

Е. В. Мурашкин, Ю. Н. Радаев

СИСТЕМЫ ЦЕЛЫХ РАЦИОНАЛЬНЫХ ГЕМИТРОПНЫХ ИНВАРИАНТОВ В МЕХАНИКЕ МИКРОПОЛЯРНОГО КОНТИНУУМА

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

Аннотация. В работе обсуждаются вопросы применения теории рациональных инвариантов для построения кубических аппроксимаций энергетических форм для потенциалов силовых и моментных напряжений гемитропных микрополярных упругих тел. Для построения таких потенциалов наиболее подходит метод А-представлений, позволяющий без труда получить аппроксимацию заданной степени в виде полиномиальной линейной комбинации рациональных инвариантов относительно гемитропной группы отображений трехмерного пространства. В рамках настоящего исследования анализируется полный неприводимый набор из 86 индивидуальных и совместных гемитропных целых рациональных алгебраических инвариантов для системы двух симметричных и двух антисимметричных тензоров второго ранга. Полученный набор инвариантов затем используется для построения кубической энергетической формы гемитропного микрополярного упругого тела и указания полного набора из 37 определяющих постоянных. Получены вспомогательные формулы для вывода определяющих уравнений микрополярной упругости.

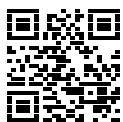
Ключевые слова: наномасштаб, микромасштаб, энергетическая форма, целочисленный рациональный алгебраический инвариант, неприводимая система инвариантов, кубическая аппроксимация, гемитропное микрополярное упругое тело

Мурашкин Евгений Валерьевич, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории моделирования в механике деформируемого твердого тела; e-mail: murashkin@ipmnet.ru;

<https://orcid.org/0000-0002-3267-4742>; AuthorID: 129570

Радаев Юрий Николаевич, доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник лаборатории моделирования в механике деформируемого твердого тела; e-mail: radayev@ipmnet.ru;

<https://orcid.org/0000-0002-0866-2151>; AuthorID: 103116



для цитирования: Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Системы целых рациональных гемитропных инвариантов в механике микрополярного континуума // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2025. № 3(65). С. 152–170. DOI: 10.37972/chgpu.2025.65.3.008. EDN: VBHKSU

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0).

E. V. Murashkin, Y. N. Radayev

SYSTEMS OF INTEGER RATIONAL HEMITROPIC INVARIANTS IN MICROPOLAR CONTINUUM MECHANICS

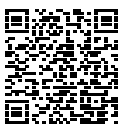
Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow, Russia

Abstract. The paper deals with an application of theory of invariant to determinig cubic approximations of energy forms of potentials of force and couple stressed in hemitropic micropolar elastic solids. At this aim, the most suitable are A-representations, which allow one to easily obtain an approximation of sufficient accuracy for the stress potentials as a polynomial linear combination of rational invariants with respect to the hemitropic group of three-dimensional transformations are proposed. Within the framework of this study, a complete irreducible set of 86 individual and joint hemitropic integer rational algebraic invariants for systems of two symmetric and two antisymmetric second-rank tensors is considered. This set of invariants is then used to determine a cubic energy form of hemitropic micropolar elastic solid and specify a complete set of 37 constitutive constants. Requisite formulae are derived for obtaining constitutive equations of micropolar elasticity.

Keywords: nanoscale, microscale, energy form, integer rational algebraic invariant, irreducible system of invariants, cubic approximation, hemitropic micropolar elastic solid

Evgenii V. Murashkin, Cand. Sci. Phys. & Math., MD, Senior Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences; e-mail: evmurashkin@gmail.ru; <https://orcid.org/0000-0002-3267-4742>; AuthorID: 129570

Yuri N. Radayev, Dr. Sci. Phys. & Math., Prof., Leading Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences; e-mail: radayev@ipmnet.ru; <https://orcid.org/0000-0002-0866-2151>; AuthorID: 103116



to cite this article: Murashkin E. V., Radayev Y. N. Systems of integer rational hemitropic invariants in micropolar continuum mechanics // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2025. No 3(65). p. 152–170. DOI: 10.37972/chgpu.2025.65.3.008

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение. Теория алгебраических инвариантов [1–6] имеет важное значение при построении аппроксимаций заданной степени для энергетических форм потенциалов напряжений в механике сплошных сред [7–18]. В особенности это справедливо при построении математических моделей гемитропных микрополярных упругих сред. В этом случае, наиболее подходящим является А-представление [17, 18] энергетических форм, являющееся линейной комбинацией индивидуальных и совместных целых рациональных алгебраических инвариантов асимметричного тензора деформаций и градиента поля микроповоротов относительно гемитропной группы.

Основным понятием теории алгебраических инвариантов является индивидуальный инвариант тензора. Определение индивидуального псевдоинварианта алгебраического веса a для псевдотензора можно найти в монографии [1]. Заметим, что при $a = 0$ инвариант носит название абсолютного инварианта, при $a \neq 0$ — относительного или псевдоинварианта.

Точно также определяется совместный инвариант набора, состоящего из нескольких тензоров.

Хорошо известно, что для заданной системы тензоров можно построить бесконечное множество инвариантов (индивидуальных/совместных). Если среди них имеются неравные тождественно нулю, то число таковых также будет бесконечным; это ясно хотя бы из того, что целая рациональная функция (с числовыми коэффициентами) от нескольких инвариантов системы также будет (при известных условиях) инвариантом той же системы; таким свойством обладает, во всяком случае, произведение инвариантов.

В связи с указанным обстоятельством возникает понятие неприводимого инварианта системы, т.е. такого инварианта, который не является целой рациональной функцией от некоторых других инвариантов той же системы. Множество всех неприводимых инвариантов системы называется её полной системой инвариантов. Иначе говоря, инварианты системы тензоров образуют её полную систему инвариантов, если всякий инвариант системы представляет собой целую рациональную функцию инвариантов и если, кроме того, никакой из инвариантов не является целой рациональной функцией остальных (или некоторых из них).

Настоящее исследование направлено на последовательное использование результатов теории алгебраических инвариантов при построении энергетических форм потенциалов силовых и моментных напряжений микрополярных упругих тел. С этой целью приводится и анализируется полная неприводимая система 86 индивидуальных и совместных целых рациональных алгебраических инвариантов симметричных и антисимметричных составляющих асимметричного тензора деформаций и тензора изгиба–кручения. Система инвариантов затем используется для построения кубической аппроксимации энергетической формы гемитропного тела.

Изложение в значительной степени использует терминологию, обозначения, методы и результаты, развитые в предыдущих статьях [17–30].

1. Инвариантные следы, образующие целый рациональный базис инвариантов относительно гемитропной группы преобразований. Рассмотрим систему двух симметричных $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ и двух антисимметричных $\mathbf{V}$, $\mathbf{W}$ тензоров второго ранга. Следует отметить, что рассуждения о совместных и индивидуальных инвариантах такой системы существенно зависят от размерности пространства. Положим далее, что она равна 3. Полный набор индивидуальных и совместных гемитропных инвариантов указанной системы тензоров состоит из 86 неприводимых элементов [2, 5, 6]:

$$\begin{aligned}
& 1.) \operatorname{tr} [\mathbf{A}]; & 2.) \operatorname{tr} [\mathbf{A}^2]; & 3.) \operatorname{tr} [\mathbf{A}^3]; & 4.) \operatorname{tr} [\mathbf{B}]; \\
& 5.) \operatorname{tr} [\mathbf{B}^2]; & 6.) \operatorname{tr} [\mathbf{B}^3]; & 7.) \operatorname{tr} [\mathbf{V}^2]; & 8.) \operatorname{tr} [\mathbf{W}^2]; \\
& 9.) \operatorname{tr} [\mathbf{AB}]; & 10.) \operatorname{tr} [\mathbf{A}^2\mathbf{B}]; & 11.) \operatorname{tr} [\mathbf{B}^2\mathbf{A}]; & 12.) \operatorname{tr} [\mathbf{A}^2\mathbf{B}^2]; \\
& 13.) \operatorname{tr} [\mathbf{V}^2\mathbf{A}]; & 14.) \operatorname{tr} [\mathbf{V}^2\mathbf{A}^2]; & 15.) \operatorname{tr} [\mathbf{V}^2\mathbf{AVA}^2]; & 16.) \operatorname{tr} [\mathbf{V}^2\mathbf{B}]; \\
& 17.) \operatorname{tr} [\mathbf{V}^2\mathbf{B}^2]; & 18.) \operatorname{tr} [\mathbf{V}^2\mathbf{BVB}^2]; & 19.) \operatorname{tr} [\mathbf{W}^2\mathbf{A}]; & 20.) \operatorname{tr} [\mathbf{W}^2\mathbf{A}^2]; \\
& 21.) \operatorname{tr} [\mathbf{W}^2\mathbf{AWA}^2]; & 22.) \operatorname{tr} [\mathbf{W}^2\mathbf{B}]; & 23.) \operatorname{tr} [\mathbf{W}^2\mathbf{B}^2]; & 24.) \operatorname{tr} [\mathbf{W}^2\mathbf{BWB}^2]; \\
& 25.) \operatorname{tr} [\mathbf{VW}]; & 26.) \operatorname{tr} [\mathbf{VAB}]; & 27.) \operatorname{tr} [\mathbf{VA}^2\mathbf{B}]; & 28.) \operatorname{tr} [\mathbf{VB}^2\mathbf{A}]; \\
& 29.) \operatorname{tr} [\mathbf{VA}^2\mathbf{B}^2]; & 30.) \operatorname{tr} [\mathbf{VA}^2\mathbf{BA}]; & 31.) \operatorname{tr} [\mathbf{VB}^2\mathbf{AB}]; & 32.) \operatorname{tr} [\mathbf{VA}^2\mathbf{B}^2\mathbf{A}]; \\
& 33.) \operatorname{tr} [\mathbf{VB}^2\mathbf{A}^2\mathbf{B}]; & 34.) \operatorname{tr} [\mathbf{V}^2\mathbf{AB}]; & 35.) \operatorname{tr} [\mathbf{V}^2\mathbf{A}^2\mathbf{B}]; & 36.) \operatorname{tr} [\mathbf{V}^2\mathbf{B}^2\mathbf{A}]; \\
& 37.) \operatorname{tr} [\mathbf{V}^2\mathbf{AVB}]; & 38.) \operatorname{tr} [\mathbf{V}^2\mathbf{AVB}^2]; & 39.) \operatorname{tr} [\mathbf{V}^2\mathbf{BVA}^2]; & 40.) \operatorname{tr} [\mathbf{WAB}]; \\
& 41.) \operatorname{tr} [\mathbf{WA}^2\mathbf{B}]; & 42.) \operatorname{tr} [\mathbf{WB}^2\mathbf{A}]; & 43.) \operatorname{tr} [\mathbf{WA}^2\mathbf{B}^2]; & 44.) \operatorname{tr} [\mathbf{WA}^2\mathbf{BA}]; \\
& 45.) \operatorname{tr} [\mathbf{WB}^2\mathbf{AB}]; & 46.) \operatorname{tr} [\mathbf{WA}^2\mathbf{B}^2\mathbf{A}]; & 47.) \operatorname{tr} [\mathbf{WB}^2\mathbf{A}^2\mathbf{B}]; & 48.) \operatorname{tr} [\mathbf{W}^2\mathbf{AB}]; \\
& 49.) \operatorname{tr} [\mathbf{W}^2\mathbf{A}^2\mathbf{B}]; & 50.) \operatorname{tr} [\mathbf{W}^2\mathbf{B}^2\mathbf{A}]; & 51.) \operatorname{tr} [\mathbf{W}^2\mathbf{AWB}]; & 52.) \operatorname{tr} [\mathbf{W}^2\mathbf{AWB}^2]; \\
& 53.) \operatorname{tr} [\mathbf{W}^2\mathbf{BWA}^2]; & 54.) \operatorname{tr} [\mathbf{VWA}]; & 55.) \operatorname{tr} [\mathbf{VWA}^2]; & 56.) \operatorname{tr} [\mathbf{V}^2\mathbf{WA}]; \\
& 57.) \operatorname{tr} [\mathbf{W}^2\mathbf{VA}]; & 58.) \operatorname{tr} [\mathbf{V}^2\mathbf{WA}^2]; & 59.) \operatorname{tr} [\mathbf{W}^2\mathbf{VA}^2]; & 60.) \operatorname{tr} [\mathbf{V}^2\mathbf{AWA}^2]; \\
& 61.) \operatorname{tr} [\mathbf{W}^2\mathbf{AVA}^2]; & 62.) \operatorname{tr} [\mathbf{VWB}]; & 63.) \operatorname{tr} [\mathbf{VWB}^2]; & 64.) \operatorname{tr} [\mathbf{V}^2\mathbf{WB}]; \\
& 65.) \operatorname{tr} [\mathbf{W}^2\mathbf{VB}]; & 66.) \operatorname{tr} [\mathbf{V}^2\mathbf{WB}^2]; & 67.) \operatorname{tr} [\mathbf{W}^2\mathbf{VB}^2]; & 68.) \operatorname{tr} [\mathbf{V}^2\mathbf{BWB}^2]; \\
& 69.) \operatorname{tr} [\mathbf{W}^2\mathbf{BVB}^2]; & 70.) \operatorname{tr} [\mathbf{VWAB}]; & 71.) \operatorname{tr} [\mathbf{VWBA}]; & 72.) \operatorname{tr} [\mathbf{VWA}^2\mathbf{B}]; \\
& 73.) \operatorname{tr} [\mathbf{VWB}^2\mathbf{A}]; & 74.) \operatorname{tr} [\mathbf{WVA}^2\mathbf{B}]; & 75.) \operatorname{tr} [\mathbf{WVB}^2\mathbf{A}]; & 76.) \operatorname{tr} [\mathbf{VWA}^2\mathbf{B}^2]; \\
& 77.) \operatorname{tr} [\mathbf{VWA}^2\mathbf{BA}]; & 78.) \operatorname{tr} [\mathbf{VWB}^2\mathbf{AB}]; & 79.) \operatorname{tr} [\mathbf{V}^2\mathbf{WAB}]; & 80.) \operatorname{tr} [\mathbf{W}^2\mathbf{VAB}]; \\
& 81.) \operatorname{tr} [\mathbf{V}^2\mathbf{AWB}]; & 82.) \operatorname{tr} [\mathbf{W}^2\mathbf{AVB}]; & 83.) \operatorname{tr} [\mathbf{V}^2\mathbf{BWA}^2]; & 84.) \operatorname{tr} [\mathbf{V}^2\mathbf{AWB}^2]; \\
& 85.) \operatorname{tr} [\mathbf{W}^2\mathbf{BVA}^2]; & 86.) \operatorname{tr} [\mathbf{W}^2\mathbf{AVB}^2].
\end{aligned} \tag{1}$$

