	0.0416	80.07	0.00	51.70
4	0.0640	-0.0120	0.0555	129.06	0.00	68.39
5	0.0880	-0.0200	0.0763	178.66	0.00	94.72
6	0.1080	-0.0240	0.0972	228.85	0.00	118.16
7	0.1280	-0.0360	0.1145	240.80	0.00	127.48
8	0.1400	-0.0560	0.1215	240.20	0.00	125.23
9	0.1960	-0.1440	0.1631	246.77	0.00	120.09
10	0.2520	-0.2080	0.2151	256.93	0.00	113.67
11	0.3160	-0.2280	0.2741	266.49	0.00	109.49
12	0.4520	-0.2600	0.3921	228.25	0.00	133.90
13	0.4960	-0.2600	0.4268	224.67	0.00	144.82
14	0.6600	-0.3440	0.5691	236.62	0.00	162.80
15	1.1440	-0.6120	0.9890	281.43	0.00	185.27
16	1.6240	-0.8640	1.4054	325.65	0.00	193.94
17	1.6320	-0.8720	1.3880	316.68	0.00	154.77
18	1.6280	-0.8680	1.3568	315.49	0.00	118.16
19	1.6320	-0.8680	1.3290	315.49	0.00	93.76
20	1.6320	-0.8760	1.2978	308.91	0.00	54.91
21	1.6320	-0.8720	1.2735	304.73	0.00	27.94
22	1.6320	-0.8720	1.2423	299.35	0.00	-1.93
23	1.6320	-0.8680	1.2145	293.98	0.00	-27.94
24	1.6320	-0.8720	1.1833	285.61	0.00	-49.13
25	1.6320	-0.8720	1.1520	277.25	0.00	-67.43
26	1.6320	-0.8680	1.1243	270.08	0.00	-82.20
27	1.6280	-0.8680	1.1173	269.48	0.00	-83.81
28	1.6320	-0.8720	1.0584	257.53	0.00	-106.93
29	1.6320	-0.8800	0.9577	237.81	0.45	-135.50
30	1.6320	-0.8920	0.6732	177.46	0.45	-185.92
31	1.6320	-0.9240	-0.0590	111.74	0.45	-239.22
32	1.6320	-0.9560	-0.7391	59.15	0.00	-268.76

Таблица 1. Экспериментальные данные (Образец 14)

Для аппроксимации универсальной функции Одквидста-Ильюшина материала с площадкой текучести, использовались выражения:

$$\sigma = \Phi(s) = \begin{cases} 2Gs, & \text{при } s < s^T \text{ участок I} \\ \sigma^T, & \text{при } s^T \leq s \leq s_*^T \text{ участок II} \\ \sigma^T + \sigma_a \cdot (1 - e^{-\beta(s-s_*^T)}), & \text{при } s > s_*^T \text{ участок III} \end{cases}$$

3. Программы испытаний. Программы экспериментов реализовывались в плоскости $\Theta_1 - \Theta_3$ векторного пространства деформаций. На рисунке 5 (а) показаны экспериментальная и расчетная программы, отклик на реализуемую программу в плоскости $S_1 - S_3$ приведен на рисунке 5 (б). Программа представляет собой пропорциональное растяжение с кручением до значения $\Theta_1 = \Theta_3 = 2\%$, при достижении которого производился излом траектории на угол 135° , после которого осуществлялось знакопеременное кручение.

