

А. Н. Спорыхин, Ю. Д. Щеглова

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ДЕФОРМИРОВАНИЯ И ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ КРУГОВОЙ ПЛАСТИНЫ ПРИ СЖАТИИ

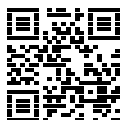
Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия

Аннотация. В работе на основе реологической модели упруговязкопластической смеси в линейаризированной трехмерной постановке исследуется устойчивость круговой пластины при всестороннем сжатии. Приведены уравнения для определения критического значения нагрузки для толстостенной и тонкостенной конструкции пластины.

Ключевые слова: смесь, напряжения, перемещения, деформации, упругость, пластичность, вязкость, упрочнение, устойчивость.

Спорыхин Анатолий Николаевич, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры механики и компьютерного моделирования; e-mail: anatoli.sporyhin@yandex.ru

Щеглова Юлия Дмитриевна, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры механики и компьютерного моделирования; e-mail: scheglova@gmail.com



для цитирования: Спорыхин А. Н., Щеглова Ю. Д. Исследование процессов деформирования и потери устойчивости круговой пластины при сжатии // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2025. № 3(65). С. 194–202. DOI: 10.37972/chgpu.2025.65.3.010. EDN: NEKUTA

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0).

A. N. Sporykhin, Yu. D. Shcheglova

STUDY OF DEFORMATION PROCESSES AND LOSS OF STABILITY OF A CIRCULAR PLATE UNDER COMPRESSION

I. Voronezh State University, Voronezh, Russia

Abstract. In this paper, the stability of a circular plate under uniform compression is investigated based on a rheological model of an elastic-viscoplastic mixture in a linearized three-dimensional formulation. Equations are given for determining the critical load value for thick-walled and thin-walled plate structures.

Keywords: mixture, stress, displacement, deformation, elasticity, plasticity, viscosity, strengthening, stability.

Anatoliy N. Sporykhin, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor; **e-mail:** anatoli.sporyhin@yandex.ru

Yulia D. Shcheglova, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor; **e-mail:** scheglova@gmail.com



to cite this article: Sporykhin A. N., Shcheglova Yu. D. Study of deformation processes and loss of stability of a circular plate under compression // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2025. No 3(65). p. 194–202. DOI: 10.37972/chgpu.2025.65.3.010

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение. Известно, что многие создаваемые материалы, к которым можно отнести полимеры, битумы и многое другое являются продуктами, состоящими из n компонент (сред), в результате чего они представляются моделями сплошной среды со сложными реологическими свойствами, что и определяет актуальность исследования и применения обобщенных моделей упруговязко-пластических (EVP) сред.

Здесь отметим [1], что модель S_p^α представляет собой последовательное соединение α ($\alpha = 1, 2, \dots, L$) моделей тела $S_p^1 = H - Stv - K$, состоящего из последовательно соединенных тел: Гука – H , Сен-Венана – Stv , Кельвина – K . При этом у каждой S_p^α модели собственные константы, а число α определяет порядок обобщенной модели.

1. Докритическое напряженно-деформированное состояние круговой пластины при сжатии. В рамках обобщенной модели EVP тела [1] исследуется напряженно-деформированное состояние и устойчивость круговой пластины при всестороннем сжатии усилиями интенсивности q . Толщина пластины $2h$ и радиус R .

Следуя [1, 2], запишем соотношения, которые полностью определяют свойства обобщенной модели S_p^α .

Тело остается упругим при условии

$$S_{ij}S^{ij} < k_1^2, \quad S_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{kk}\delta_{ij}, \quad k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_L, \quad (1)$$

где S_{ij} – компоненты девиатора тензора напряжений. При этом для последовательно соединенных моделей выполняется закон Гука

$$\sigma_{ij}^\alpha = \lambda_\alpha \varepsilon_{nn}^{e\alpha} \delta_{ij} + 2\mu_\alpha \varepsilon_{ij}^{e\alpha}, \quad \sum \alpha = 1, 2, \dots, L, \quad (2)$$

где λ_α , μ_α – параметры Ламе.