Здесь и далее будем опускать операцию внутреннего произведения тензоров. Каждый из инвариантных следов снабжается индивидуальным идентификационным номером 1.) – 86.).

Важно заметить, что в силу ассоциативности внутреннего произведения инварианты (1) можно вычислить различными способами. Например:

$$(\mathbf{W}^2)\mathbf{BV}(\mathbf{A}^2) = \mathbf{W}(\mathbf{WB})(\mathbf{VA})\mathbf{A} = \mathbf{W}(\mathbf{WB})\mathbf{V}(\mathbf{AA}).$$

В монографии [1, с. 327] Г.Б. Гуревич существенно использует смешанные компоненты тензоров для расчета алгебраических инвариантов. Такой способ оказывается удобным и не зависит от метрики пространства. В таком случае инварианты (1) в заданной криволинейной координатной системе примут вид:

- | | | |
|--|--|--|
| 1.) A_s^s ; | 2.) $A_s^k A_k^s$; | 3.) $A_s^k A_k^l A_l^s$; |
| 4.) B_s^s ; | 5.) $B_s^k B_k^s$; | 6.) $B_s^k B_k^l B_l^s$; |
| 7.) $V_s^k V_k^s$; | 8.) $W_s^k W_k^s$; | 9.) $A_s^k B_k^s$; |
| 10.) $A_s^k A_k^l B_l^s$; | 11.) $B_s^k B_k^l A_l^s$; | 12.) $A_s^k A_k^l B_l^m B_m^s$; |
| 13.) $V_s^k V_k^l A_l^s$; | 14.) $V_s^k V_k^l A_l^m A_m^s$; | 15.) $V_s^k V_k^l A_l^m V_m^p A_p^q A_q^s$; |
| 16.) $V_s^k V_k^l B_l^s$; | 17.) $V_s^k V_k^l B_l^m B_m^s$; | 18.) $V_s^k V_k^l B_l^m V_m^p B_p^q B_q^s$; |
| 19.) $W_s^k W_k^l A_l^s$; | 20.) $W_s^k W_k^l A_l^m A_m^s$; | 21.) $W_s^k W_k^l A_l^m W_m^p A_p^q A_q^s$; |
| 22.) $W_s^k W_k^l B_l^s$; | 23.) $W_s^k W_k^l B_l^m B_m^s$; | 24.) $W_s^k W_k^l B_l^m W_m^p B_p^q B_q^s$; |
| 25.) $V_s^k W_k^s$; | 26.) $V_s^k A_k^l B_l^s$; | 27.) $V_s^k A_k^l A_l^m B_m^s$; |
| 28.) $V_s^k B_k^l B_l^m A_m^s$; | 29.) $V_s^k A_k^l A_l^m B_m^p B_p^s$; | 30.) $V_s^k A_k^l A_l^m B_m^p A_p^s$; |
| 31.) $V_s^k B_k^l B_l^m A_m^p B_p^s$; | 32.) $V_s^k A_k^l A_l^m B_m^p B_p^q A_q^s$; | 33.) $V_s^k B_k^l B_l^m A_m^p A_p^q B_q^s$; |
| 34.) $V_s^k V_k^l A_l^m B_m^s$; | 35.) $V_s^k V_k^l A_l^m A_m^p B_p^s$; | 36.) $V_s^k V_k^l B_l^m B_m^p A_p^s$; |
| 37.) $V_s^k V_k^l A_l^m V_m^p B_p^s$; | 38.) $V_s^k V_k^l A_l^m V_m^p B_p^q B_q^s$; | 39.) $V_s^k V_k^l B_l^m V_m^p A_p^q A_q^s$; |
| 40.) $W_s^k A_k^l B_l^s$; | 41.) $W_s^k A_k^l A_l^m B_m^s$; | 42.) $W_s^k B_k^l B_l^m A_m^s$; |
| 43.) $W_s^k A_k^l A_l^m B_m^p B_p^s$; | 44.) $W_s^k A_k^l A_l^m B_m^p A_p^s$; | 45.) $W_s^k B_k^l B_l^m A_m^p B_p^s$; |
| 46.) $W_s^k A_k^l A_l^m B_m^p B_p^q A_q^s$; | 47.) $W_s^k B_k^l B_l^m A_m^p A_p^q B_q^s$; | 48.) $W_s^k W_k^l A_l^m B_m^s$; |
| 49.) $W_s^k W_k^l A_l^m A_m^p B_p^s$; | 50.) $W_s^k W_k^l B_l^m B_m^p A_p^s$; | 51.) $W_s^k W_k^l A_l^m W_m^p B_p^s$; |
| 52.) $W_s^k W_k^l A_l^m W_m^p B_p^q B_q^s$; | 53.) $W_s^k W_k^l B_l^m W_m^p A_p^q A_q^s$; | 54.) $V_s^k W_k^l A_l^s$; |
| 55.) $V_s^k W_k^l A_l^m A_m^s$; | 56.) $V_s^k V_k^l W_l^m A_m^s$; | 57.) $W_s^k W_k^l V_l^m A_m^s$; |
| 58.) $V_s^k V_k^l W_l^m A_m^p A_p^s$; | 59.) $W_s^k W_k^l V_l^m A_m^p A_p^s$; | 60.) $V_s^k V_k^l A_l^m W_m^p A_p^q A_q^s$; |
| 61.) $W_s^k W_k^l A_l^m V_m^p A_p^q A_q^s$; | 62.) $V_s^k W_k^l B_l^s$; | 63.) $V_s^k W_k^l B_l^m B_m^s$; |
| 64.) $V_s^k V_k^l W_l^m B_m^s$; | 65.) $W_s^k W_k^l V_l^m B_m^s$; | 66.) $V_s^k V_k^l W_l^m B_m^p B_p^s$; |
| 67.) $W_s^k W_k^l V_l^m B_m^p B_p^s$; | 68.) $V_s^k V_k^l B_l^m W_m^p B_p^q B_q^s$; | 69.) $W_s^k W_k^l B_l^m V_m^p B_p^q B_q^s$; |
| 70.) $V_s^k W_k^l A_l^m B_m^s$; | 71.) $V_s^k W_k^l B_l^m A_m^s$; | 72.) $V_s^k W_k^l A_l^m A_m^p B_p^s$; |
| 73.) $V_s^k W_k^l B_l^m B_m^p A_p^s$; | 74.) $W_s^k V_k^l A_l^m A_m^p B_p^s$; | 75.) $W_s^k V_k^l B_l^m B_m^p A_p^s$; |
| 76.) $V_s^k W_k^l A_l^m A_m^p B_p^q B_q^s$; | 77.) $V_s^k W_k^l A_l^m A_m^p B_p^q A_q^s$; | 78.) $V_s^k W_k^l B_l^m B_m^p A_p^q B_q^s$; |
| 79.) $V_s^k V_k^l W_l^m A_m^p B_p^s$; | 80.) $W_s^k W_k^l V_l^m A_m^p B_p^s$; | 81.) $V_s^k V_k^l A_l^m W_m^p B_p^s$; |
| 82.) $W_s^k W_k^l A_l^m V_m^p B_p^s$; | 83.) $V_s^k V_k^l B_l^m W_m^p A_p^q A_q^s$; | 84.) $V_s^k V_k^l A_l^m W_m^p B_p^q B_q^s$; |
| 85.) $W_s^k W_k^l B_l^m V_m^p A_p^q A_q^s$; | 86.) $W_s^k W_k^l A_l^m V_m^p B_p^q B_q^s$; | |

Следует отметить, что в монографии [2, С. 65, Таблица 2] и ее английском оригинале присутствуют досадные опечатки. Среди индивидуальных инвариантов матрицы $\mathbf{a}$ присутствует инвариант $\mathbf{b}^3$. В строке для набора совместных инвариантов двух симметричных и двух антисимметричных матриц второго ранга $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ отсутствуют инварианты $\mathbf{u}^2\mathbf{a}\mathbf{v}\mathbf{b}^{2*†}$ (инварианты 83.) – 86.) в списке (1)), вместо инвариантов $\mathbf{u}\mathbf{v}\mathbf{a}^2\mathbf{b}^{*†}$ (инварианты 72.) – 75.) в списке (1)) присутствуют инварианты $\mathbf{u}\mathbf{v}\mathbf{a}^2\mathbf{b}^*$ и $\mathbf{u}\mathbf{v}\mathbf{b}\mathbf{a}^{2*}$. Однако, в руководствуясь статьями [5, 6] можно составить верный полный набор индивидуальных и совместных гемитропных инвариантов двух симметричных и двух антисимметричных тензоров второго ранга (см. [6, Р. 80, Table 1]). Однако, первую часть статьи [5] следует читать с осторожностью, т.к. по утверждению самого автора в ней также присутствуют неточности.

Для целей нашего исследования необходимо взять лишь 20 гемитропных инвариантов первой, второй и третьей степеней из полный набора индивидуальных и совместных гемитропных инвариантов (1):

$$1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 13; 16; 19; 22; 25; 26; 40; 54; 62. \quad (2)$$

Сначала выберем линейные инварианты из списка (1):

$$1; 4. \quad (3)$$

Следует заметить, что линейные инварианты (3) могут быть заданы альтернативным способом, т.е. в терминах $A_{\cdot k}^{k\cdot}$ и $B_{\cdot k}^{k\cdot}$.

Сформируем затем набор квадратичных инвариантов из приведенного элементов списка (1). Ясно, что указанные инварианты суть (номера указывают на сами инварианты):

$$2; 5; 1 \times 1, 1 \times 4; 4 \times 4; 7; 8; 9; 25. \quad (4)$$

Набор (4) состоит из 9 квадратичных гемитропных инвариантов, которые были использованы для построения квадратичной энергетической формы [17, 18].