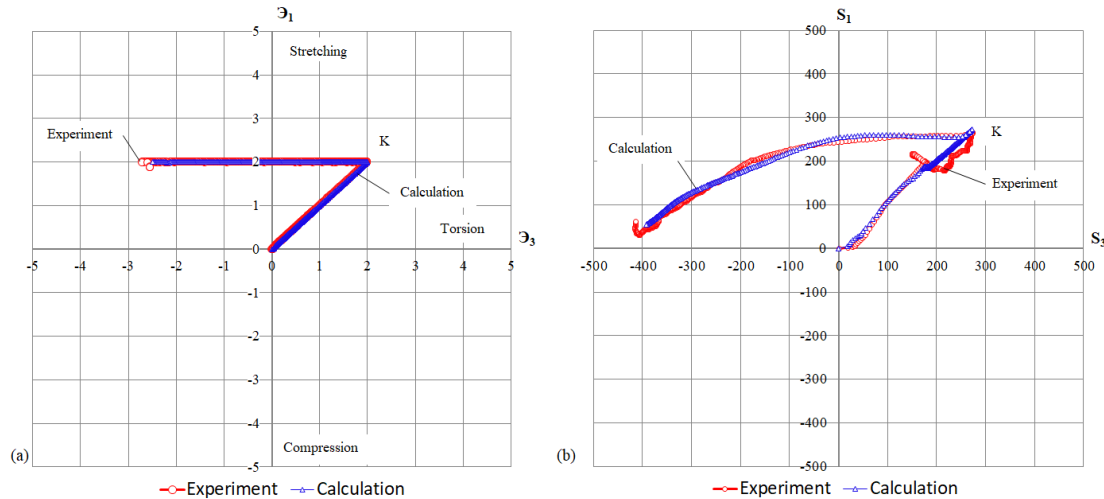
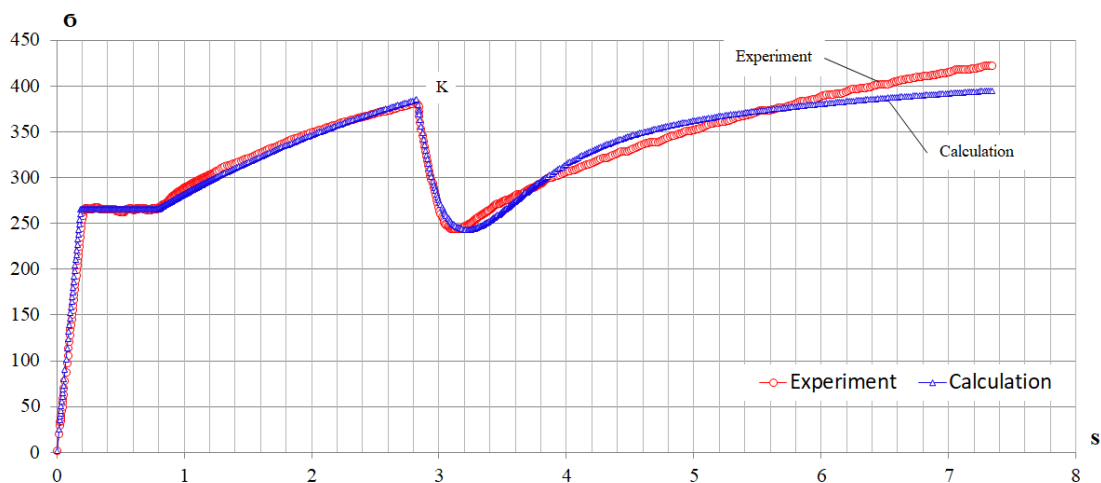
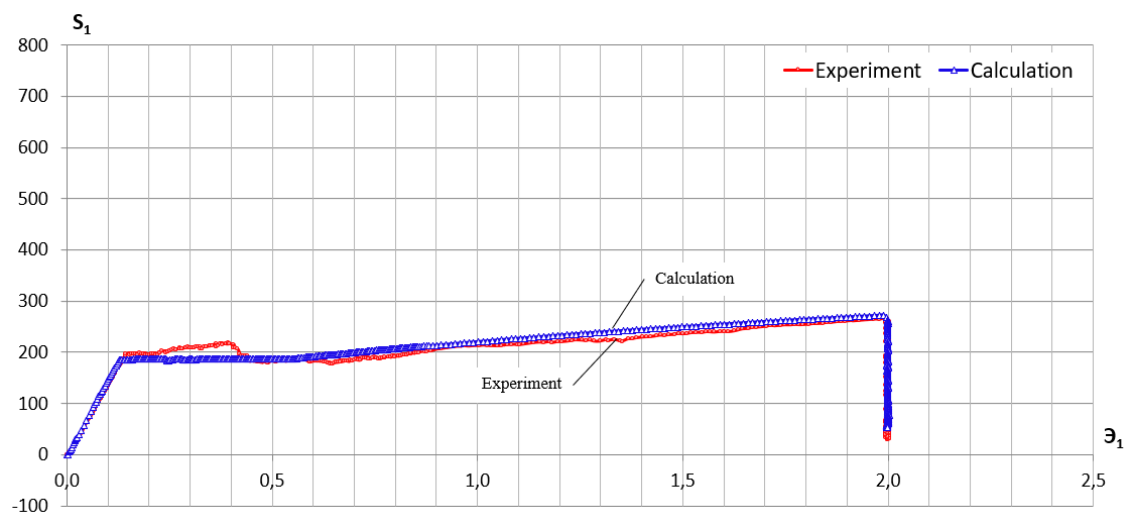


