

Д. О. Евтихов<sup>1</sup>, И. Л. Савостьянова<sup>1,2</sup>, С. И. Сенашов<sup>1,2</sup>, О. Н. Черепанова<sup>2</sup>

## КРУЧЕНИЕ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ СТЕРЖНЕЙ ПРОКАТНОГО ПРОФИЛЯ, АРМИРОВАННЫХ УПРУГИМИ ВОЛОКНАМИ

<sup>1</sup>Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика  
М. Ф. Решетнева, Красноярск, Россия

<sup>2</sup>Сибирский федеральный университет, Красноярск, Россия

**Аннотация.** Рассмотрена задача об упругопластическом кручении стержней прокатного профиля, армированных упругими волокнами. Для решения задачи использовался метод законов сохранения. На основе аналитического решения разработаны программы для ЭВМ для нахождения упругопластической границы стержня. Приведены результаты работы программы с различными значениями крутящего параметра для стержней типа "тавр" "двутавр" "швеллер" "крест" и Z-образных профилей. Расчеты производились на персональном компьютере, время представленных в статье расчетов по построению упругопластических границ составляет 35 - 90 минут, в зависимости от вида стержня.

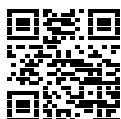
**Ключевые слова:** Упругопластическая граница, задача кручения стержней прокатного профиля, стержни, армированные упругими волокнами, законы сохранения.

**Евтихов Денис Олегович**, аспирант кафедры информационных экономических систем; e-mail: evtikhov\_do@sibsau.ru; AuthorID:1036711

**Савостьянова Ирина Леонидовна**, зам. директора НОЦ Институт космических исследований и высоких технологий; зав. учебно-исследовательской лабораторией фундаментальной и прикладной механики; e-mail: ruppa@inbox.ru; AuthorID:742389

**Сенашов Сергей Иванович**, профессор кафедры информационных экономических систем; профессор кафедры математического моделирования и процессов управления; e-mail: Sen@sibsau.ru; AuthorID:214483

**Черепанова Ольга Николаевна**, директор Института математики и фундаментальной информатики; e-mail: OCherepanova@sfu-kras.ru; AuthorID:151098



**для цитирования:** Евтихов Д. О., Савостьянова И. Л., Сенашов С. И., Черепанова О. Н. Кручение упругопластических стержней прокатного профиля, армированных упругими волокнами // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2025. № 3(65). С. 125-138. DOI: 10.37972/chgpu.2025.65.3.006. EDN: UBFKAC

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0).

D. O. Evtikhov<sup>1</sup>, I. L. Savostyanova<sup>1,2</sup>, S. I. Senashov<sup>1,2</sup>, O. N. Cherepanova<sup>2</sup>.

## TORSION OF ELASTIC-PLASTIC BARS OF ROLLED PROFILE REINFORCED WITH ELASTIC FIBERS

<sup>1</sup>*Reshetnev Siberian State University of Science and Technology, Krasnoyarsk, Russia*

<sup>2</sup>*Siberian Federal University, Krasnoyarsk, Russia*

**Abstract.** The problem of elastic-plastic torsion of rolled profile rods reinforced with elastic fibers is considered. Conservation laws were used to solve the problem. Computer programs for finding the elastic-plastic boundary of the rod are developed. The results of the program operation with different values of the torque parameter for bars T-beam, I-beam, channel, cross and Z-shaped profiles are given. The calculations were performed on a personal computer, the calculation time of the elastic-plastic boundaries presented in the article is 35-90 minutes depending on the type of rod.

**Keywords:** Elastic-plastic boundary, torsion problem of rolled profile rods, rods reinforced with elastic fibers, conservation laws.

**Denis O. Evtikhov**, Scientific Researcher; e-mail: evtikhov\_do@sibsau.ru; AuthorID:1036711

**Irina L. Savostyanova**, Doctor of Physical and Mathematical Sciences; e-mail: ruppa@inbox.ru; AuthorID:742389

**Sergey I. Senashov**, Doctor of Physical and Mathematical Sciences; e-mail: Sen@sibsau.ru; AuthorID:214483

**Olga N. Cherepanova**, Ph.D. of Physical and Mathematical Sciences; e-mail: OCherepanova@sfu-kras.ru; AuthorID:151098



**to cite this article:** Evtikhov D. O., Savostyanova I. L., Senashov S. I., Cherepanova O. N. Torsion of elastic-plastic bars of rolled profile reinforced with elastic fibers // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2025. No 3(65). p. 125-138. DOI: 10.37972/chgpu.2025.65.3.006

*This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)*

**Введение.** Значительный вклад в развитие теории пластичности внесли выдающиеся ученые А.А. Ильюшин, Д.Д. Ивлев, В.Г. Зубчанинов. [1, 2] Их фундаментальные работы заложили основу для современных исследований напряженно-деформированного состояния композиционных материалов, представляющих особый интерес для инженерных исследований.