Для определения аппроксимаций более высокой степени (третьей, четвертой, пятой, шестой ...) энергетических форм в конечном итоге необходимо расширить систему рациональных инвариантов до инвариантов более высоких целых степеней (3, 4, 5, ...). Кубические гемитропные инварианты интересны тем, что с их помощью легко находятся квадратичные поправки к линейным определяющим уравнениям теории микрополярной упругости.

Найдем далее неприводимую систему кубических инвариантов, представляющих собой совместные произведения инвариантов из списка (2) общей степени 3. Полный перечень из 28 кубических гемитропных инвариантов принимает вид:

$$\begin{aligned} 7 \times 1, 7 \times 4; 8 \times 1, 8 \times 4; 1^3, 1^2 \times 4, 1 \times 4^2, 1 \times 2, 1 \times 5, 1 \times 9, \\ 1 \times 25; 4^3, 4 \times 2, 4 \times 5, 4 \times 9, 4 \times 25; 3; 6; 10; 11; 12; 16; 14; \\ 22; 26; 40; 54; 62; \end{aligned} \quad (5)$$

объединяя который с квадратичным набором (4) можно получить кубическую аппроксимацию энергетической формы обобщенного гемитропного микрополярного упругого тела, выполнив вместо $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{V}$, $\mathbf{W}$, подстановку, указанную ниже в следующем разделе.

2. Пример: кубическая аппроксимация энергетической формы гемитропного микрополярного упругого тела Опираясь на результаты предыдущего раздела построим систему индивидуальных и совместных целых рациональных алгебраических инвариантов симметричных и антисимметричных частей асимметричных тензоров деформаций и тензора изгиба–кручения. Для этого в данных выше формулах ёследует выполнить замену:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \text{sym } \boldsymbol{\epsilon}, & \mathbf{B} &= \text{sym } \boldsymbol{\kappa}, \\ \mathbf{V} &= \text{asym } \boldsymbol{\epsilon}, & \mathbf{W} &= \text{asym } \boldsymbol{\kappa}. \end{aligned} \quad (6)$$

В смешанных компонентах соотношения (6) примут вид ³

$$\begin{aligned} A_{s\cdot}^{\cdot k} &= \frac{1}{2} [\epsilon_{s\cdot}^{\cdot k} + \epsilon_{\cdot s}^{k\cdot}], & B_{s\cdot}^{\cdot k} &= \frac{1}{2} [\kappa_{s\cdot}^{\cdot k} + \kappa_{\cdot s}^{k\cdot}], \\ V_{s\cdot}^{\cdot k} &= \frac{1}{2} [\epsilon_{s\cdot}^{\cdot k} - \epsilon_{\cdot s}^{k\cdot}], & W_{s\cdot}^{\cdot k} &= \frac{1}{2} [\kappa_{s\cdot}^{\cdot k} - \kappa_{\cdot s}^{k\cdot}]. \end{aligned} \quad (7)$$

Смешанные тензорные компоненты в (7) могут быть заданы альтернативным эквивалентным способом (например, $A_{s\cdot}^{\cdot k}$ и $B_{s\cdot}^{\cdot k}$).

Воспользовавшись заменой (6) и принимая в расчет схему нумерации из работ [17, 18], система квадратичных гемитропных инвариантов (4) примет вид

$$\begin{aligned} {}^2\text{I}_1 &= \frac{1}{4} [\epsilon_{s\cdot}^{\cdot s} + \epsilon_{\cdot k}^{k\cdot}]^2, & {}^2\text{I}_2 &= \frac{1}{4} [\kappa_{s\cdot}^{\cdot s} + \kappa_{\cdot k}^{k\cdot}]^2, \\ {}^2\text{I}_3 &= \frac{1}{4} [\epsilon_{s\cdot}^{\cdot k} + \epsilon_{\cdot s}^{k\cdot}] [\epsilon_{k\cdot}^{\cdot s} + \epsilon_{\cdot k}^{s\cdot}], & {}^2\text{I}_4 &= \frac{1}{4} [\kappa_{s\cdot}^{\cdot k} + \kappa_{\cdot s}^{k\cdot}] [\kappa_{k\cdot}^{\cdot s} + \kappa_{\cdot k}^{s\cdot}], \\ {}^2\text{I}_5 &= \frac{1}{4} [\epsilon_{s\cdot}^{\cdot k} - \epsilon_{\cdot s}^{k\cdot}] [\epsilon_{k\cdot}^{\cdot s} - \epsilon_{\cdot k}^{s\cdot}], & {}^2\text{I}_6 &= \frac{1}{4} [\kappa_{s\cdot}^{\cdot k} - \kappa_{\cdot s}^{k\cdot}] [\kappa_{k\cdot}^{\cdot s} - \kappa_{\cdot k}^{s\cdot}], \\ {}^2\text{I}_7 &= \frac{1}{4} [\epsilon_{s\cdot}^{\cdot s} + \epsilon_{\cdot k}^{k\cdot}] [\kappa_{s\cdot}^{\cdot s} + \kappa_{\cdot k}^{k\cdot}], & {}^2\text{I}_8 &= \frac{1}{4} [\epsilon_{s\cdot}^{\cdot k} + \epsilon_{\cdot s}^{k\cdot}] [\kappa_{k\cdot}^{\cdot s} + \kappa_{\cdot k}^{s\cdot}], \\ {}^2\text{I}_9 &= \frac{1}{4} [\epsilon_{s\cdot}^{\cdot k} - \epsilon_{\cdot s}^{k\cdot}] [\kappa_{k\cdot}^{\cdot s} - \kappa_{\cdot k}^{s\cdot}], \end{aligned} \quad (8)$$

³Отметим, что выражения вида $\epsilon_{s\cdot}^{\cdot k} + \epsilon_{\cdot s}^{k\cdot}$ корректно интерпретируются как сумма двух тензоров, поскольку $\epsilon_{s\cdot}^{\cdot k} = \epsilon_{\cdot s}^{k\cdot}$.

а систему гемитропных кубических инвариантов, полученную в предыдущем разделе статьи, примем в форме

$$\begin{aligned}
{}^3\mathfrak{J}_1 &= \frac{1}{8} [\epsilon_{s\cdot}^s + \epsilon_{k\cdot}^k]^3, & {}^3\mathfrak{J}_2 &= \frac{1}{8} [\kappa_{s\cdot}^s + \kappa_{k\cdot}^k]^3, \\
{}^3\mathfrak{J}_3 &= \frac{1}{8} [\epsilon_{s\cdot}^k + \epsilon_{s\cdot}^k] [\epsilon_{k\cdot}^l + \epsilon_{k\cdot}^l] [\epsilon_{l\cdot}^s + \epsilon_{l\cdot}^s], & {}^3\mathfrak{J}_4 &= \frac{1}{8} [\kappa_{s\cdot}^k + \kappa_{s\cdot}^k] [\kappa_{k\cdot}^l + \kappa_{k\cdot}^l] [\kappa_{l\cdot}^s + \kappa_{l\cdot}^s], \\
{}^3\mathfrak{J}_5 &= \frac{1}{8} [\epsilon_{s\cdot}^k + \epsilon_{s\cdot}^k] [\epsilon_{k\cdot}^s + \epsilon_{k\cdot}^s] [\epsilon_{l\cdot}^l + \epsilon_{l\cdot}^m], & {}^3\mathfrak{J}_6 &= \frac{1}{8} [\epsilon_{s\cdot}^k + \epsilon_{s\cdot}^k] [\epsilon_{k\cdot}^s + \epsilon_{k\cdot}^s] [\kappa_{l\cdot}^l + \kappa_{l\cdot}^m], \\
{}^3\mathfrak{J}_7 &= \frac{1}{8} [\kappa_{s\cdot}^k + \kappa_{s\cdot}^k] [\kappa_{k\cdot}^s + \kappa_{k\cdot}^s] [\epsilon_{l\cdot}^l + \epsilon_{l\cdot}^m], & {}^3\mathfrak{J}_8 &= \frac{1}{8} [\kappa_{s\cdot}^k + \kappa_{s\cdot}^k] [\kappa_{k\cdot}^s + \kappa_{k\cdot}^s] [\kappa_{l\cdot}^l + \kappa_{l\cdot}^m], \\
{}^3\mathfrak{J}_9 &= \frac{1}{8} [\epsilon_{l\cdot}^l + \epsilon_{l\cdot}^m]^2 [\kappa_{s\cdot}^s + \kappa_{k\cdot}^k], & {}^3\mathfrak{J}_{10} &= \frac{1}{8} [\kappa_{s\cdot}^s + \kappa_{k\cdot}^k]^2 [\epsilon_{l\cdot}^l + \epsilon_{l\cdot}^m], \\
{}^3\mathfrak{J}_{11} &= \frac{1}{8} [\epsilon_{s\cdot}^k + \epsilon_{s\cdot}^k] [\kappa_{k\cdot}^s + \kappa_{k\cdot}^s] [\epsilon_{l\cdot}^l + \epsilon_{l\cdot}^m], & {}^3\mathfrak{J}_{12} &= \frac{1}{8} [\epsilon_{s\cdot}^k + \epsilon_{s\cdot}^k] [\kappa_{k\cdot}^s + \kappa_{k\cdot}^s] [\kappa_{l\cdot}^l + \kappa_{l\cdot}^m], \\
{}^3\mathfrak{J}_{13} &= \frac{1}{8} [\epsilon_{s\cdot}^k + \epsilon_{s\cdot}^k] [\epsilon_{k\cdot}^l + \epsilon_{k\cdot}^l] [\kappa_{l\cdot}^s + \kappa_{l\cdot}^s], & {}^3\mathfrak{J}_{14} &= \frac{1}{8} [\kappa_{s\cdot}^k + \kappa_{s\cdot}^k] [\kappa_{k\cdot}^l + \kappa_{k\cdot}^l] [\epsilon_{l\cdot}^s + \epsilon_{l\cdot}^s], \\
{}^3\mathfrak{J}_{15} &= \frac{1}{8} [\epsilon_{s\cdot}^k + \epsilon_{s\cdot}^k] [\kappa_{k\cdot}^l + \kappa_{k\cdot}^l] [\epsilon_{l\cdot}^s - \epsilon_{l\cdot}^s], & {}^3\mathfrak{J}_{16} &= \frac{1}{8} [\epsilon_{s\cdot}^k + \epsilon_{s\cdot}^k] [\kappa_{k\cdot}^l + \kappa_{k\cdot}^l] [\kappa_{l\cdot}^s - \kappa_{l\cdot}^s], \\
{}^3\mathfrak{J}_{17} &= \frac{1}{8} [\epsilon_{s\cdot}^s + \epsilon_{l\cdot}^m] [\epsilon_{k\cdot}^l - \epsilon_{k\cdot}^l] [\epsilon_{l\cdot}^k - \epsilon_{l\cdot}^k], & {}^3\mathfrak{J}_{18} &= \frac{1}{8} [\kappa_{s\cdot}^s + \kappa_{l\cdot}^m] [\epsilon_{k\cdot}^l - \epsilon_{k\cdot}^l] [\epsilon_{l\cdot}^k - \epsilon_{l\cdot}^k], \\
{}^3\mathfrak{J}_{19} &= \frac{1}{8} [\epsilon_{s\cdot}^s + \epsilon_{l\cdot}^m] [\kappa_{k\cdot}^l - \kappa_{k\cdot}^l] [\kappa_{l\cdot}^k - \kappa_{l\cdot}^k], & {}^3\mathfrak{J}_{20} &= \frac{1}{8} [\kappa_{s\cdot}^s + \kappa_{l\cdot}^m] [\kappa_{k\cdot}^l - \kappa_{k\cdot}^l] [\kappa_{l\cdot}^k - \kappa_{l\cdot}^k], \\
{}^3\mathfrak{J}_{21} &= \frac{1}{8} [\epsilon_{s\cdot}^k + \epsilon_{s\cdot}^k] [\epsilon_{k\cdot}^l - \epsilon_{k\cdot}^l] [\epsilon_{l\cdot}^s - \epsilon_{l\cdot}^s], & {}^3\mathfrak{J}_{22} &= \frac{1}{8} [\kappa_{s\cdot}^k + \kappa_{s\cdot}^k] [\epsilon_{k\cdot}^l - \epsilon_{k\cdot}^l] [\epsilon_{l\cdot}^s - \epsilon_{l\cdot}^s], \\
{}^3\mathfrak{J}_{23} &= \frac{1}{8} [\epsilon_{s\cdot}^k + \epsilon_{s\cdot}^k] [\kappa_{k\cdot}^l - \kappa_{k\cdot}^l] [\kappa_{l\cdot}^s - \kappa_{l\cdot}^s], & {}^3\mathfrak{J}_{24} &= \frac{1}{8} [\kappa_{s\cdot}^k + \kappa_{s\cdot}^k] [\kappa_{k\cdot}^l - \kappa_{k\cdot}^l] [\kappa_{l\cdot}^s - \kappa_{l\cdot}^s], \\
{}^3\mathfrak{J}_{25} &= \frac{1}{8} [\epsilon_{s\cdot}^k + \epsilon_{s\cdot}^k] [\epsilon_{k\cdot}^l - \epsilon_{k\cdot}^l] [\kappa_{l\cdot}^s - \kappa_{l\cdot}^s], & {}^3\mathfrak{J}_{26} &= \frac{1}{8} [\kappa_{s\cdot}^k + \kappa_{s\cdot}^k] [\epsilon_{k\cdot}^l - \epsilon_{k\cdot}^l] [\kappa_{l\cdot}^s - \kappa_{l\cdot}^s], \\
{}^3\mathfrak{J}_{27} &= \frac{1}{8} [\epsilon_{s\cdot}^s + \epsilon_{l\cdot}^m] [\epsilon_{k\cdot}^l - \epsilon_{k\cdot}^l] [\kappa_{l\cdot}^k - \kappa_{l\cdot}^k], & {}^3\mathfrak{J}_{28} &= \frac{1}{8} [\kappa_{s\cdot}^s + \kappa_{l\cdot}^m] [\epsilon_{k\cdot}^l - \epsilon_{k\cdot}^l] [\kappa_{l\cdot}^k - \kappa_{l\cdot}^k].
\end{aligned} \tag{9}$$