Рис. 5. Экспериментальные и расчетные программы деформирования образцов (а), % и отклик на программу экспериментов (б), МПа

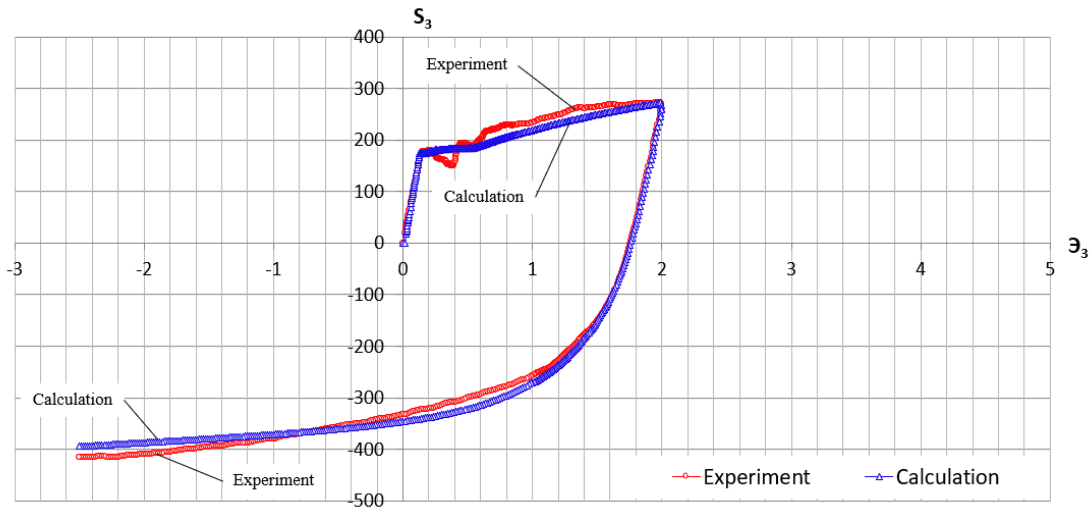
4. Основные результаты. По результатам обработки опытных данных была построена диаграмма деформирования $\sigma - s$ (рис. 6). После излома траектории, в точке K ($\Theta_1 = \Theta_3 = 2\%$), на диаграмме наблюдается «нырок» модуля вектора напряжений. Экспериментальная кривая $\sigma = \sigma(s)$ проходит ниже универсальной кривой $\sigma = \Phi(s)$, при этом примерно оставаясь параллельной ей. Наибольшее отклонение расчетной кривой от экспериментальной кривой на участке до излома не превышает 7,1 МПа, после излома 27,3 МПа.

Рис. 6. Диаграммы деформирования σ (МПа) – s (%)

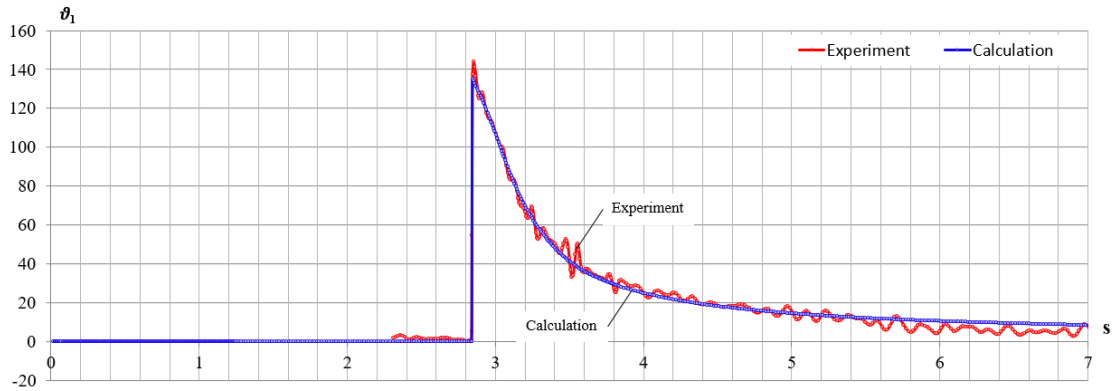
На рисунке 7 показаны локальные диаграммы деформирования в плоскости $S_1 - \Theta_1$, на рисунке 8 в плоскости $S_3 - \Theta_3$. Расчетные кривые лежат достаточно близко к экспериментальным.