Современные тенденции в материаловедении демонстрируют возрастающий интерес к композиционным материалам. В работе [3] представлены результаты создания нового композита, изготавливаемого методами порошковой металлургии с использованием комбинации углеродных волокон и желез; показано, что величины прочности при изгибе и растяжении могут превышать 2000 и 1000 МПа. Методология структурно-функционального анализа, рассмотренная в [4], предлагает новый подход к проектированию силовых элементов из композиционных материалов. Разработанные структуры демонстрируют значения удельной несущей способности, приближающиеся к теоретическому максимуму. Исследования [5] посвящены анализу упругого поведения двухслойных композитных систем с адгезионным соединением в условиях плоской деформации. Работа [6] рассматривается поведение материалов при динамических нагрузках, характерных для высокоскоростного соударения. И в [7] рассмотрены композитные системы с упругопластической матрицей и упругими волокнами, ориентированными вдоль оси элемента.

Отдельной задачей, актуальной для инженерных исследований, является задача нахождения упругопластической границы в скручиваемых стержнях. Решение этой задачи позволит дать оценку предела прочности изделия. Так же с точки зрения инженерной практики важно, чтобы пластическому деформированию подвергались только близкие к внешней поверхности слои материала, и чтобы в процессе деформирования не произошло разрушение упрочняемого изделия и не ухудшились его эксплуатационные характеристики. В последнее время широкое распространение получили стержни прокатного профиля, армированные упругими волокнами. Они обладают рядом преимуществ перед металлическими изделиями. Как правило, они меньше весят, и армирование позволяет им выдерживать большие нагрузки до разрушения, чем их металлические аналоги. Однако, устоявшихся методов расчета их несущей способности в настоящее время практически нет.

Традиционные методы симметричного анализа дифференциальных уравнений [8] получили развитие в работах [9–11], где продемонстрирована эффективность законов сохранения для решения краевых задач. Преимущество этого подхода определяется тем, что законы сохранения глобальны по своей сути, в отличие от локальных симметрий, рассмотренных ранее [12].

Развитие решения поставленных проблем приводят к задаче определения упругопластической границы в армированных упругими волокнами стержнях прокатного профиля [14]. До появления работ [15–17] отсутствовали эффективные методы решения задач определения упругопластической границы. Предложенный авторами на основе законов сохранения подход позволил получить

аналитические решения для определения границы пластических деформаций. В данной работе предложен метод построения упругопластической границы в скручиваемых стержнях прокатного профиля, армированных упругими волокнами.

**Постановка задачи.** Рассмотрим задачу кручение стержня прокатного профиля под действием крутящего момента. Предполагается что матрица из прокатного профиля усилена упругими волокнами. Граница контакта слоев расположена вдоль оси  $oz$ . Боковая граница стержня свободна от напряжений, но граница находится в пластическом состоянии. Компоненты тензора напряжений в точке вычисляются через систему контурных интегралов, выведенных из законов сохранения, вычисленных по боковой границе и границе волокон. Критерий перехода в пластическое состояние формулируется через сравнение второго инварианта девиатора напряжений с критическим значением предела текучести материала. В тех точках, где достигается предел текучести определяется пластическое состояние, в остальных – упругое. Это позволяет построить границу между пластической и упругой областями. Данная методика дает способ вычислить упругопластические границы для основных прокатных профилей стержней. Отметим, что предлагаемая методика развивается на основе предыдущих успешных решений для двумерных задач пластичности, для анализа кручения изотропных стержней и упругих сред для тел конечных размеров.

Рассмотрим прямолинейный стержень, изготовленный из упруго-пластического материала, армированный упругими  $n$  волокнами.

Матрица стержня имеет модуль упругости  $G$  и предел текучести при чистом сдвиге  $k$ . Волокна расположены вдоль стержня в произвольном порядке, параллельно оси  $z$ . Каждое волокно имеет круглое сечение, центр располагается в точке  $A_i$  с координатами  $(x_i; y_i)$ , радиус волокна равен  $R$ , модуль упругости  $G_i$ . Пределы текучести волокон превосходят предел текучести матрицы. Касательное напряжение между волокном и матрицей равно  $\tau < k$ .

Заданный процесс описывается уравнением равновесия

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

и уравнением совместности деформаций

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} = \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} + a, \quad (2)$$

где  $a = -2G\theta$ ,  $\theta$  - угол закручивания,  $G$  - модуль упругости.

Граничные условия на боковой поверхности стержня, свободной от напряжений, и находящейся в пластическом состоянии  $\tau_{xz}n_0 + \tau_{yz}m_0 = 0$ ,  $\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 = k^2$ , где  $n_0, m_0$  - компоненты вектора нормали к боковой поверхности; которые можно записать в виде:

$$\tau_{xz} = \pm mk + \tau_{yz} = \pm nk, \quad (3)$$

На границе между волокном и матрицей выполняются условия  $\tau_{xz}m_i - \tau_{yz}n_i = \tau$ ,  $\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 = k^2$ , где  $n_i, m_i$  - компоненты вектора нормали к боковой поверхности  $i$ -го волокна, которые запишем в виде.

$$\tau_{xz} = m\tau \pm n\sqrt{k^2 - \tau^2}, \tau_{yz} = n\tau \pm m\sqrt{k^2 - \tau^2} \quad (4)$$

Далее в формулах (3) - (4) выбирается верхний знак.