А-представление кубической аппроксимации энергетической формы гемитропного микрополярного упругого тела, соответствующее системе квадратичных (8) и кубических (9) инвариантов, запишем в компактной форме:

$$\mathcal{U} = \sum_{\mathfrak{c}=1}^9 {}^2C_{\mathfrak{c}} {}^2\mathfrak{I}_{\mathfrak{c}} + \sum_{\mathfrak{a}=1}^{28} {}^3C_{\mathfrak{a}} {}^3\mathfrak{J}_{\mathfrak{a}}, \tag{10}$$

где введены новые обозначения для определяющих модулей: ${}^2C_{\mathfrak{c}}$ ($\mathfrak{c} = 1, \dots, 9$) — определяющие модули квадратичного приближения; ${}^3C_{\mathfrak{a}}$ ($\mathfrak{a} = 1, \dots, 28$) — определяющие модули, связанные с квадратичными поправками; ${}^2\mathfrak{I}_{\mathfrak{c}}$ ($\mathfrak{c} = 1, \dots, 9$) — квадратичные инварианты; ${}^3\mathfrak{J}_{\mathfrak{a}}$ ($\mathfrak{a} = 1, \dots, 28$) — кубические инварианты. Стоит отметить чувствительность некоторых определяющих модулей к зеркальным отражениям и инверсиям

трехмерного пространства, что связано с возможностью присвоения нечетного алгебраического веса тензору изгиба-кручения.

После этого становится понятна алгебраическая сущность 37 определяющих постоянных ${}^2C_{\mathfrak{c}}$ ($\mathfrak{c} = 1, \dots, 9$) и ${}^3C_{\mathfrak{a}}$ ($\mathfrak{a} = 1, \dots, 28$): это неопределенные коэффициенты в линейной комбинации неприводимой системы квадратичных и кубических инвариантов (8) и (9).

3. Вспомогательные формулы для вывода определяющих уравнений гemitропной микрополярной упругости. Определяющие уравнения для силовых и моментных напряжений, соответствующие энергетической форме (10), получены как в виде

$$t_{\cdot k}^{s\cdot} = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial (\epsilon_{s\cdot}^{k\cdot})}, \quad \mu_{\cdot k}^{s\cdot} = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial (\kappa_{s\cdot}^{k\cdot})}. \quad (11)$$

Вычислим вспомогательные производные для получения (11). Для этого найдем сначала производные от квадратичных инвариантов. В этом случае имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial {}^2I_1}{\partial (\epsilon_{p\cdot}^{q\cdot})} &= \frac{1}{2} [\epsilon_{s\cdot}^{s\cdot} + \epsilon_{\cdot k}^{k\cdot}] [\delta_l^p \delta_q^l + g_{mq} g^{pm}] = [\epsilon_{s\cdot}^{s\cdot} + \epsilon_{\cdot k}^{k\cdot}] \delta_q^p, \\ \frac{\partial {}^2I_2}{\partial (\kappa_{p\cdot}^{q\cdot})} &= \frac{1}{2} [\kappa_{s\cdot}^{s\cdot} + \kappa_{\cdot k}^{k\cdot}] [\delta_l^p \delta_q^l + g_{mq} g^{pm}] = [\kappa_{s\cdot}^{s\cdot} + \kappa_{\cdot k}^{k\cdot}] \delta_q^p, \\ \frac{\partial {}^2I_3}{\partial (\epsilon_{p\cdot}^{q\cdot})} &= \frac{1}{4} [\delta_s^p \delta_q^k + g_{sq} g^{pk}] [\epsilon_{k\cdot}^{s\cdot} + \epsilon_{\cdot k}^{s\cdot}] + \frac{1}{4} [\epsilon_{s\cdot}^{k\cdot} + \epsilon_{\cdot s}^{k\cdot}] [\delta_k^p \delta_q^s + g_{kq} g^{ps}] = \epsilon_{q\cdot}^{p\cdot} + \epsilon_{\cdot q}^{p\cdot}, \\ \frac{\partial {}^2I_4}{\partial (\kappa_{p\cdot}^{q\cdot})} &= \frac{1}{4} [\delta_s^p \delta_q^k + g_{sq} g^{pk}] [\kappa_{k\cdot}^{s\cdot} + \kappa_{\cdot k}^{s\cdot}] + \frac{1}{4} [\kappa_{s\cdot}^{k\cdot} + \kappa_{\cdot s}^{k\cdot}] [\delta_k^p \delta_q^s + g_{kq} g^{ps}] = \kappa_{q\cdot}^{p\cdot} + \kappa_{\cdot q}^{p\cdot}, \\ \frac{\partial {}^2I_5}{\partial (\epsilon_{p\cdot}^{q\cdot})} &= \frac{1}{4} [\delta_s^p \delta_q^k - g_{sq} g^{pk}] [\epsilon_{k\cdot}^{s\cdot} - \epsilon_{\cdot k}^{s\cdot}] + \frac{1}{4} [\epsilon_{s\cdot}^{k\cdot} - \epsilon_{\cdot s}^{k\cdot}] [\delta_k^p \delta_q^s - g_{kq} g^{ps}] = \epsilon_{q\cdot}^{p\cdot} - \epsilon_{\cdot q}^{p\cdot}, \\ \frac{\partial {}^2I_6}{\partial (\kappa_{p\cdot}^{q\cdot})} &= \frac{1}{4} [\delta_s^p \delta_q^k - g_{sq} g^{pk}] [\kappa_{k\cdot}^{s\cdot} - \kappa_{\cdot k}^{s\cdot}] + \frac{1}{4} [\kappa_{s\cdot}^{k\cdot} - \kappa_{\cdot s}^{k\cdot}] [\delta_k^p \delta_q^s - g_{kq} g^{ps}] = \kappa_{q\cdot}^{p\cdot} - \kappa_{\cdot q}^{p\cdot}, \\ \frac{\partial {}^2I_7}{\partial (\epsilon_{p\cdot}^{q\cdot})} &= \frac{1}{4} [\kappa_{s\cdot}^{s\cdot} + \kappa_{\cdot k}^{k\cdot}] [\delta_l^p \delta_q^l + g_{mq} g^{pm}] = \frac{1}{2} [\kappa_{s\cdot}^{s\cdot} + \kappa_{\cdot k}^{k\cdot}] \delta_q^p, \\ \frac{\partial {}^2I_7}{\partial (\kappa_{p\cdot}^{q\cdot})} &= \frac{1}{4} [\epsilon_{s\cdot}^{s\cdot} + \epsilon_{\cdot k}^{k\cdot}] [\delta_l^p \delta_q^l + g_{mq} g^{pm}] = \frac{1}{2} [\epsilon_{s\cdot}^{s\cdot} + \epsilon_{\cdot k}^{k\cdot}] \delta_q^p, \\ \frac{\partial {}^2I_8}{\partial (\epsilon_{p\cdot}^{q\cdot})} &= \frac{1}{4} [\delta_s^p \delta_q^k + g_{sq} g^{pk}] [\kappa_{k\cdot}^{s\cdot} + \kappa_{\cdot k}^{s\cdot}] = \frac{1}{2} [\kappa_{q\cdot}^{p\cdot} + \kappa_{\cdot q}^{p\cdot}], \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \mathbf{I}_8}{\partial (\kappa_{p\cdot}^q)} &= \frac{1}{4} [\epsilon_{s\cdot}^k + \epsilon_{\cdot s}^k] [\delta_k^p \delta_q^s + g_{kq} g^{ps}] = \frac{1}{2} [\epsilon_{q\cdot}^p + \epsilon_{\cdot q}^p], \\
\frac{\partial^2 \mathbf{I}_9}{\partial (\epsilon_{p\cdot}^q)} &= \frac{1}{4} [\delta_s^p \delta_q^k - g_{sq} g^{pk}] [\kappa_{k\cdot}^s - \kappa_{\cdot k}^s] = \frac{1}{2} [\kappa_{q\cdot}^p - \kappa_{\cdot q}^p], \\
\frac{\partial^2 \mathbf{I}_9}{\partial (\kappa_{p\cdot}^q)} &= \frac{1}{4} [\epsilon_{s\cdot}^k - \epsilon_{\cdot s}^k] [\delta_k^p \delta_q^s - g_{kq} g^{ps}] = \frac{1}{2} [\epsilon_{q\cdot}^p - \epsilon_{\cdot q}^p],
\end{aligned} \tag{13}$$