Рис. 7. Диаграммы локальные S_1 (МПа) – Θ_1 (%)

На рисунке 9 приведены зависимости угла сближения ϑ_1 от длины дуги траектории s . На участке до излома траектории, при простом пропорциональном деформировании угол сближения, характеризующий векторные свойства материалов имеет значения близкие к 0. После излома траектории деформирования

Рис. 8. Диаграммы локальные S_3 (МПа) – ε_3 (%)

наблюдается скачкообразное возрастание угла на величину близкую к значению угла излома 135° с последующим уменьшением по закону близкому к экспоненциальному. Наибольшее отклонение расчетной диаграммы от экспериментальной не превышает 10%.

Рис. 9. Диаграммы угла сближения ϑ_1 (град) – s (%)

На рисунке 10 показаны совмещённые диаграммы используемые при подборе параметров аппроксимации. Кривая $\sigma = \Phi(s)$ построена при значениях параметров $s^T=0.2$ %, $s_*^T=0.79$ %, $\sigma^T=264.5$ МПа, $\sigma_a=235$ МПа, $\beta=0.35$. Кривая $\sigma = \sigma(s)$ построена при значениях параметров $A=308.3$, $f_0=0.90$, $b=0.30$, $\gamma=2.96$, $p=1.04$, $q=0.75$. Подбор параметров аппроксимации производился по

условию минимизации значения модуля разности экспериментальных и расчетных значений.

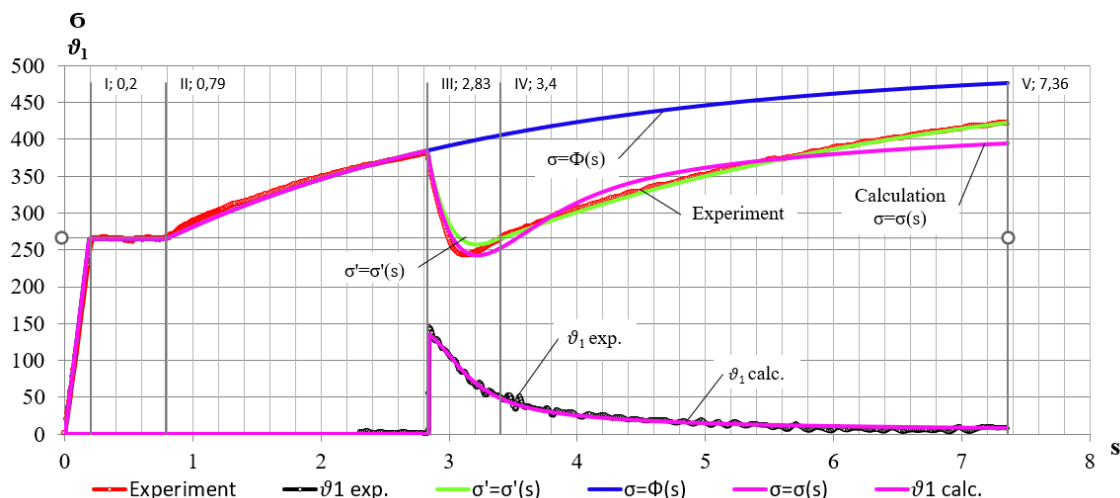


Рис. 10. Совмещенные диаграммы, описывающие процесс определения параметров аппроксимации σ (МПа), ϑ_1 (град), s (%)

Для повышения точности аппроксимации предложено введение дополнительного участка IV, в момент, когда после нырка достигается значение равное σ^T , начиная с которого кривую можно аппроксимировать, используя выражение для универсальной кривой с другим параметром β . На рисунке 10 кривая $\sigma' = \sigma'(s)$ построена при $A=280$ и $\beta=0.28$. Она проходит выше экспериментальной кривой на участке III, однако более точно описывает поведение на участке IV.

Заключение. Таким образом, модель теории упругопластических процессов, использующая аппроксимации В.Г. Зубчанинова достаточно точно описывает поведение материала сталь 45 при деформировании по плоским двухзвенным траекториям с углом излома 135 градусов. Дальнейший интерес представляет сравнение параметров аппроксимации при зеркальном отражении траектории деформирования и больших углах излома. Результаты могут быть полезны при разработке новых теорий и моделей [10], методов математического моделирования [11], при оценке срока службы материалов [12,13], исследовании механизмов деформации [14,15] и т.д.