### Законы сохранения уравнений (1) - (2)

Для удобства дальнейших вычислений введем следующие обозначения

$$\tau_{xz} = u, \tau_{yz} = v$$

Тогда задача (1) - (4) запишется так

$$F_1 = u_x + v_y = 0, F_2 = u_y - v_x - a = 0. \quad (5)$$

на боковой поверхности

$$u \pm mk, v \mp nk$$

на границе волокна и матрицы

$$u = m\tau \pm n\sqrt{k^2 - \tau^2}, v = n\tau \pm m\sqrt{k^2 - \tau^2}$$

*Определение.* Законом сохранения для системы уравнений (5) назовем выражение вида

$$A_x(x, y, u, v) + B_y(x, y, u, v) = \omega_1 F_1 + \omega_2 F_2, \quad (6)$$

где  $\omega_1, \omega_2$  - некоторые линейные операторы, одновременно не равные тождественно нулю.

Пусть

$$A = \alpha^1 u + \beta^1 v + \gamma^1, B = \alpha^2 u + \beta^2 v + \gamma^2. \quad (7)$$

где  $\alpha^i, \beta^i, \gamma^i$  - функции только от  $x, y$ .

Подставляя (7) в (6), получаем

$$\begin{aligned} \alpha_x^1 + \alpha_y^2 &= 0, \beta_x^1 + \beta_y^2 = 0, \alpha^1 = \omega_1, \\ \beta^1 &= -\omega_2, \alpha^2 = \omega_2, \beta^2 = \omega_1, \gamma_x^1 + \gamma_y^2 = -a\omega_2. \end{aligned}$$

Отсюда следует

$$\alpha_x^1 - \beta_y^1 = 0, \beta_x^1 + \alpha_y^1 = 0, \gamma_x^1 + \gamma_y^2 = -a\beta^1, \quad (8)$$

Рассмотрим для системы уравнений (8) два решения:

$$\begin{aligned} \alpha^1 &= \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \\ \beta^1 &= -\frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \\ \gamma^1 &= -a \operatorname{arctg} \frac{x - x_0}{y - y_0}, \gamma^2 = 0, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned}
\alpha^1 &= \frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \\
\beta^1 &= -\frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \\
\gamma^1 &= 0, \gamma^2 = -a \arctg \frac{y - y_0}{x - x_0},
\end{aligned} \tag{10}$$

где  $x_0, y_0$  - постоянные.

**Вычисление напряженного состояния в точке  $x_0, y_0$**

Пусть  $x_0, y_0$  - произвольная точка, принадлежащая связующему, и пусть в этой точке сохраняющийся ток имеет особенность вида (9) или (10). Тогда из (6) следует

$$\iint_S (A_x + B_y) dx dy = \oint_{\Gamma} A dx - B dy - \sum_{i=1}^n \oint_{\Gamma_i} A dx - B dy - \oint_{\varepsilon} A dx - B dy = 0, \tag{11}$$

где  $\varepsilon$  - окружность:  $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \varepsilon^2$ .

Сечение стержня показано на рисунке 1.

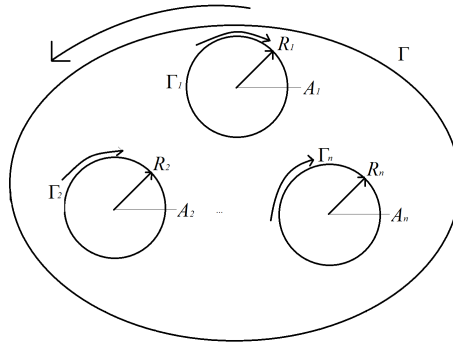


Рис. 1. Сечение стержня

Рассмотрим решение (9), полагая  $x - x_0 = \varepsilon \cos \varphi, y - y_0 = \varepsilon \sin \varphi$  тогда из (11) с учетом (9), при  $\varepsilon \rightarrow 0$  получаем

$$\begin{aligned}
2\pi\tau_{xz}(x_0, y_0) = & \oint_{\Gamma_0} (m_0k \frac{x-x_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} - n_0k \frac{y-y_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} - a \operatorname{arctg} \frac{x-x_0}{y-y_0}) dy - \\
& - (m_0k \frac{y-y_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} - n_0k \frac{x-x_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}) dx + \\
& + \sum_{i=1}^n \oint_{\Gamma_i} (\frac{(m_i\tau + n_i\sqrt{k^2 - \tau^2})(x-x_0)}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} - n_0k \frac{(-n_i\tau + m_i\sqrt{k^2 - \tau^2})(y-y_0)}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}) dy - \\
& - (m_i\tau + n_i\sqrt{k^2 - \tau^2} \frac{y-y_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} + n_i\tau + m_i\sqrt{k^2 - \tau^2} \frac{x-x_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}) dx,
\end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned}
2\pi\tau_{yz}(x_0, y_0) = & \oint_{\Gamma_0} (m_0k \frac{y-y_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} + n_0k \frac{x-x_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}) dy - \\
& - (-m_0k \frac{x-x_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} + n_0k \frac{y-y_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} - a \operatorname{arctg} \frac{y-y_0}{x-x_0}) dx + \\
& + \sum_{i=1}^n \oint_{\Gamma_i} (\frac{(m_i\tau + n_i\sqrt{k^2 - \tau^2})(y-y_0)}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} - n_0k \frac{(-n_i\tau + m_i\sqrt{k^2 - \tau^2})(x-x_0)}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}) dy - \\
& - (- (m_i\tau + n_i\sqrt{k^2 - \tau^2}) \frac{x-x_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} + n_i\tau + m_i\sqrt{k^2 - \tau^2} \frac{y-y_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}) dx,
\end{aligned} \tag{13}$$

Таким образом, формулы (12) и (13) позволяют вычислить напряженное состояние в любой точке связующего материала. Те точки, где  $\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 = k^2$  - будут находиться в пластическом состоянии, остальные точки среды, а также волокна, будут оставаться упругими. Предложенный метод решения позволяет построить упругопластическую границу в скручиваемом стержне и тем самым оценить его несущую способность.