Отметим, что для дельт Кронекера справедливы равенства:

$$\delta_{\cdot p}^q = \delta_q^p = \delta_q^p. \tag{14}$$

Производные от кубических инвариантов примут вид:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^3 \mathbf{J}_1}{\partial (\epsilon_{p\cdot}^q)} &= \frac{3}{8} [\epsilon_{s\cdot}^s + \epsilon_{\cdot k}^k]^2 [\delta_m^p \delta_q^m + g_{lq} g^{pl}] = \frac{3}{4} [\epsilon_{s\cdot}^s + \epsilon_{\cdot k}^k]^2 \delta_q^p, \\
\frac{\partial^3 \mathbf{J}_2}{\partial (\kappa_{p\cdot}^q)} &= \frac{3}{8} [\kappa_{s\cdot}^s + \kappa_{\cdot k}^k]^2 [\delta_m^p \delta_q^m + g_{lq} g^{pl}] = \frac{3}{4} [\kappa_{s\cdot}^s + \kappa_{\cdot k}^k]^2 \delta_q^p, \\
\frac{\partial^3 \mathbf{J}_3}{\partial (\epsilon_{p\cdot}^q)} &= \frac{1}{8} [\delta_s^p \delta_q^k + g_{sq} g^{pk}] [\epsilon_{k\cdot}^l + \epsilon_{\cdot k}^l] [\epsilon_{l\cdot}^s + \epsilon_{\cdot l}^s] + \\
&\quad + \frac{1}{8} [\epsilon_{s\cdot}^k + \epsilon_{\cdot s}^k] [\delta_k^p \delta_q^l + g_{kq} g^{pl}] [\epsilon_{l\cdot}^s + \epsilon_{\cdot l}^s] + \frac{1}{8} [\epsilon_{s\cdot}^k + \epsilon_{\cdot s}^k] [\epsilon_{k\cdot}^l + \epsilon_{\cdot k}^l] [\delta_l^p \delta_q^s + g_{lq} g^{ps}] = \\
&\quad = \frac{3}{8} [\epsilon_{sq} + \epsilon_{qs}] [\epsilon^{ps} + \epsilon^{sp}] + [\epsilon_{s\cdot}^p + \epsilon_{\cdot s}^p] [\epsilon_{q\cdot}^s + \epsilon_{\cdot q}^s], \\
\frac{\partial^3 \mathbf{J}_4}{\partial (\kappa_{p\cdot}^q)} &= \frac{3}{8} [[\kappa_{sq} + \kappa_{qs}] [\kappa^{ps} + \kappa^{sp}] + [\kappa_{s\cdot}^p + \kappa_{\cdot s}^p] [\kappa_{q\cdot}^s + \kappa_{\cdot q}^s]], \\
\frac{\partial^3 \mathbf{J}_5}{\partial (\epsilon_{p\cdot}^q)} &= \frac{1}{8} [\delta_s^p \delta_q^k + g_{sq} g^{pk}] [\epsilon_{k\cdot}^s + \epsilon_{\cdot k}^s] [\epsilon_{l\cdot}^l + \epsilon_{\cdot l}^l] + \frac{1}{8} [\epsilon_{s\cdot}^k + \epsilon_{\cdot s}^k] [\delta_k^p \delta_q^s + g_{kq} g^{ps}] [\epsilon_{l\cdot}^l + \epsilon_{\cdot l}^l] + \\
&\quad + \frac{1}{8} [\epsilon_{s\cdot}^k + \epsilon_{\cdot s}^k] [\epsilon_{k\cdot}^s + \epsilon_{\cdot k}^s] [\delta_l^p \delta_q^l + g_{mq} g^{pm}] = \\
&\quad = \frac{1}{4} [\epsilon_{q\cdot}^p + \epsilon_{\cdot q}^p] [\epsilon_{l\cdot}^l + \epsilon_{\cdot l}^l] + \frac{1}{4} [\epsilon_{s\cdot}^k + \epsilon_{\cdot s}^k] [\epsilon_{k\cdot}^s + \epsilon_{\cdot k}^s] \delta_q^p, \\
\frac{\partial^3 \mathbf{J}_6}{\partial (\epsilon_{p\cdot}^q)} &= \frac{1}{4} [\epsilon_{q\cdot}^p + \epsilon_{\cdot q}^p] [\kappa_{l\cdot}^l + \kappa_{\cdot l}^l], \quad \frac{\partial^3 \mathbf{J}_6}{\partial (\kappa_{p\cdot}^q)} = \frac{1}{4} [\epsilon_{s\cdot}^k + \epsilon_{\cdot s}^k] [\epsilon_{k\cdot}^s + \epsilon_{\cdot k}^s] \delta_q^p, \\
\frac{\partial^3 \mathbf{J}_7}{\partial (\epsilon_{p\cdot}^q)} &= \frac{1}{4} [\kappa_{s\cdot}^k + \kappa_{\cdot s}^k] [\kappa_{k\cdot}^s + \kappa_{\cdot k}^s] \delta_q^p, \quad \frac{\partial^3 \mathbf{J}_7}{\partial (\kappa_{p\cdot}^q)} = \frac{1}{4} [\kappa_{q\cdot}^p + \kappa_{\cdot q}^p] [\epsilon_{l\cdot}^l + \epsilon_{\cdot l}^l], \\
\frac{\partial^3 \mathbf{J}_8}{\partial (\kappa_{p\cdot}^q)} &= \frac{1}{4} [\kappa_{q\cdot}^p + \kappa_{\cdot q}^p] [\kappa_{l\cdot}^l + \kappa_{\cdot l}^l] + \frac{1}{4} [\kappa_{s\cdot}^k + \kappa_{\cdot s}^k] [\kappa_{k\cdot}^s + \kappa_{\cdot k}^s] \delta_q^p,
\end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^3 \mathfrak{J}_9}{\partial (\epsilon_p^q)} &= \frac{1}{4} [\epsilon_{s.}^s + \epsilon_{k.}^k] [\kappa_{l.}^l + \kappa_{m.}^m] \delta_p^q, & \frac{\partial^3 \mathfrak{J}_9}{\partial (\kappa_p^q)} &= \frac{1}{8} [\epsilon_{s.}^s + \epsilon_{k.}^k]^2 \delta_p^q, \\
\frac{\partial^3 \mathfrak{J}_{10}}{\partial (\epsilon_p^q)} &= \frac{1}{8} [\kappa_{s.}^s + \kappa_{k.}^k]^2 \delta_p^q, & \frac{\partial^3 \mathfrak{J}_{10}}{\partial (\kappa_p^q)} &= \frac{1}{4} [\epsilon_{s.}^s + \epsilon_{k.}^k] [\kappa_{s.}^s + \kappa_{k.}^k] \delta_p^q, \\
\frac{\partial^3 \mathfrak{J}_{11}}{\partial (\epsilon_p^q)} &= \frac{1}{8} [\delta_s^p \delta_q^k + g_{sq} g^{pk}] [\kappa_{k.}^s + \kappa_{s.}^s] [\epsilon_{l.}^l + \epsilon_{m.}^m] + \frac{1}{4} [\epsilon_{s.}^k + \epsilon_{s.}^k] [\kappa_{k.}^s + \kappa_{k.}^s] \delta_q^p = \\
&= \frac{1}{4} [\kappa_{q.}^p + \kappa_{q.}^p] [\epsilon_{l.}^l + \epsilon_{m.}^m] + \frac{1}{4} [\epsilon_{s.}^k + \epsilon_{s.}^k] [\kappa_{k.}^s + \kappa_{k.}^s] \delta_q^p, \\
\frac{\partial^3 \mathfrak{J}_{11}}{\partial (\kappa_p^q)} &= \frac{1}{8} [\epsilon_{s.}^k + \epsilon_{s.}^k] [\delta_k^p \delta_q^s + g_{kq} g^{ps}] [\epsilon_{l.}^l + \epsilon_{m.}^m] = \frac{1}{4} [\epsilon_{q.}^p + \epsilon_{q.}^p] [\epsilon_{l.}^l + \epsilon_{m.}^m], \\
\frac{\partial^3 \mathfrak{J}_{12}}{\partial (\epsilon_p^q)} &= \frac{1}{8} [\delta_s^p \delta_q^k + g_{sq} g^{pk}] [\kappa_{k.}^s + \kappa_{s.}^s] [\kappa_{l.}^l + \kappa_{m.}^m] = \frac{1}{4} [\kappa_{q.}^p + \kappa_{q.}^p] [\kappa_{l.}^l + \kappa_{m.}^m], \\
\frac{\partial^3 \mathfrak{J}_{12}}{\partial (\kappa_p^q)} &= \frac{1}{4} [\kappa_{q.}^p + \kappa_{q.}^p] [\epsilon_{l.}^l + \epsilon_{m.}^m] + \frac{1}{4} [\epsilon_{s.}^k + \epsilon_{s.}^k] [\kappa_{k.}^s + \kappa_{k.}^s] \delta_q^p, \\
\frac{\partial^3 \mathfrak{J}_{13}}{\partial (\epsilon_p^q)} &= \frac{1}{8} [\delta_s^p \delta_q^k + g_{sq} g^{pk}] [\epsilon_{k.}^l + \epsilon_{k.}^l] [\kappa_{l.}^s + \kappa_{l.}^s] + \\
&+ \frac{1}{8} [\epsilon_{s.}^k + \epsilon_{s.}^k] [\delta_k^p \delta_q^l + g_{kq} g^{pl}] [\kappa_{l.}^s + \kappa_{l.}^s] = \\
&= \frac{1}{8} \left[[\epsilon_{q.}^l + \epsilon_{q.}^l] [\kappa_{l.}^p + \kappa_{l.}^p] + [\epsilon^{pl} + \epsilon^{lp}] [\kappa_{lq} + \kappa_{ql}] + \right. \\
&\quad \left. + [\epsilon_{s.}^p + \epsilon_{s.}^p] [\kappa_{q.}^s + \kappa_{q.}^s] + [\epsilon_{sq} + \epsilon_{qs}] [\kappa^{ps} + \kappa^{sp}] \right], \\
\frac{\partial^3 \mathfrak{J}_{13}}{\partial (\kappa_p^q)} &= \frac{1}{8} [\epsilon_{s.}^k + \epsilon_{s.}^k] [\epsilon_{k.}^l + \epsilon_{k.}^l] [\delta_l^p \delta_q^s + g_{lq} g^{ps}] = \\
&= \frac{1}{8} \left[[\epsilon_{q.}^k + \epsilon_{q.}^k] [\epsilon_{k.}^p + \epsilon_{k.}^p] + [\epsilon^{pk} + \epsilon^{kp}] [\epsilon_{kq} + \epsilon_{qk}] \right], \\
\frac{\partial^3 \mathfrak{J}_{14}}{\partial (\epsilon_p^q)} &= \frac{1}{8} [\kappa_{s.}^k + \kappa_{s.}^k] [\kappa_{k.}^l + \kappa_{k.}^l] [\delta_l^p \delta_q^s + g_{lq} g^{ps}] = \\
&= \frac{1}{8} \left[[\kappa_{q.}^k + \kappa_{q.}^k] [\kappa_{k.}^p + \kappa_{k.}^p] + [\kappa^{pk} + \kappa^{kp}] [\kappa_{kq} + \kappa_{qk}] \right], \\
\frac{\partial^3 \mathfrak{J}_{14}}{\partial (\kappa_p^q)} &= \frac{1}{8} [\delta_s^p \delta_q^k + g_{sq} g^{pk}] [\kappa_{k.}^l + \kappa_{k.}^l] [\epsilon_{l.}^s + \epsilon_{l.}^s] + \\
&+ \frac{1}{8} [\kappa_{s.}^k + \kappa_{s.}^k] [\delta_k^p \delta_q^l + g_{kq} g^{pl}] [\epsilon_{l.}^s + \epsilon_{l.}^s] = \\
&= \frac{1}{8} \left[[\kappa_{q.}^l + \kappa_{q.}^l] [\epsilon_{l.}^p + \epsilon_{l.}^p] + [\kappa^{pl} + \kappa^{lp}] [\epsilon_{lq} + \epsilon_{ql}] + \right. \\
&\quad \left. + [\kappa_{s.}^p + \kappa_{s.}^p] [\epsilon_{q.}^s + \epsilon_{q.}^s] + [\kappa_{sq} + \kappa_{qs}] [\epsilon^{ps} + \epsilon^{sp}] \right],
\end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^3 \mathfrak{J}_{15}}{\partial(\epsilon_p^q)} &= \frac{1}{8} [\delta_s^p \delta_q^k + g_{sq} g^{pk}] [\kappa_{k\cdot}^l + \kappa_{\cdot k}^l] [\epsilon_{l\cdot}^s - \epsilon_{\cdot l}^s] + \\
&\quad + \frac{1}{8} [\epsilon_{s\cdot}^k + \epsilon_{\cdot s}^k] [\kappa_{k\cdot}^l + \kappa_{\cdot k}^l] [\delta_l^p \delta_q^s - g_{lq} g^{ps}] = \\
&= \frac{1}{8} [\kappa_{q\cdot}^l + \kappa_{\cdot q}^l] [\epsilon_{l\cdot}^p - \epsilon_{\cdot l}^p] + [\kappa^{pl} + \kappa^{lp}] [\epsilon_{lq} - \epsilon_{ql}] \\
&\quad + [\epsilon_{q\cdot}^k + \epsilon_{\cdot q}^k] [\kappa_{k\cdot}^p + \kappa_{\cdot k}^p] - [\epsilon^{pk} + \epsilon^{kp}] [\kappa_{kq} + \kappa_{qk}], \\
\frac{\partial^3 \mathfrak{J}_{15}}{\partial(\kappa_p^q)} &= \frac{1}{8} [\epsilon_{s\cdot}^k + \epsilon_{\cdot s}^k] [\delta_k^p \delta_q^l + g_{kq} g^{pl}] [\epsilon_{l\cdot}^s - \epsilon_{\cdot l}^s] = \\
&= \frac{1}{8} [\epsilon_{sq} + \epsilon_{qs}] [\epsilon^{ps} - \epsilon^{sp}] + [\epsilon_{s\cdot}^p + \epsilon_{\cdot s}^p] [\epsilon_{q\cdot}^s - \epsilon_{\cdot q}^s], \\
\frac{\partial^3 \mathfrak{J}_{16}}{\partial(\epsilon_p^q)} &= \frac{1}{8} [\delta_s^p \delta_q^k + g_{sq} g^{pk}] [\kappa_{k\cdot}^l + \kappa_{\cdot k}^l] [\kappa_{l\cdot}^s - \kappa_{\cdot l}^s] = \\
&= \frac{1}{8} [\kappa_{q\cdot}^l + \kappa_{\cdot q}^l] [\kappa_{l\cdot}^p - \kappa_{\cdot l}^p] + [\kappa^{pl} + \kappa^{lp}] [\kappa_{lq} - \kappa_{ql}], \\
\frac{\partial^3 \mathfrak{J}_{16}}{\partial(\kappa_p^q)} &= \frac{1}{8} [\epsilon_{s\cdot}^k + \epsilon_{\cdot s}^k] [\delta_k^p \delta_q^l + g_{kq} g^{pl}] [\kappa_{l\cdot}^s - \kappa_{\cdot l}^s] + \\
&\quad + \frac{1}{8} [\epsilon_{s\cdot}^k + \epsilon_{\cdot s}^k] [\kappa_{k\cdot}^l + \kappa_{\cdot k}^l] [\delta_l^p \delta_q^s - g_{lq} g^{ps}] = \\
&= \frac{1}{8} [\epsilon_{s\cdot}^p + \epsilon_{\cdot s}^p] [\kappa_{q\cdot}^s - \kappa_{\cdot q}^s] + [\epsilon_{sq} + \epsilon_{qs}] [\kappa^{ps} - \kappa^{sp}] + \\
&\quad + [\epsilon_{q\cdot}^k + \epsilon_{\cdot q}^k] [\kappa_{k\cdot}^p + \kappa_{\cdot k}^p] - [\epsilon^{pk} + \epsilon^{kp}] [\kappa_{kq} + \kappa_{qk}], \tag{17} \\
\frac{\partial^3 \mathfrak{J}_{17}}{\partial(\epsilon_p^q)} &= \frac{1}{8} [\delta_s^p \delta_q^k - g_{sq} g^{pk}] [\epsilon_{k\cdot}^s - \epsilon_{\cdot k}^s] [\epsilon_{l\cdot}^l + \epsilon_{\cdot m}^m] + \\
&\quad + \frac{1}{8} [\epsilon_{s\cdot}^k - \epsilon_{\cdot s}^k] [\delta_k^p \delta_q^s - g_{kq} g^{ps}] [\epsilon_{l\cdot}^l + \epsilon_{\cdot m}^m] + \frac{1}{4} [\epsilon_{s\cdot}^k - \epsilon_{\cdot s}^k] [\epsilon_{k\cdot}^s - \epsilon_{\cdot k}^s] \delta_q^p = \\
&= \frac{1}{2} [\epsilon_{q\cdot}^p - \epsilon_{\cdot q}^p] [\epsilon_{l\cdot}^l + \epsilon_{\cdot m}^m] + \frac{1}{4} [\epsilon_{s\cdot}^k - \epsilon_{\cdot s}^k] [\epsilon_{k\cdot}^s - \epsilon_{\cdot k}^s] \delta_q^p, \\
\frac{\partial^3 \mathfrak{J}_{18}}{\partial(\epsilon_p^q)} &= \frac{1}{8} [\delta_s^p \delta_q^k - g_{sq} g^{pk}] [\epsilon_{k\cdot}^s - \epsilon_{\cdot k}^s] [\kappa_{l\cdot}^l + \kappa_{\cdot m}^m] + \\
&\quad + \frac{1}{8} [\epsilon_{s\cdot}^k - \epsilon_{\cdot s}^k] [\delta_k^p \delta_q^s - g_{kq} g^{ps}] [\kappa_{l\cdot}^l + \kappa_{\cdot m}^m] = \frac{1}{2} [\epsilon_{q\cdot}^p - \epsilon_{\cdot q}^p] [\kappa_{l\cdot}^l + \kappa_{\cdot m}^m], \\
\frac{\partial^3 \mathfrak{J}_{18}}{\partial(\kappa_p^q)} &= \frac{1}{4} [\epsilon_{s\cdot}^k - \epsilon_{\cdot s}^k] [\epsilon_{k\cdot}^s - \epsilon_{\cdot k}^s] \delta_q^p, \quad \frac{\partial^3 \mathfrak{J}_{19}}{\partial(\epsilon_p^q)} = \frac{1}{4} [\kappa_{s\cdot}^k - \kappa_{\cdot s}^k] [\kappa_{k\cdot}^s - \kappa_{\cdot k}^s] \delta_q^p, \\
\frac{\partial^3 \mathfrak{J}_{19}}{\partial(\kappa_p^q)} &= \frac{1}{8} [\delta_s^p \delta_q^k - g_{sq} g^{pk}] [\kappa_{k\cdot}^s - \kappa_{\cdot k}^s] [\epsilon_{l\cdot}^l + \epsilon_{\cdot m}^m] + \\
&\quad + \frac{1}{8} [\kappa_{s\cdot}^k - \kappa_{\cdot s}^k] [\delta_k^p \delta_q^s - g_{kq} g^{ps}] [\epsilon_{l\cdot}^l + \epsilon_{\cdot m}^m] = \frac{1}{2} [\kappa_{q\cdot}^p - \kappa_{\cdot q}^p] [\epsilon_{l\cdot}^l + \epsilon_{\cdot m}^m],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^3 \mathfrak{J}_{20}}{\partial (\kappa_{p \cdot}^q)} &= \frac{1}{8} [\delta_s^p \delta_q^k - g_{sq} g^{pk}] [\kappa_{k \cdot}^s - \kappa_{\cdot k}^{s \cdot}] [\kappa_{l \cdot}^l + \kappa_{\cdot m}^{m \cdot}] + \\
&+ \frac{1}{8} [\kappa_{s \cdot}^k - \kappa_{\cdot s}^{k \cdot}] [\delta_k^p \delta_q^s - g_{kq} g^{ps}] [\kappa_{l \cdot}^l + \kappa_{\cdot m}^{m \cdot}] + \frac{1}{4} [\kappa_{s \cdot}^k - \kappa_{\cdot s}^{k \cdot}] [\kappa_{k \cdot}^s - \kappa_{\cdot k}^{s \cdot}] \delta_q^p = \\
&= \frac{1}{2} [\kappa_{q \cdot}^p - \kappa_{\cdot q}^{p \cdot}] [\kappa_{l \cdot}^l + \kappa_{\cdot m}^{m \cdot}] + \frac{1}{4} [\kappa_{s \cdot}^k - \kappa_{\cdot s}^{k \cdot}] [\kappa_{k \cdot}^s - \kappa_{\cdot k}^{s \cdot}] \delta_q^p, \\
\frac{\partial^3 \mathfrak{J}_{21}}{\partial (\epsilon_{p \cdot}^q)} &= \frac{\partial 12}{\partial (\epsilon_{p \cdot}^q)} = \frac{1}{8} [\delta_s^p \delta_q^k + g_{sq} g^{pk}] [\epsilon_{k \cdot}^l - \epsilon_{\cdot k}^{l \cdot}] [\epsilon_{l \cdot}^s - \epsilon_{\cdot l}^{s \cdot}] + \\
&+ \frac{1}{8} [\epsilon_{s \cdot}^k + \epsilon_{\cdot s}^{k \cdot}] [\delta_k^p \delta_q^l - g_{kq} g^{pl}] [\epsilon_{l \cdot}^s - \epsilon_{\cdot l}^{s \cdot}] + \frac{1}{8} [\epsilon_{s \cdot}^k + \epsilon_{\cdot s}^{k \cdot}] [\epsilon_{k \cdot}^l - \epsilon_{\cdot k}^{l \cdot}] [\delta_l^p \delta_q^s - g_{lq} g^{ps}] = \\
&= \frac{1}{8} [\epsilon_{q \cdot}^l - \epsilon_{\cdot q}^{l \cdot}] [\epsilon_{l \cdot}^p - \epsilon_{\cdot l}^{p \cdot}] + [\epsilon_{lq} - \epsilon_{ql}] [\epsilon^{pl} - \epsilon^{lp}] + \\
&+ [\epsilon_{s \cdot}^p + \epsilon_{\cdot s}^{p \cdot}] [\epsilon_{q \cdot}^s - \epsilon_{\cdot q}^{s \cdot}] - [\epsilon_{sq} + \epsilon_{qs}] [\epsilon^{ps} - \epsilon^{sp}] + \\
&+ [\epsilon_{q \cdot}^k + \epsilon_{\cdot q}^{k \cdot}] [\epsilon_{k \cdot}^p - \epsilon_{\cdot k}^{p \cdot}] - [\epsilon^{pk} + \epsilon^{kp}] [\epsilon_{kq} - \epsilon_{qk}], \\
\frac{\partial^3 \mathfrak{J}_{22}}{\partial (\epsilon_{p \cdot}^q)} &= \frac{1}{8} [\kappa_{s \cdot}^k + \kappa_{\cdot s}^{k \cdot}] [\delta_k^p \delta_q^l - g_{kq} g^{pl}] [\epsilon_{l \cdot}^s - \epsilon_{\cdot l}^{s \cdot}] + \\
&+ \frac{1}{8} [\kappa_{s \cdot}^k + \kappa_{\cdot s}^{k \cdot}] [\epsilon_{k \cdot}^l - \epsilon_{\cdot k}^{l \cdot}] [\delta_l^p \delta_q^s - g_{lq} g^{ps}] = \\
&= \frac{1}{8} [\kappa_{s \cdot}^p + \kappa_{\cdot s}^{p \cdot}] [\epsilon_{q \cdot}^s - \epsilon_{\cdot q}^{s \cdot}] - [\kappa_{sq} + \kappa_{qs}] [\epsilon^{ps} - \epsilon^{sp}] + \\
&+ [\kappa_{q \cdot}^k + \kappa_{\cdot q}^{k \cdot}] [\epsilon_{k \cdot}^p - \epsilon_{\cdot k}^{p \cdot}] - [\kappa^{pk} + \kappa^{kp}] [\epsilon_{kq} - \epsilon_{qk}], \\
\frac{\partial^3 \mathfrak{J}_{22}}{\partial (\kappa_{p \cdot}^q)} &= \frac{1}{8} [\delta_s^p \delta_q^k + g_{sq} g^{pk}] [\epsilon_{k \cdot}^l - \epsilon_{\cdot k}^{l \cdot}] [\epsilon_{l \cdot}^s - \epsilon_{\cdot l}^{s \cdot}] = \\
&= \frac{1}{8} [\epsilon_{q \cdot}^l - \epsilon_{\cdot q}^{l \cdot}] [\epsilon_{l \cdot}^p - \epsilon_{\cdot l}^{p \cdot}] + [\epsilon_{lq} - \epsilon_{ql}] [\epsilon^{pl} - \epsilon^{lp}], \\
\frac{\partial^3 \mathfrak{J}_{23}}{\partial (\epsilon_{p \cdot}^q)} &= \frac{1}{8} [\delta_s^p \delta_q^k + g_{sq} g^{pk}] [\kappa_{k \cdot}^l - \kappa_{\cdot k}^{l \cdot}] [\kappa_{l \cdot}^s - \kappa_{\cdot l}^{s \cdot}] = \\
&= \frac{1}{8} [\kappa_{q \cdot}^l - \kappa_{\cdot q}^{l \cdot}] [\kappa_{l \cdot}^p - \kappa_{\cdot l}^{p \cdot}] + [\kappa_{lq} - \kappa_{ql}] [\kappa^{pl} - \kappa^{lp}], \\
\frac{\partial^3 \mathfrak{J}_{23}}{\partial (\kappa_{p \cdot}^q)} &= \frac{1}{8} [\epsilon_{s \cdot}^k + \epsilon_{\cdot s}^{k \cdot}] [\delta_k^p \delta_q^l - g_{kq} g^{pl}] [\kappa_{l \cdot}^s - \kappa_{\cdot l}^{s \cdot}] + \\
&+ \frac{1}{8} [\epsilon_{s \cdot}^k + \epsilon_{\cdot s}^{k \cdot}] [\kappa_{k \cdot}^l - \kappa_{\cdot k}^{l \cdot}] [\delta_l^p \delta_q^s - g_{lq} g^{ps}] = \\
&= \frac{1}{8} [\epsilon_{s \cdot}^p + \epsilon_{\cdot s}^{p \cdot}] [\kappa_{q \cdot}^s - \kappa_{\cdot q}^{s \cdot}] - [\epsilon_{sq} + \epsilon_{qs}] [\kappa^{ps} - \kappa^{sp}] + \\
&+ [\epsilon_{q \cdot}^k + \epsilon_{\cdot q}^{k \cdot}] [\kappa_{k \cdot}^p - \kappa_{\cdot k}^{p \cdot}] - [\epsilon^{pk} + \epsilon^{kp}] [\kappa_{kq} - \kappa_{qk}],
\end{aligned}$$