ДОПОЛНИТЕЛЬНО

Вклад авторов. Все авторы подтверждают соответствие своего авторства международным критериям ICMJE (все авторы внесли существенный вклад в разработку концепции, проведение исследования и подготовку статьи, прочли и одобрили финальную версию перед публикацией).

Конфликт интересов. Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

Источник финансирования. Авторы заявляют об отсутствии внешнего финансирования при проведении исследования.

ADDITIONAL INFORMATION

Authors' contribution. All authors confirm that their authorship meets the international ICMJE criteria (all authors have made a significant contribution to the development of the concept, research and preparation of the article, read and approved the final version before publication).

Competing interests. The authors declare that they have no competing interests.

Funding. This study was not supported by any external sources of funding.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Зубчанинов В.Г. Механика процессов пластических сред. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010. – 352 с. – ISBN 978-5-9221-1235-2.
- [2] Гультяев, В. И. Экспериментальное изучение упругопластического деформирования конструкционных материалов на автоматизированном испытательном комплексе СН-ЭВМ / В. И. Гультяев, А. Н. Булгаков // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2023. – № 2(56). – С. 53-64. – DOI 10.37972/chgpu.2023.56.2.006.
- [3] Зубчанинов В.Г., Охлопков Н.Л., Гараников В.В. Экспериментальная пластичность: Монография. Книга 1. Процессы сложного деформирования. Тверь: ТГТУ, 2003. – 172 с.
- [4] Зубчанинов В.Г., Охлопков Н.Л., Гараников В.В. Экспериментальная пластичность: Монография. Книга 2. Процессы сложного деформирования., Тверь: ТГТУ, 2004. – 184 с.
- [5] Ильюшин А.А. Труды (1946-1966). Т. 2. Пластичность / Составители Е.А. Ильюшина, М.Р. Короткина. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. - 480 с. - ISBN 5-9221-0364-4.
- [6] Алексеев, А. А. Моделирование процессов сложного упругопластического деформирования материалов по плоским траекториям / А. А. Алексеев, В. Г. Зубчанинов, В. И. Гультяев // Упругость и неупругость : материалы Международного научного симпозиума по проблемам механики деформируемых тел, посвященного 110-летию со дня рождения А. А. Ильюшина, Москва, 20–21 января 2021 года. – Москва: Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова Издательский Дом (типография), 2021. – С. 171-176.
- [7] Зубчанинов В.Г. Об определяющих соотношениях теории упругопластических процессов / В.Г. Зубчанинов // Прикл. Механика. 1989. Т.25. №5. – С.3-12.
- [8] Зубчанинов В.Г. Механика сплошных деформируемых сред. – Тверь: ЧуДо, 2000. – 703 с. – ISBN-5-7995-0148-9.
- [9] Зубчанинов В.Г. Математическая теория пластичности / В.Г. Зубчанинов // – Тверь: ТГТУ, 2002. – 300 с.
- [10] Бондарь, В. С. Теории пластичности при сложном нагружении по плоским траекториям деформаций / В. С. Бондарь, Д. Р. Абашев, Д. Ю. Фомин // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2021. – № 3. – С. 35-47. – DOI 10.15593/perm.mech/2021.3.04.
- [11] Молодцов, И. Н. Определяющие уравнения с диссипативными напряжениями / И. Н. Молодцов // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. – 2023. – № 3. – С. 47-55. – DOI 10.55959/MSU0579-9368-1-64-3-8.
- [12] Naimark O, Oborin V, Bannikov M, Ledon D. Critical Dynamics of Defects and Mechanisms of Damage-Failure Transitions in Fatigue // Materials. 2021; 14(10):2554. <https://doi.org/10.3390/ma14102554>.