На основе приведенных выше формул нами были в среде Maple разработаны программы для ЭВМ [18–22]. Результаты расчета некоторых из них представлены далее.

На рисунке 2 представлено изменение упругопластические границы прокатного профиля П-образного сечения, армированного упругими волокнами в зависимости от изменения значения крутящего параметра  $a$ .

Профиль "швеллер П-образного сечения" используется в качестве опорного изделия в строительстве и тяжелом машиностроении. Подходит для создания межэтажных перекрытий, лестниц, элементов строительной и специальной техники. Может иметь прямые и наклонные грани полок.

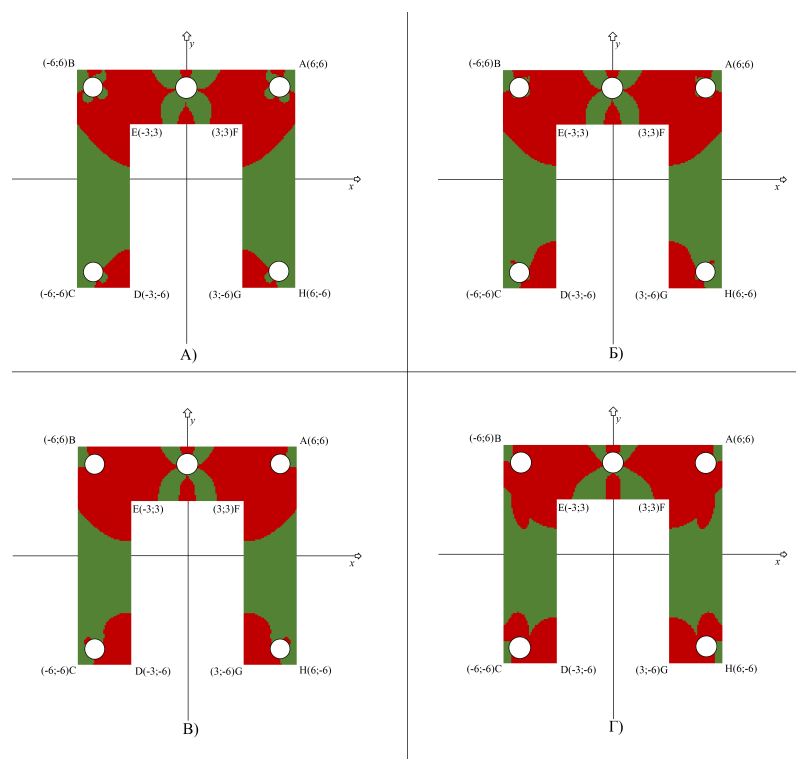


Рис. 2. Упругопластическая граница профиля П-образного сечения, при изменении значения крутящего параметра в А)  $a = -0,6$  Б)  $a = -1$  В)  $a = -1,6$  Г)  $a = -3$ .

На рисунках 3, 4 представлено изменение упругопластические границы прокатного профилей Т-образного и Н-образного сечения, армированного упругими волокнами в зависимости от изменения значения крутящего параметра  $a$ .

"Тавр" имеет Т-образную форму, "двутавр" Н-образную. Оба профиля используются, главным образом, в строительстве и тяжелом машиностроении. Наличие ребра жесткости обеспечивает профилю повышенную прочность, поэтому он хорошо переносит нагрузки на изгиб. "Двутавры" могут иметь параллельные или наклонные грани полок.



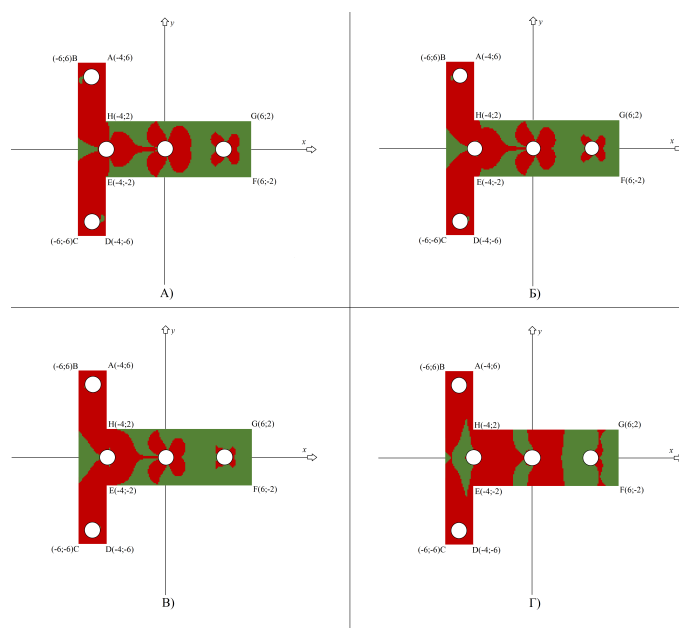


Рис. 3. Упругопластическая граница профиля Т-образного сечения, при изменении значения крутящего параметра в А)  $a=-0,6$  Б)  $a=-1$  В)  $a=-1,6$  Г)  $a=-3$ .