(18)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^3 \mathfrak{J}_{24}}{\partial (\kappa_p^q)} &= \frac{1}{8} [\delta_s^p \delta_q^k + g_{sq} g^{pk}] [\kappa_{k\cdot}^l - \kappa_{\cdot k}^l] [\kappa_{l\cdot}^s - \kappa_{\cdot l}^s] + \\
&+ \frac{1}{8} [\kappa_{s\cdot}^k + \kappa_{\cdot s}^k] [\delta_k^p \delta_q^l - g_{kq} g^{pl}] [\kappa_{l\cdot}^s - \kappa_{\cdot l}^s] + \\
&+ \frac{1}{8} [\kappa_{s\cdot}^k + \kappa_{\cdot s}^k] [\kappa_{k\cdot}^l - \kappa_{\cdot k}^l] [\delta_l^p \delta_q^s - g_{lq} g^{ps}] = \\
&= \frac{1}{8} [\kappa_{q\cdot}^l - \kappa_{\cdot q}^l] [\kappa_{l\cdot}^p - \kappa_{\cdot l}^p] + [\kappa_{lq} - \kappa_{ql}] [\kappa^{pl} - \kappa^{lp}] + [\kappa_{s\cdot}^p + \kappa_{\cdot s}^p] [\kappa_{q\cdot}^s - \kappa_{\cdot q}^s] - \\
&- [\kappa_{sq} + \kappa_{qs}] [\kappa^{ps} - \kappa^{sp}] + [\kappa_{q\cdot}^k + \kappa_{\cdot q}^k] [\kappa_{k\cdot}^p - \kappa_{\cdot k}^p] - [\kappa^{pk} + \kappa^{kp}] [\kappa_{kq} - \kappa_{qk}], \\
\frac{\partial^3 \mathfrak{J}_{25}}{\partial (\epsilon_p^q)} &= \frac{1}{8} [\delta_s^p \delta_q^k + g_{sq} g^{pk}] [\epsilon_{k\cdot}^l - \epsilon_{\cdot k}^l] [\kappa_{l\cdot}^s - \kappa_{\cdot l}^s] + \\
&+ \frac{1}{8} [\epsilon_{s\cdot}^k + \epsilon_{\cdot s}^k] [\delta_k^p \delta_q^l - g_{kq} g^{pl}] [\kappa_{l\cdot}^s - \kappa_{\cdot l}^s] = \\
&= \frac{1}{8} [\epsilon_{q\cdot}^l - \epsilon_{\cdot q}^l] [\kappa_{l\cdot}^p - \kappa_{\cdot l}^p] + [\epsilon_{lq} - \epsilon_{ql}] [\kappa^{pl} - \kappa^{lp}] + \\
&+ [\epsilon_{s\cdot}^p + \epsilon_{\cdot s}^p] [\kappa_{q\cdot}^s - \kappa_{\cdot q}^s] - [\epsilon_{sq} + \epsilon_{qs}] [\kappa^{ps} - \kappa^{sp}], \\
\frac{\partial^3 \mathfrak{J}_{25}}{\partial (\kappa_p^q)} &= \frac{1}{8} [\epsilon_{s\cdot}^k + \epsilon_{\cdot s}^k] [\epsilon_{k\cdot}^l - \epsilon_{\cdot k}^l] [\delta_l^p \delta_q^s - g_{lq} g^{ps}] = \\
&= \frac{1}{8} [\epsilon_{q\cdot}^k + \epsilon_{\cdot q}^k] [\epsilon_{k\cdot}^p - \epsilon_{\cdot k}^p] - [\epsilon^{pk} + \epsilon^{kp}] [\epsilon_{kq} - \epsilon_{qk}], \tag{19} \\
\frac{\partial^3 \mathfrak{J}_{26}}{\partial (\epsilon_p^q)} &= \frac{1}{8} [\kappa_{s\cdot}^k + \kappa_{\cdot s}^k] [\delta_k^p \delta_q^l - g_{kq} g^{pl}] [\kappa_{l\cdot}^s - \kappa_{\cdot l}^s] = \\
&= \frac{1}{8} [\kappa_{s\cdot}^p + \kappa_{\cdot s}^p] [\kappa_{q\cdot}^s - \kappa_{\cdot q}^s] - [\kappa_{sq} + \kappa_{qs}] [\kappa^{ps} - \kappa^{sp}], \\
\frac{\partial^3 \mathfrak{J}_{26}}{\partial (\kappa_p^q)} &= \frac{1}{8} [\delta_s^p \delta_q^k + g_{sq} g^{pk}] [\epsilon_{k\cdot}^l - \epsilon_{\cdot k}^l] [\kappa_{l\cdot}^s - \kappa_{\cdot l}^s] + \\
&+ \frac{1}{8} [\kappa_{s\cdot}^k + \kappa_{\cdot s}^k] [\epsilon_{k\cdot}^l - \epsilon_{\cdot k}^l] [\delta_l^p \delta_q^s - g_{lq} g^{ps}] = \\
&= \frac{1}{8} [\epsilon_{q\cdot}^l - \epsilon_{\cdot q}^l] [\kappa_{l\cdot}^p - \kappa_{\cdot l}^p] + [\epsilon_{lq} - \epsilon_{ql}] [\kappa^{pl} - \kappa^{lp}] + \\
&+ [\kappa_{q\cdot}^k + \kappa_{\cdot q}^k] [\epsilon_{k\cdot}^p - \epsilon_{\cdot k}^p] - [\kappa^{pk} + \kappa^{kp}] [\epsilon_{kq} - \epsilon_{qk}], \\
\frac{\partial^3 \mathfrak{J}_{27}}{\partial (\epsilon_p^q)} &= \frac{1}{8} [\delta_s^p \delta_q^k - g_{sq} g^{pk}] [\kappa_{k\cdot}^s - \kappa_{\cdot k}^s] [\epsilon_{l\cdot}^l + \epsilon_{\cdot m}^m] + \frac{1}{4} [\epsilon_{s\cdot}^k - \epsilon_{\cdot s}^k] [\kappa_{k\cdot}^s - \kappa_{\cdot k}^s] \delta_q^p = \\
&= \frac{1}{4} [\kappa_{q\cdot}^p - \kappa_{\cdot q}^p] [\epsilon_{l\cdot}^l + \epsilon_{\cdot m}^m] + \frac{1}{4} [\epsilon_{s\cdot}^k - \epsilon_{\cdot s}^k] [\kappa_{k\cdot}^s - \kappa_{\cdot k}^s] \delta_q^p, \\
\frac{\partial^3 \mathfrak{J}_{27}}{\partial (\kappa_p^q)} &= \frac{1}{8} [\epsilon_{s\cdot}^k - \epsilon_{\cdot s}^k] [\delta_k^p \delta_q^s - g_{kq} g^{ps}] [\epsilon_{l\cdot}^l + \epsilon_{\cdot m}^m] = \frac{1}{4} [\kappa_{q\cdot}^p - \kappa_{\cdot q}^p] [\epsilon_{l\cdot}^l + \epsilon_{\cdot m}^m],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^3 \mathfrak{J}}{\partial (\epsilon_{p^{\cdot}}^q)} &= \frac{1}{8} [\kappa_{s^{\cdot}}^k - \kappa_{s^{\cdot}}^k] [\delta_k^p \delta_q^s - g_{kq} g^{ps}] [\kappa_{l^{\cdot}}^l + \kappa_{m^{\cdot}}^m] = \frac{1}{4} [\kappa_{q^{\cdot}}^p - \kappa_{q^{\cdot}}^p] [\kappa_{l^{\cdot}}^l + \kappa_{m^{\cdot}}^m], \\
\frac{\partial^3 \mathfrak{J}}{\partial (\kappa_{p^{\cdot}}^q)} &= \frac{1}{8} [\delta_s^p \delta_q^k - g_{sq} g^{pk}] [\epsilon_{k^{\cdot}}^s - \epsilon_{k^{\cdot}}^s] [\kappa_{l^{\cdot}}^l + \kappa_{m^{\cdot}}^m] + \frac{1}{4} [\epsilon_{s^{\cdot}}^k - \epsilon_{s^{\cdot}}^k] [\kappa_{k^{\cdot}}^s - \kappa_{k^{\cdot}}^s] \delta_q^p = \\
&= \frac{1}{4} \left[[\epsilon_{q^{\cdot}}^p - \epsilon_{q^{\cdot}}^p] [\kappa_{l^{\cdot}}^l + \kappa_{m^{\cdot}}^m] + [\epsilon_{s^{\cdot}}^k - \epsilon_{s^{\cdot}}^k] [\kappa_{k^{\cdot}}^s - \kappa_{k^{\cdot}}^s] \delta_q^p \right].
\end{aligned} \tag{20}$$