При достижении условия $S_{ij}S^{ij} \geq k_1^2$ полная деформация складывается из упругой и пластической составляющих

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^1 + \varepsilon_{ij}^2 + \dots + \varepsilon_{ij}^L = \varepsilon_{ij}^{e1} + \varepsilon_{ij}^{p1} + \varepsilon_{ij}^{e2} + \varepsilon_{ij}^{p2} + \dots + \varepsilon_{ij}^{eL} + \varepsilon_{ij}^{pL}. \quad (3)$$

Из (3) видно, что полная деформация смеси представляет собой сумму деформаций отдельных ее компонент $\varepsilon_{ij}^1, \varepsilon_{ij}^2, \dots, \varepsilon_{ij}^L$, так как модели S_p^α соединены последовательно.

В пластической области смесь является несжимаемой, что ведет к выполнению условия

$$\varepsilon_{nn}^{p\alpha} = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots, L). \quad (4)$$

Тогда можно сделать вывод, что компоненты тензора девиатора тензора деформаций $\varepsilon_{ij}^{p\alpha}$ совпадают с компонентами тензора деформаций $\varepsilon_{ij}^{p\alpha}$.

Также из последовательного соединения моделей следует равенство напряжений, приложенных к каждой из моделей

$$S_{ij}^1 = S_{ij}^2 = \dots = S_{ij}^L = S_{ij} \quad (\sigma_{ij}^1 = \sigma_{ij}^2 = \dots = \sigma_{ij}^L). \quad (5)$$

В пластической области для любой компоненты смеси выполняется условие пластичности

$$(S_{ij} - c_\alpha \varepsilon_{ij}^{p\alpha} - \eta_\alpha \dot{\varepsilon}_{ij}^{p\alpha}) (S_{ij} - c_\alpha \varepsilon_{ij}^{p\alpha} - \eta_\alpha \dot{\varepsilon}_{ij}^{p\alpha}) = k_\alpha^2 \quad \sum \alpha = 1, 2, \dots, L, \quad (6)$$

где c_α – коэффициент упрочнения, η_α – коэффициент вязкости, k_α – предел текучести для каждой из моделей S_p^α .

Ассоциированный закон пластического течения, связывающий компоненты тензора скоростей пластических деформаций $\dot{\varepsilon}_{ij}^{p\alpha}$ с компонентами тензора напряжений, имеет вид

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{p\alpha} = \psi_\alpha (S_{ij} - c_\alpha \varepsilon_{ij}^{p\alpha} - \eta_\alpha \dot{\varepsilon}_{ij}^{p\alpha}) \quad \sum \alpha = 1, 2, \dots, L, \quad (7)$$

где ψ_α – скалярный положительный множитель для модели S_p^α .

Соотношения Коши связывают полные компоненты тензора малых деформаций с компонентами вектора перемещений

$$2\varepsilon_{ij} = \nabla_i u_j + \nabla_j u_i, \quad (8)$$

где символ обозначает ∇_j ковариантную производную по j -ой компоненте.

Уравнения равновесия

$$\nabla_i \sigma_j^i = 0 \quad (9)$$

замыкают систему уравнений (1)-(8), которые используются для определения напряженно-деформированного состояния EVP смеси произвольного порядка.

Задача решается в цилиндрической системе координат (r, θ, x_3) . С учетом осевой симметрии из определяющих уравнений рассматриваемой задачи (1)-(9) напряженно-деформированное докритическое состояние определяется в виде

$$\begin{aligned} \overset{o}{\sigma}_{rr} = \overset{o}{\sigma}_{\theta\theta} = -q, \quad \overset{o}{\sigma}_{33} = 0, \quad \overset{o}{\sigma}_{ij} = 0, \quad i \neq j, \\ \overset{o}{\varepsilon}_{rr} = \sum_{\alpha=1}^L \frac{1}{2\mu_\alpha} \overset{o}{S}_r + \sum_{\alpha=1}^L \overset{o}{\varepsilon}_r^{p\alpha} = \overset{o}{\varepsilon}_{\theta\theta} = -\frac{1}{2} \overset{o}{\varepsilon}_{33}, \\ \overset{o}{\varepsilon}_r^{p\alpha} = \frac{K_\alpha - \frac{q}{3}}{c_\alpha} \left(e^{-\frac{c_\alpha}{\eta_\alpha} t} - 1 \right) = \overset{o}{\varepsilon}_\theta^{p\alpha} = \frac{1}{2} \overset{o}{\varepsilon}_{33}^{p\alpha}, \quad \sum \alpha = 1, 2, \dots, L, \\ \overset{o}{S}_r = \overset{o}{S}_\theta = -\frac{q}{3}, \quad \overset{o}{S}_{33} = \frac{2}{3}q, \quad K_\alpha = \frac{k_\alpha}{\sqrt{6}}. \end{aligned} \quad (10)$$