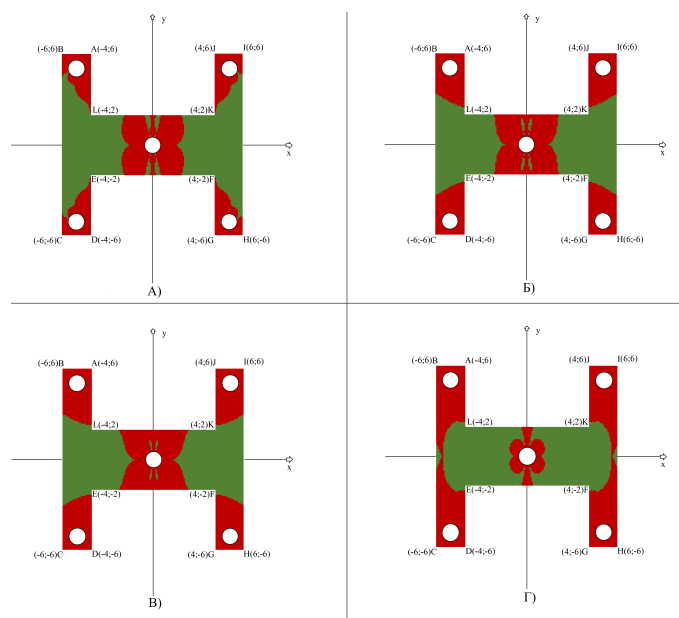


Рис. 4. Упругопластическая граница профиля Н-образного сечения, при изменении значения крутящего параметра в А)  $a=-0,6$  Б)  $a=-1$  В)  $a=-1,6$  Г)  $a=-3$

На рисунке 5 представлено изменение упругопластические границы прокатного профиля Z-образного сечения, армированного упругими волокнами, в зависимости от изменения значения крутящего параметра  $a$ .

Профиль Z был разработан специально для вагоностроительной отрасли - он широко применяется при производстве железнодорожных платформ и полувагонов.

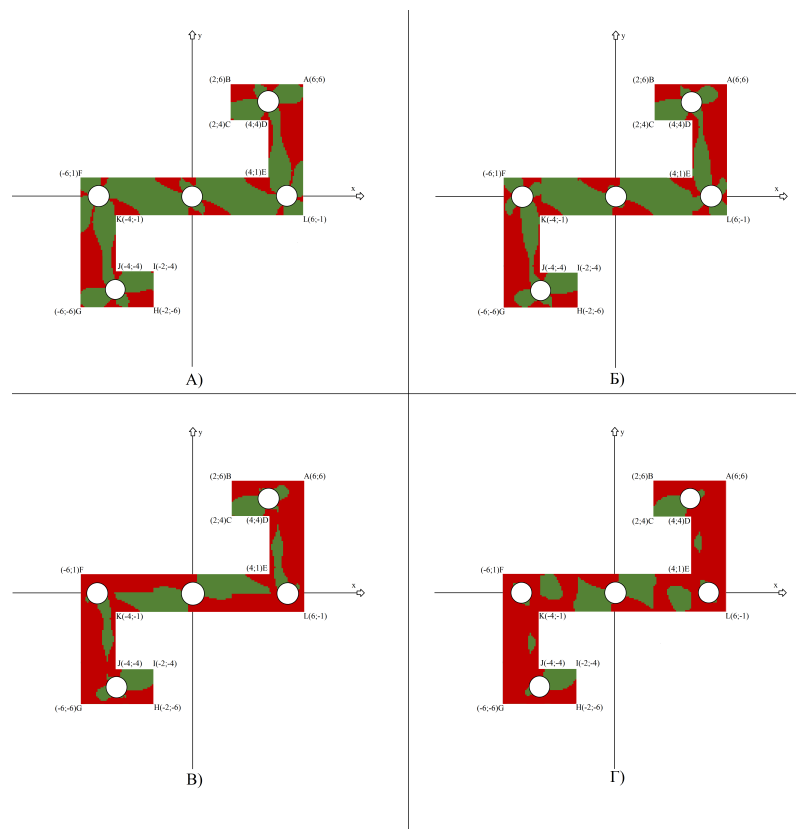


Рис. 5. Упругопластическая граница профиля Z-образного сечения, при изменении значения крутящего параметра в А)  $a=-0,6$  Б)  $a=-1$  В)  $a=-1,6$  Г)  $a=-3$

На рисунке 6 представлено изменение упругопластические границы прокатного профиля крестообразного сечения, армированного упругими волокнами в зависимости от изменения значения крутящего параметра  $a$ .