4. Выводы. Настоящее исследование посвящено вопросам применения теории инвариантов построения кубических аппроксимаций энергетических форм для потенциалов силовых и моментных напряжений гемитропных микрополярных упругих тел. Для построения таких потенциалов наиболее подходит метод А-представлений, позволяющий без труда получить аппроксимацию необходимой степени точности потенциала напряжений в виде полиномиальной линейной комбинации рациональных инвариантов относительно гемитропной группы отображений трехмерного пространства.

- (1) Указан полный неприводимый набор из 86 индивидуальных и совместных целых рациональных алгебраических инвариантов для системы двух симметричных и двух антисимметричных тензоров второго ранга. Список инвариантов приводится в форме, не включающей метрического тензора [1].
- (2) Полученный набор инвариантов использован для построения кубической энергетической формы гемитропного микрополярного тела и формирования полного набора из 37 определяющих постоянных.
- (3) Получены вспомогательные формулы (производные от инвариантов), необходимые для вывода определяющих уравнений для силовых и моментных напряжений, включающие квадратичные поправки, справедливые в произвольной криволинейной системе координат.

ДОПОЛНИТЕЛЬНО

Вклад авторов. Все авторы подтверждают соответствие своего авторства международным критериям ICMJE (все авторы внесли существенный вклад в разработку концепции, проведение исследования и подготовку статьи, прочли и одобрили финальную версию перед публикацией).

Конфликт интересов. Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

Источник финансирования. Работа выполнена по теме государственного задания (№ госрегистрации 124012500437-9).

ADDITIONAL INFORMATION

Authors' contribution. All authors confirm that their authorship meets the international ICMJE criteria (all authors have made a significant contribution to the development of the concept, research and preparation of the article, read and approved the final version before publication).

Competing interests. The authors declare that they have no competing interests.