- [13] Jin-Ha Hwang, Yun-Jae Kim, Jin-Weon Kim, Sang-Eon Kim Initial cyclic hardening behavior of cracked structures under large-amplitude cyclic loading // Engineering Fracture Mechanics, Volume 254, 2021, 107911, ISSN 0013-7944, <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2021.107911>.
- [14] Yanan Hu, Xuejun Deng, Qianhua Kan, Shengchuan Wu, Yali Li, Liming Lei, Leilei Wang, Guozheng Kang Influence of temperature on deformation and damage mechanisms of wire + arc additively manufactured 2219 aluminum alloy // Engineering Fracture Mechanics, Volume 292, 2023, 109675, ISSN 0013-7944. <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2023.109675>.
- [15] Nobutada Ohno, Hisashi Nakamoto, Yusuke Morimatsu, Dai Okumura Modeling of cyclic hardening and evaluation of plastic strain range in the presence of pre-loading and ratcheting // International Journal of Plasticity, Volume 145, 2021, 103074, ISSN 0749-6419. <https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2021.103074>.

REFERENCES

- [1] Zubchaninov V. G. Mechanics of Plastic Media Processes. Moscow : FIZMATLIT, 2010. P. 352. ISBN: 978-5-9221-1235-2.
- [2] Gulyaev V. I., Bulgakov A. N. Experimental Study of Elastoplastic Deformation of Structural Materials on the Automated Testing System SN-EVM // Bulletin of the Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State. 2023. no. 2(56). P. 53–64. DOI: 10.37972/chgpu.2023.56.2.006.
- [3] Zubchaninov V. G., Ohlopkov N. L., Garanikov V. V. Experimental Plasticity: Monograph. Book 1. Complex Deformation Processes. Tver : Tver State Technical University, 2003. P. 172.
- [4] Zubchaninov V. G., Ohlopkov N. L., Garanikov V. V. Experimental Plasticity: Monograph. Book 2. Complex Deformation Processes. Tver : Tver State Technical University, 2004. P. 184.
- [5] Ilyushin A. A. Collected Works (1946–1966). Vol. 2. Plasticity / Ed. by E. A. Il'yushina, M. R. Korotkina. Moscow : FIZMATLIT, 2004. P. 480. ISBN: 5-9221-0364-4.
- [6] Alekseev A. A., Zubchaninov V. G., Gulyaev V. I. Modeling of Complex Elastoplastic Deformation Processes of Materials Along Planar Trajectories // Elasticity and Inelasticity: Proceedings of the International Scientific Symposium Dedicated to the 110th Anniversary of A. A. Ilyushin. Moscow : Moscow State University Publishing House, 2021. P. 171–176.
- [7] Zubchaninov V. G. On the Constitutive Equations of the Theory of Elastoplastic Processes // Applied Mechanics. 1989. Vol. 25, no. 5. P. 3–12.
- [8] Zubchaninov V. G. Mechanics of Continuous Deformable Media. Tver : ChuDo, 2000. P. 703. ISBN: 5-7995-0148-9.
- [9] Zubchaninov V. G. Mathematical Theory of Plasticity. Tver : Tver State Technical University, 2002. P. 300.
- [10] Bondar' V. S., Abashev D. R., Fomin D. Yu. Theories of Plasticity Under Complex Loading Along Planar Strain Trajectories // Bulletin of the Perm National Research Polytechnic University. Mechanics. 2021. no. 3. P. 35–47. DOI: 10.15593/perm.mech/2021.3.04.
- [11] Molodtsov I. N. Constitutive Equations with Dissipative Stresses // Moscow University Bulletin. Series 1: Mathematics. Mechanics. 2023. no. 3. P. 47–55. DOI: 10.55959/MSU0579-9368-1-64-3-8.
- [12] Critical Dynamics of Defects and Mechanisms of Damage-Failure Transitions in Fatigue / O. Naimark [et al.] // Materials. 2021. Vol. 14, no. 10. P. 2554. DOI: 10.3390/ma14102554.
- [13] Initial Cyclic Hardening Behavior of Cracked Structures Under Large-Amplitude Cyclic Loading / Jin-Ha Hwang [et al.] // Engineering Fracture Mechanics. 2021. Vol. 254. P. 107911. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2021.107911.

- [14] Influence of Temperature on Deformation and Damage Mechanisms of Wire + Arc Additively Manufactured 2219 Aluminum Alloy / Yanan Hu [et al.] // Engineering Fracture Mechanics. 2023. Vol. 292. P. 109675. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2023.109675.
- [15] Modeling of Cyclic Hardening and Evaluation of Plastic Strain Range in the Presence of Pre-loading and Ratcheting / Nobutada Ohno [et al.] // International Journal of Plasticity. 2021. Vol. 145. P. 103074. DOI: 10.1016/j.ijplas.2021.103074.