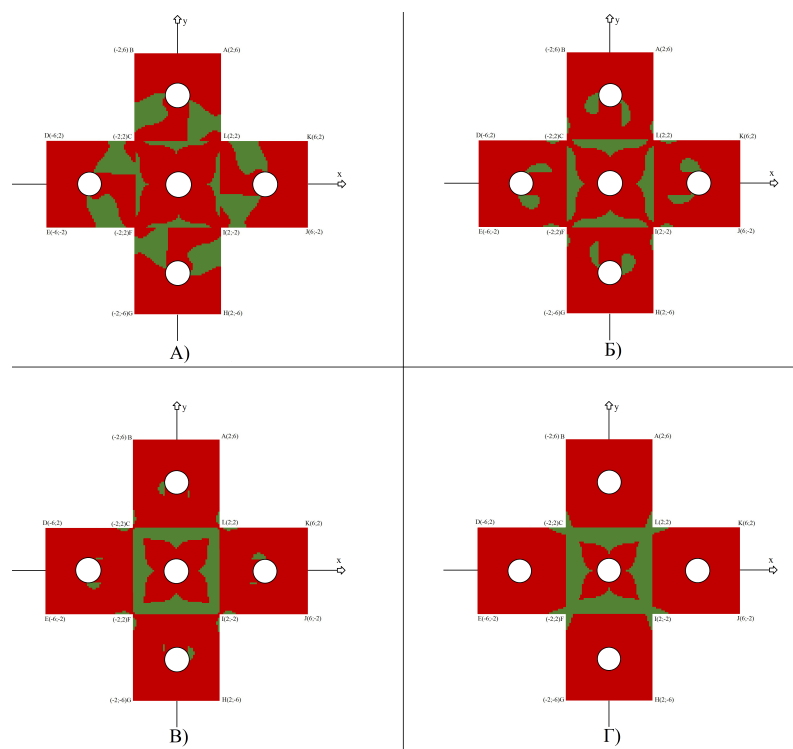


Рис. 6. Упругопластическая граница профиля крестообразного сечения, при изменении значения крутящего параметра в А)  $a=-0,6$  Б)  $a=-1$  В)  $a=-1,6$  Г)  $a=-3$ .

**Заключение.** Рассмотрена задача о упругопластическом кручении стержней прокатного профиля, армированных упругими волокнами. Для решения задачи использовались законы сохранения. На основе аналитических решений разработаны программы для ЭВМ, определяющие упругопластические границы стержня. Приведены результаты работы программы с различными значениями крутящего параметра для стержней типа тавр, двутавр, швеллер, крест и Z-образных профилей. Расчеты производились на персональном компьютере, время расчетов представленных в статье упругопластических границ составляет 35 - 90 минут, в зависимости от вида стержня.

### ДОПОЛНИТЕЛЬНО

**Вклад авторов.** 100%.

**Конфликт интересов.** Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

**Источник финансирования.** Авторы заявляют об отсутствии внешнего финансирования при проведении исследования.

### ADDITIONAL INFORMATION

**Authors' contribution.** 100%.

**Competing interests.** The authors declare that they have no competing interests.

**Funding.** This study was not supported by any external sources of funding.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Механика процессов пластических сред / В. Г. Зубчанинов. - Москва: Физматлит, 2010. - 352 с. ; ISBN 978-5-9221-1235-2
- [2] Математическая теория пластичности: Монография / В. Г. Зубчанинов; М-во образования Рос. Федерации. Твер. гос. техн. ун-т. — Тверь: Твер. гос. техн. ун-т, 2002. — 299 с. ; ISBN 5-7995-0200-0
- [3] Композитная сталь / Н. С. Саркисян, А. О. Саркисян, А. А. Колчин [и др.] // Композиты и наноструктуры. – 2024. – Т. 16, № 3. – С. 202-207. – DOI 10.36236/1999-7590-2024-16-3-202-207. – EDN EAQPSQ.
- [4] Структурно-функциональный анализ как основа проектирования структуры массоэффективных силовых элементов конструкций из композиционных материалов / / П. В. Соловьев, Ю. С. Первушин, В. С. Жернаков, А. В. Ахмедьянов // Композиты и наноструктуры. – 2023. – Т. 15, № 4. – С. 237-246. – DOI 10.36236/1999-7590-2023-15-4-237-246. – EDN FASWSZ.
- [5] Богачева, В. Э. Разрыв по моде I адгезионного слоя с учетом диагональных компонент тензора напряжений / В. Э. Богачева, Л. В. Глаголев // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2022. – № 4(54). – С. 47-56. – DOI 10.37972/chgpru.2022.54.4.005. – EDN ULGOYA.
- [6] Голышев А. А. Влияние керамического волокна SiC в металломатричном композите на его стойкость при высокоскоростном нагружении/ А. А. Голышев, С. Д. Долгова // Прикладная механика и техническая физика. – 2022. – Т. 63, № 6(376). – С. 145-149. – DOI 10.15372/PMTF20220616. – EDN PUGZHK.
- [7] Сенашов С. И. Изгиб композитного бруса / С. И. Сенашов, И. Л. Савостьянова, А. Н. Яхно // Сибирский аэрокосмический журнал. – 2024. – Т. 25, № 1. – С. 25-32. – DOI 10.31772/2712-8970-2024-25-1-25-32. – EDN RRHQRY.
- [8] Аннин Б. Д., Черепанов Г. П. Упруго-пластическая задача. Новосибирск: Наука, 1983. 126 с.
- [9] Сенашов, С. И. Об упругопластическом кручении стержня / С. И. Сенашов, О. Н. Черепанова, А. В. Кондрин // Решетневские чтения. – 2013. – Т. 2. – С. 115-116. – EDN SJCMAN.
- [10] Сенашов С. И., Гомонова О. В., Яхно А. Н. Математические вопросы двумерных уравнений идеальной пластичности. Сиб. гос. аэрокосмич. ун-т. Красноярск, 2012.-139 с.
- [11] Сенашов С. И., Савостьянова И. Л. Упруго-пластичность и законы сохранения. СибГУ им. М.Ф. Решетнева, Красноярск, 2023.-184 с.
- [12] Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М., Наука, 1978.
- [13] Сенашов, С. И. Напряженное состояние композитной консоли / С. И. Сенашов, И. Л. Савостьянова // Композиты и наноструктуры. – 2024. – Т. 16, № 1. – С. 56-61. – DOI 10.36236/1999-7590-2024-16-1-56-61. – EDN VKPMVJ.
- [14] Аннин Б. Д., Черепанов Г. П. Упруго-пластическая задача. Новосибирск: Наука, 1983. 126 с.
- [15] Киряков П. П., Сенашов С. И., Яхно А. Н. Приложение симметрий и законов сохранения к решению дифференциальных уравнений. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2001.192 с.
- [16] Senashov S. I. Conservation laws, hodograph transformation and boundary value problems of plane plasticity / S. I. Senashov, A. Yakhno // Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications. – 2012. – Vol. 8. – P. 071. – DOI 10.3842/SIGMA.2012.071. – EDN RGOBNN.