Funding. This study was in part financially supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (State Registration Number 124012500437-9).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Гуревич Г. Б. Основы теории алгебраических инвариантов. М., Л. : ГИТТЛ, 1948. 408 с. [Gurevich G. B. Foundations of the theory of algebraic invariants. Gröningen, P. Noordhoff, 1964. 429 p.].
- [2] Спенсер Э. Теория инвариантов. Мир, 1974.
- [3] Жилин П. А. Рациональная механика сплошных сред. Санкт-Петербург: Изд-во политехн. ун-та, 2012.
- [4] Сушкевич А. К. Основы высшей алгебры. Онти. Глав. ред. техн.-теоретич. лит-ры, 1937.
- [5] Spencer AJM, Rivlin RS. Isotropic integrity bases for vectors and second-order tensors: part I // Archive for rational mechanics and analysis. 1962. Vol. 9. P. 45–63.
- [6] Spencer AJM. Isotropic integrity bases for vectors and second-order tensors: part II // Archive for rational mechanics and analysis. 1965. Vol. 18, no. 1. P. 51–82.
- [7] Cosserat Eugène Maurice Pierre, Cosserat François. Théorie des corps déformables. Paris : A. Hermann et fils, 1909. VI+226 p.
- [8] G unther W. Zur Statik und Kinematik des Cosseratschen Kontinuums // Abh. Braunschweig. Wiss. Ges. 1958. Vol. 10. P. 195–213.
- [9] Kessel Siegfried. Lineare Elastizitätstheorie des anisotropen Cosserat-kontinuums // Abhandlungen der Braunschweig. Wiss. Ges. 1964. Vol. 16. P. 1–22.
- [10] Neuber H. Über Probleme der Spannungskonzentration im Cosserat-Körper // Acta Mechanica. 1966. Vol. 2. P. 48–69. DOI: 10.1007/BF01176729.
- [11] Neuber H. On the general solution of linear-elastic problems in isotropic and anisotropic Cosserat continua // Applied Mechanics: Proceedings of the Eleventh International Congress of Applied Mechanics Munich (Germany) 1964 / Springer. 1966. P. 153–158. DOI: 10.1007/978-3-662-29364-5_16.
- [12] Neuber H. On the Effect of Stress Concentration in Cosserat Continua // Mechanics of Generalized Continua / Ed. by Ekkehart Kröner. Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 1968. P. 109–113.
- [13] Nowacki W. Theory of micropolar elasticity. Berlin: Springer. Berlin : Springer Science & Business Media, 1972.
- [14] Besdo D. A contribution to the nonlinear theory of the Cosserat-continuum // Acta Mechanica. 1974. Vol. 20. P. 105–131.
- [15] Nowacki W. Theory of Asymmetric Elasticity. Oxford, New York, Toronto, Sydney, Paris, Frankfurt : Pergamon Press, 1986. viii+383 p.
- [16] Dyszlewicz J. Micropolar Theory of Elasticity. Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics. Berlin : Springer Science & Business Media, 1986. xv+345 p.
- [17] Радаев Ю. Н. Правило множителей в ковариантных формулировках микрополярных теорий механики континуума // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2018. Т. 22. С. 504–517. DOI: 10.14498/vsgtu1635.
- [18] Радаев Ю.Н., Мурашкин Е.В. Псевдотензорная формулировка механики гемитропных микрополярных сред // Проблемы прочности и пластичности. 2020. Vol. 82, no. 4. P. 399–412. DOI: 10.32326/1814-9146-2020-82-4-399-412.
- [19] Murashkin E. V., Radaev Y. N. Heat Conduction of Micropolar Solids Sensitive to Mirror Reflections of Three-Dimensional Space // Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki. 2023. Vol. 165, no. 4. P. 389–403. DOI: 10.26907/2541-7746.2023.4.389-403.
- [20] Murashkin E. V., Radaev Y. N. Heat transfer in anisotropic micropolar solids // Mechanics of Solids. 2023. Vol. 58, no. 9. P. 3111–3119. DOI: 10.3103/S0025654423700255.
- [21] Murashkin E. V., Radaev Y. N. On algebraic triple weights formulation of micropolar thermoelasticity // Mechanics of Solids. 2024. Vol. 59, no. 1. P. 555–580. DOI: 10.1134/s0025654424700274.

- [22] Murashkin E. V., Radaev Y. N. Coupled Thermoelasticity of Hemitropic Media. Pseudotensor Formulation // *Mechanics of Solids*. 2023. Vol. 58, no. 3. P. 802–813. DOI: 10.3103/s0025654423700127.
- [23] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. К поливариантности основных уравнений связанной термоупругости микрополярного тела // *Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния*. 2023. № 3(57). С. 112–128. DOI: 10.37972/chgpu.2023.57.3.010.
- [24] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Мультивесовая термомеханика гемитропных микрополярных тел // *Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния*. 2023. № 4(58). С. 86–120. DOI: 10.37972/chgpu.2023.58.4.010.
- [25] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Приведение естественных форм гемитропных энергетических потенциалов к конвенциональным // *Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния*. 2022. № 4(54). С. 108–115. DOI: 10.37972/chgpu.2022.54.4.009.
- [26] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. О двух основных естественных формах потенциала асимметричных тензоров силовых и моментных напряжений в механике гемитропных тел // *Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния*. 2022. № 3(53). С. 86–100. DOI: 10.37972/chgpu.2022.53.3.010.
- [27] Мурашкин Е. В. О связи микрополярных определяющих параметров термодинамических потенциалов состояния // *Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния*. 2023. № 1(55). С. 110–121. DOI: 10.37972/chgpu.2023.55.1.012.
- [28] Murashkin E. V., Radayev Y. N. A negative weight pseudotensor formulation of coupled hemitropic thermoelasticity // *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2023. Vol. 44, no. 6. P. 2440–2449. DOI: 10.1134/s1995080223060392.
- [29] Murashkin E. V., Radayev Y. N. Theory of Poisson's ratio for a thermoelastic micropolar acentric isotropic solid // *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2024. Vol. 45, no. 5. P. 2378–2390. DOI: 10.1134/s1995080224602480.
- [30] Krylova E. Yu, Murashkin E. V., Radaev Y. N. The Nye cells and figures for athermic hemitropic, isotropic, and ultraisotropic micropolar elastic solids // *Mechanics of Solids*. 2024. Vol. 59, no. 3. P. 1311–1320. DOI: 10.1134/s0025654424603719.

REFERENCES

- [1] Gurevich G. B. *Fundamentals of the Theory of Algebraic Invariants*. Moscow : GITTL, 1948. 408 p.
- [2] Spencer E. *Invariant theory*. Moscow : Mir, 1974.
- [3] Zhilin P. A. *Rational mechanics of continuous media*. Saint Petersburg : Izd-vo politekhn. un-ta, 2012.
- [4] Sushkevich A.K. *Fundamentals of Higher Algebra*. Moscow : Onti. Glav. red. tekhn.-teoretich. lit-ry, 1937.
- [5] Spencer AJM, Rivlin RS. Isotropic integrity bases for vectors and second-order tensors: part I // *Archive for rational mechanics and analysis*. 1962. Vol. 9. P. 45–63.
- [6] Spencer AJM. Isotropic integrity bases for vectors and second-order tensors: part II // *Archive for rational mechanics and analysis*. 1965. Vol. 18, no. 1. P. 51–82.
- [7] Cosserat Eugène Maurice Pierre, Cosserat François. *Théorie des corps déformables*. Paris : A. Hermann et fils, 1909. VI+226 p.
- [8] Günther W. *Zur Statik und Kinematik des Cosseratschen Kontinuums* // *Abh. Braunschweig. Wiss. Ges.* 1958. Vol. 10. P. 195–213.

- [9] Kessel Siegfried. Lineare Elastizitätstheorie des anisotropen Cosserat-kontinuums // Abhandlungen der Braunschweig. Wiss. Ges. 1964. Vol. 16. P. 1–22.
- [10] Neuber H. Über Probleme der Spannungskonzentration im Cosserat-Körper // Acta Mechanica. 1966. Vol. 2. P. 48–69. DOI: 10.1007/BF01176729.
- [11] Neuber H. On the general solution of linear-elastic problems in isotropic and anisotropic Cosserat continua // Applied Mechanics: Proceedings of the Eleventh International Congress of Applied Mechanics Munich (Germany) 1964 / Springer. 1966. P. 153–158. DOI: 10.1007/978-3-662-29364-5_16.
- [12] Neuber H. On the Effect of Stress Concentration in Cosserat Continua // Mechanics of Generalized Continua / Ed. by Ekkehart Kröner. Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 1968. P. 109–113.
- [13] Nowacki W. Theory of micropolar elasticity. Berlin: Springer. Berlin : Springer Science & Business Media, 1972.
- [14] Besdo D. A contribution to the nonlinear theory of the Cosserat-continuum // Acta Mechanica. 1974. Vol. 20. P. 105–131.
- [15] Nowacki W. Theory of Asymmetric Elasticity. Oxford, New York, Toronto, Sydney, Paris, Frankfurt : Pergamon Press, 1986. viii+383 p.
- [16] Dyszlewicz J. Micropolar Theory of Elasticity. Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics. Berlin : Springer Science & Business Media, 1986. xv+345 p.
- [17] Radaev Y. N. The multiplier rule in covariant formulations of micropolar theories of continuum mechanics // Vestn. Sam. gos. tekhn. un-ta. Ser. Fiz.-mat. nauki. 2018. Vol. 22. P. 504–517. DOI: 10.14498/vsgtu1635.
- [18] Radaev Y. N., Murashkin E. V. Pseudotensor formulation of the mechanics of hemitropic micropolar media // Problems of strength and ductility. 2020. Vol. 82, no. 4. P. 399–412. DOI: 10.32326/1814-9146-2020-82-4-399-412.
- [19] Murashkin E. V., Radaev Y. N. Heat Conduction of Micropolar Solids Sensitive to Mirror Reflections of Three-Dimensional Space // Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki. 2023. Vol. 165, no. 4. P. 389–403. DOI: 10.26907/2541-7746.2023.4.389-403.
- [20] Murashkin E. V., Radaev Y. N. Coupled Thermoelasticity of Hemitropic Media. Pseudotensor Formulation // Mechanics of Solids. 2023. Vol. 58, no. 9. P. 802–813. DOI: 10.3103/s0025654423700127.
- [21] Murashkin E. V., Radaev Y. N. On algebraic triple weights formulation of micropolar thermoelasticity // Mechanics of Solids. 2024. Vol. 59, no. 1. P. 555–580. DOI: 10.1134/s0025654424700274.
- [22] Murashkin E. V., Radaev Y. N. Coupled Thermoelasticity of Hemitropic Media. Pseudotensor Formulation // Mechanics of Solids. 2023. Vol. 58, no. 3. P. 802–813. DOI: 10.3103/s0025654423700127.
- [23] Murashkin E. V., Radaev Yu. N. On the polyvariance of the basic equations of coupled thermoelasticity of a micropolar solid // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. IYa Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya. 2023. no. 3(57). P. 112–128. DOI: 10.37972/chgpu.2023.57.3.010.
- [24] Murashkin E. V., Radaev Yu. N. Multiweight thermomechanics of hemitropic micropolar solids // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. IYa Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya. 2023. no. 4(58). P. 86–120. DOI: 10.37972/chgpu.2023.58.4.010.
- [25] Murashkin E. V., Radaev Yu. N. Reducing natural forms of hemitropic energy potentials to conventional ones // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. IYa Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya. 2022. № 4(54). C. 108–115. DOI: 10.37972/chgpu.2022.54.4.009.

- [26] Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On two main natural forms of the potential of asymmetric tensors of force and couple stresses in the mechanics of hemitropic solids // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. IYa Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya. 2022. № 3(53). С. 86–100. DOI: 10.37972/chgpu.2022.53.3.010.
- [27] Murashkin E. V. On the relationship between micropolar constitutive parameters of thermodynamic potentials // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. IYa Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya. 2023. № 1(55). С. 110–121. DOI: 10.37972/chgpu.2023.55.1.012.
- [28] Murashkin E. V., Radayev Y. N. A negative weight pseudotensor formulation of coupled hemitropic thermoelasticity // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2023. Vol. 44, no. 6. P. 2440–2449. DOI: 10.1134/s1995080223060392.
- [29] Murashkin E. V., Radayev Y. N. Theory of Poisson's ratio for a thermoelastic micropolar acentric isotropic solid // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2024. Vol. 45, no. 5. P. 2378–2390. DOI: 10.1134/s1995080224602480.
- [30] Krylova E. Yu, Murashkin E. V., Radaev Y. N. The Nye cells and figures for athermic hemitropic, isotropic, and ultraisotropic micropolar elastic solids // Mechanics of Solids. 2024. Vol. 59, no. 3. P. 1311–1320. DOI: 10.1134/s0025654424603719.