2. Исследование устойчивости круговой пластины при сжатии. Согласно [3] исследование устойчивости основного состояния сплошной среды (смеси) объема V , на части поверхности Σ_p которого заданы поверхностные усилия P , сводится к решению линеаризованных уравнений движения в вариациях

$$\left(\sigma_{ij} + \overset{o}{\sigma}_{jk} u_{i,k} \right)_{,j} + \rho \omega^2 u_i = 0. \quad (11)$$

Здесь связь между амплитудными величинами напряжений и деформаций, которая следует из линеаризованных уравнений (2)-(7), имеет вид [1, 3]

$$\sum_{\alpha=1}^L \frac{1}{2\mu_\alpha} \sigma_{ij} = \varepsilon_{ij} + \sum_{\alpha=1}^L \frac{\overset{o}{b}_\alpha}{1 - 3\overset{o}{b}_\alpha} \varepsilon_{nn} \delta_{ij} + \sum_{\alpha=1}^L \frac{\overset{o}{a}_\alpha}{1 - \overset{o}{a}_\alpha k_\alpha^2} \varepsilon_{kl} \overset{o}{f}_{kl}^\alpha \overset{o}{f}_{ij}^\alpha, \quad (12)$$

$$\overset{o}{f}_{kl}^\alpha = \overset{o}{S}_{kl} - c_\alpha \varepsilon_{kl}^\alpha,$$

где обозначено

$$\overset{o}{a}_\alpha = \frac{\hat{a}_\alpha}{k_\alpha^2 \hat{a}_\alpha - 2\mu_\alpha}, \quad \overset{o}{b}_\alpha = \frac{\lambda_\alpha}{3\lambda_\alpha + 2\mu_\alpha}, \quad (13)$$

$$\hat{a}_\alpha = \frac{4\mu_\alpha^2}{k_\alpha^2 (2\mu_\alpha + c_\alpha + s\eta_\alpha)}, \quad \sum \alpha = 1, 2, \dots, L.$$

Амплитудные величины деформаций и перемещений по-прежнему связаны соотношениями вида

$$2\varepsilon_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i}, \quad (14)$$

Граничные условия на поверхности Σ_p принимают форму

$$\left(\sigma_{ij} + \overset{o}{\sigma}_{jk} u_{i,k} \right) n_j = P_i, \quad (15)$$

здесь n_j – компоненты вектора нормали на поверхности тела Σ_p .

Соотношения (12)–(15), представленные в декартовой системе координат, записаны для амплитудных величин с сохранением прежних обозначений, а также с учетом выделенного временного множителя e^{st} , где $s = i\omega$ – комплексная величина.

Линеаризованные уравнения движения (11) в случае докритического состояния, представленного соотношениями (10), имеют вид

$$[\sigma_{ij} - q(\delta_{j1} u_{i,1} + \delta_{j2} u_{i,2})]_{,j} - \rho s^2 u_i = 0. \quad (16)$$

Граничные условия (15) будут иметь форму

$$[\sigma_{ij} - q(\delta_{j1} u_{i,1} + \delta_{j2} u_{i,2})] n_j = P_i. \quad (17)$$

Для сжимаемой обобщенной EVP среды в случае однородного напряженного докритического состояния, определенного соотношениями (10) ($t \rightarrow \infty$), линеаризованная связь (12) между амплитудными величинами напряжений и деформаций в рамках трехмерной теории устойчивости представляется в виде

$$\sigma_{ij} = \delta_{ij} a_{jk} u_{k,k} + (1 - \delta_{ij}) G_{ij} (u_{i,j} + u_{j,i}), \quad \sum_1^3 k, \quad (18)$$