- [17] Сенашов С. И. Об упругопластическом кручении стержня / С. И. Сенашов, О. Н. Черепанова, А. А. Кондрин // Вестник Сибирского государственного аэрокосмического университета им. академика М.Ф. Решетнева. – 2013. – № 3(49). – С. 100-103. – EDN RFWONN.
- [18] Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2025614228 Российская Федерация. Построение упругопластической границы скручиваемого профиля типа «тавр», армированного упругими волокнами: № 2025612747 : заявл. 12.02.2025 : опубл. 20.02.2025 / Д. О. Евтихов, И. Л. Савостьянова, С. И. Сенашов, Черепанова О. Н.
- [19] Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2025614229 Российская Федерация. Построение упругопластической границы скручиваемого профиля типа «двутавр», армированного упругими волокнами: № 2025612437 : заявл. 12.02.2025 : опубл. 20.02.2025 / Д. О. Евтихов, И. Л. Савостьянова, С. И. Сенашов, Черепанова О. Н.
- [20] Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2025614585 Российская Федерация. Построение упругопластической границы скручиваемого П-образного профиля, армированного упругими волокнами: № 2025612762 : заявл. 12.02.2025 : опубл. 24.02.2025 / Д. О. Евтихов, И. Л. Савостьянова, С. И. Сенашов, Черепанова О. Н.
- [21] Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2025614586 Российская Федерация. Построение упругопластической границы скручиваемого Z-образного профиля, армированного упругими волокнами: № 2025612454: заявл. 12.02.2025 : опубл. 24.02.2025 / Д. О. Евтихов, И. Л. Савостьянова, С. И. Сенашов, Черепанова О. Н.
- [22] Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2025614704 Российская Федерация. Построение упругопластической границы скручиваемого крестообразного профиля, армированного упругими волокнами: № 2025612438 : заявл. 12.02.2025 : опубл. 25.02.2025 / Д. О. Евтихов, И. Л. Савостьянова, С. И. Сенашов, Черепанова О. Н.

## REFERENCES

- [1] Mechanics of processes of plastic media / V. G. Zubchaninov. - Moscow: Fizmatlit, 2010. - 352 c. ; ISBN 978-5-9221-1235-2 (in Russian).
- [2] Mathematical theory of plasticity: Monograph / V. G. Zubchaninov; Ministry of Education of the Russian Federation. Federation. Tver. gos. tehn. un. university. - Tver: Tver State Technical University, 2002. - 299 c. ; ISBN 5-7995-0200-0 (in Russian).
- [3] Composite steel / N. S. Sarkisyan, A. O. Sarkisyan, A. A. Kolchin [et al.] // Composites and Nanostructures. - 2024. - T. 16, № 3. - С. 202-207. - DOI 10.36236/1999-7590-2024-16-3-202-207. - EDN EAQPSQ. (in Russian).
- [4] Structural and functional analysis as a basis for designing the structure of mass-effective force elements of composite material structures / P. V. Soloviev, Yu. S. Pervushin, V. S. Zhernakov, A. V. Akhmedyanov // Composites and nanostructures. - 2023. - T. 15, № 4. - С. 237-246. - DOI 10.36236/1999-7590-2023-15-4-237-246. - EDN FASWSZ. (in Russian).
- [5] Bogacheva, V. E. Breaking by mode I of the adhesion layer taking into account the diagonal components of the stress tensor / V. E. Bogacheva, L. V. Glagolev // Bulletin of the Chuvash State Pedagogical University named after I. I. Ya. Yakovlev. Series: Mechanics of limit state. 2022. - № 4(54). - С. 47-56. - DOI 10.37972/chgpu.2022.54.4.005. - EDN ULGOYA. (in Russian).
- [6] Golyshev A. A. Influence of SiC ceramic fiber in metal matrix composite on its resistance under high-speed loading/ A. A. Golyshev, C. D. Dolgova // Applied Mechanics and Technical Physics. - 2022. - T. 63, № 6(376). - С. 145-149. - DOI 10.15372/PMTF20220616. - EDN PUGZHK. (in Russian).
- [7] Senashov S. I. Bending of a composite beam / S. I. Senashov, I. L. Savostyanova, A. N. Yakhno // Siberian Aerospace Journal. - 2024. - T. 25, № 1. - С. 25-32. - DOI 10.31772/2712-8970-2024-25-1-25-32. - EDN RRHQRY. (in Russian).

- [8] Annin B. D., Cherepanov G. P. Elastic-plastic problem. Novosibirsk: Nauka, 1983. 126 c. (in Russian).
- [9] Senashov, S. I. On elastoplastic torsion of a rod / S. I. Senashov, O. N. Cherepanova, A. B. Kondrin // Reshetnev Readings. - 2013. - VOL. 2. - P. 115-116. - EDN SJCMAN. (in Russian).
- [10] Senashov S. I., Gomonova O. V., Yakhno A. N. Mathematical issues of two-dimensional equations of ideal plasticity. Sib. gos. aerospace. un-t. Krasnoyarsk, 2012.-139 p. (in Russian).
- [11] Senashov S. I., Savostyanova I. L. Elastic-plasticity and conservation laws. M.F. Reshetnev Siberian State University, Krasnoyarsk, 2023.-184 p.
- [12] Ovsyannikov L. V. Group analysis of differential equations. M., Nauka, 1978. (in Russian).
- [13] Senashov, S. I. Stress state of a composite cantilever / S. I. Senashov, I. L. Savostyanova // Composites and Nanostructures. - 2024. - T. 16, № 1. - C. 56-61. - DOI 10.36236/1999-7590-2024-16-1-56-61. - EDN VKPMVJ. (in Russian).
- [14] Annin B. D., Cherepanov G. P. Elastic-plastic problem. Novosibirsk: Nauka, 1983. 126 c. (in Russian).
- [15] Kiriakov P. P., Senashov S. I., Yakhno A. N. Application of symmetries and conservation laws to the solution of differential equations. Novosibirsk: Izd-vo SO RAS, 2001.192 p. (in Russian).
- [16] Senashov S. I. Conservation laws, hodograph transformation and boundary value problems of plane plasticity / S. I. Senashov, A. Yakhno // Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications. – 2012. – Vol. 8. – P. 071. – DOI 10.3842/SIGMA.2012.071. – EDN RGOBNN.
- [17] Senashov S. I. On elastoplastic torsion of a rod / S. I. Senashov, O. N. Cherepanova, A. A. Kondrin // Bulletin of the Siberian State Aerospace University named after academician M.F. Reshetnev. - 2013. - № 3(49). - C. 100-103. - EDN RFWONN. (in Russian).
- [18] Certificate of state registration of computer program No. 2025614228 Russian Federation. Construction of elastic-plastic boundary of a torsion profile of “Tavr” type reinforced with elastic fibers: No. 2025612747 : applied. 12.02.2025 : publ. 20.02.2025 / D. O. Evtikhov, I. L. Savostyanova, S. I. Senashov, Cherepanova O. N.
- [19] Certificate of state registration of computer program No. 2025614229 Russian Federation. Construction of elastic-plastic boundary of a torsion profile of “Dvutavr” type reinforced with elastic fibers: No. 2025612437 : submitted. 12.02.2025 : publ. 20.02.2025 / D. O. Evtikhov, I. L. Savostyanova, S. I. Senashov, Cherepanova O. N.
- [20] Certificate of state registration of computer program No. 2025614585 Russian Federation. Construction of elastic-plastic boundary of a torsional  $\Pi$ -shaped profile reinforced with elastic fibers: No. 2025612762 : submitted. 12.02.2025 : publ. 24.02.2025 / D. O. Evtikhov, I. L. Savostyanova, S. I. Senashov, Cherepanova O. N.
- [21] Certificate of state registration of computer program No. 2025614586 Russian Federation. Construction of elastic-plastic boundary of a torsional Z-shaped profile reinforced with elastic fibers: No. 2025612454 : submitted. 12.02.2025 : publ. 24.02.2025 / D. O. Evtikhov, I. L. Savostyanova, S. I. Senashov, Cherepanova O. N.
- [22] Certificate of state registration of computer program No. 2025614704 Russian Federation. Construction of elastic-plastic boundary of torsional cross-shaped profile reinforced with elastic fibers: No. 2025612438 : applied. 12.02.2025 : publ. 25.02.2025 / D. O. Evtikhov, I. L. Savostyanova, S. I. Senashov, Cherepanova O. N.