где

$$a_{jk} = (\delta_{jk} + B_{jj} + A_{jj}) \mu_*^{-1}, \quad G_{ij} = \frac{1}{2} \mu_*^{-1} = G, \quad \mu_* = \sum_{\alpha=1}^L \frac{1}{2\mu_\alpha}, \quad (19)$$

$$A_{ij} = \sum_{\alpha=1}^L \frac{\overset{o}{b}_\alpha}{1 - 3\overset{o}{b}_\alpha} \delta_{ij}, \quad B_{ij} = \sum_{\alpha=1}^L \frac{\overset{o}{a}_\alpha}{1 - \overset{o}{a}_\alpha k_\alpha^2} \overset{o}{f}_{kk}^\alpha \overset{o}{f}_{ij}^\alpha, \quad \sum k.$$

Здесь коэффициенты a_{ij} и G_{ij} комплексные величины, так как зависят от характеристического показателя $s = i\omega$ и, очевидно, соотношения (18) можно трактовать как уравнения состояния EVP смеси, но с комплексными физико-механическими параметрами.

Также отметим, что при $c_\alpha = 0$ получаем коэффициенты a_{ij} и G_{ij} для сжимаемой вязкопластической смеси обобщенной модели тела Бингама [4], а при $\eta_\alpha = 0$ для обобщенной модели Ишлинского-Ивлева [5], а при $\hat{a}_\alpha = 0$, $\hat{a}_\alpha^0 = 0$ для сжимаемой упругой смеси обобщенного закона Гука.

Возможен переход и к другим обобщенным моделям тел. Представление линейаризированных уравнений состояния в виде (18) имеет единую форму для различных обобщенных моделей сред, что позволяет определить решение уравнений трехмерной теории устойчивости (16) в общем виде. Решения для указанных выше моделей тел приведены в работах [3, 6, 7].

В случае квазистатической постановки задачи, которой далее и ограничимся, общее решение уравнений трехмерной теории устойчивости (16) с учетом (18), (19) имеет вид [3]

$$u_n = \frac{\partial}{\partial \tau} \psi_1 - \frac{\partial^2}{\partial n \partial x_3} \psi,$$

$$u_\tau = -\frac{\partial}{\partial n} \psi_1 - \frac{\partial^2}{\partial \tau \partial x_3} \psi,$$

$$u_3 = \frac{a_{11} - q}{G + a_{31}} \left(\Delta + \frac{G}{a_{11} - q} \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) \psi,$$

где

$$\frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial r}, \quad \frac{\partial}{\partial \tau} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}.$$

Функции ψ_i определяются из уравнений

$$\left(\Delta + \xi_i^2 \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) \psi_i = 0, \quad \psi = \psi_2 + \psi_3, \quad \sum i,$$

а корни ξ_i^2 согласно [4] имеют вид

$$\xi_1^2 = \frac{G}{G - q}, \quad \xi_{2,3}^2 = F \pm \left(F^2 - \frac{a_{33}G}{(a_{11} - q)(G - q)} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

В предположении об отсутствии нагрузки на поверхностях пластины, соответствующих значениям переменной $x_3 = \pm h$, из (17) получаем граничные условия

$$\sigma_{33} \Big|_{x_3=\pm h} = 0, \quad \sigma_{r3} \Big|_{x_3=\pm h} = 0, \quad \sigma_{\theta 3} \Big|_{x_3=\pm h} = 0. \quad (20)$$

Решение основных уравнений, следуя требованию четности компоненты перемещений u_3 по переменной x_3 , выберем в форме

$$\begin{aligned}\psi_1 &= \sum_{n,\delta=0}^{\infty} C_{\delta n}^1 I_n(\delta r) \operatorname{sh} \frac{\delta}{\xi_1} x_3 \sin n\theta, \\ \psi_2 &= \sum_{n,\delta=0}^{\infty} C_{\delta n}^2 I_n(\delta r) \operatorname{sh} \frac{\delta}{\xi_2} x_3 \cos n\theta, \\ \psi_3 &= \sum_{n,\delta=0}^{\infty} C_{\delta n}^3 I_n(\delta r) \operatorname{sh} \frac{\delta}{\xi_3} x_3 \cos n\theta.\end{aligned}\tag{21}$$

Здесь $I_n(\delta r)$ – функция Бесселя первого рода. Выбор решения в виде (21) позволяет удовлетворить различным граничным условиям в интегральном смысле при $r = R$ вследствие произвольности величин δ . Можно убедиться, что одним из таких вариантов являются граничные условия жесткой заделки. В данном случае в функциях (21) надо положить

$$I'_n(\delta R) = 0, \quad \delta = \frac{\chi_\delta}{R}, \quad I'_n(\chi_\delta) = 0.\tag{22}$$

Тогда подстановкой (21) в граничные условия (20), учитывая при этом (22), следуя обычному алгоритму решения, получим уравнение в форме

$$\det \|d_{ij}\| = 0$$

где $i, j = 1, 2$, при этом элементы детерминанта определяются соотношениями

$$\begin{aligned}d_{11}(\xi_2) &= \xi_2^{-1} \left(a_{33} \frac{a_{11} - q}{G + a_{13}} \left(\frac{G}{a_{11} - q} - \xi_2^2 \right) + a_{13} \xi_2^2 \right) \operatorname{sh} \frac{\delta h}{\xi_2}, \\ d_{12} &= d_{11}(\xi_3), \\ d_{22}(\xi_3) &= \xi_3^{-1} \left(a_{33} \frac{a_{11} - q}{G + a_{13}} \left(\frac{G}{a_{11} - q} - \xi_3^2 \right) - 1 \right) \operatorname{ch} \frac{\delta h}{\xi_3}, \\ d_{21} &= d_{22}(\xi_2).\end{aligned}\tag{23}$$

В случае тонкостенной пластины будем иметь следующее выражение для нагрузки

$$q = \frac{1}{3} \frac{a_{11}a_{33} - a_{13}^2}{a_{33}} (\delta h)^2 \left[1 - (\delta h)^2 \frac{6(a_{11}a_{33} - a_{13}^2) + G(5a_{33} - 2a_{13})}{15a_{33}G} \right].\tag{24}$$

Условие для определения критического значения нагрузки представляется уравнением

$$\max\{\operatorname{Re} s_k\} = 0.\tag{25}$$

При этом если порядок α обобщенной модели тела S_p^α равен единице в (19) и (23)-(25), то приходим к результатам работы [1], соответствующим классической модели EVP тела S_p^1 .

В заключении отметим, что статический подход к статическим задачам трехмерной теории устойчивости с использованием как обобщенных, так и классических вариантов теории течения допустим лишь в тех случаях, когда в уравнениях состояния не учитываются вязкие свойства среды. Так, в частности, для обобщенной модели Ишлинского-Ивлева, в том числе и классической, допустим статический подход, так как параметр $s = i\omega$ не входит в коэффициенты a_{ij} и G_{ij} уравнения состояния (18), и в этом случае, очевидно, уравнения (23) и, соответственно, уравнение (24) следует рассматривать как уравнения для определения $q_{кр}$.

ДОПОЛНИТЕЛЬНО

Вклад авторов. А. Н. Спорыхин построение модели многокомпонентной упруговязкопластической смеси, постановка задачи устойчивости, написание текста рукописи, согласование финальной версии рукописи, Ю. Д. Щеглова решение задачи устойчивости, обзор литературы по теме статьи, компьютерный набор текста рукописи, редактирование текста рукописи.

Конфликт интересов. Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

Источник финансирования. Авторы заявляют об отсутствии внешнего финансирования при проведении исследования.

ADDITIONAL INFORMATION

Authors' contribution. A. N. Sporykhin construction of a model of a multicomponent elastic-viscoplastic mixture, formulation of the stability problem, writing the text of the manuscript, approval of the final version of the manuscript, Yu. D. Shcheglova solution of the stability problem, review of literature on the topic of the article, computer typesetting of the manuscript, editing of the text of the manuscript.

Competing interests. The authors declare that they have no competing interests.

Funding. This study was not supported by any external sources of funding.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Спорыхин А. Н. Моделирование процессов деформирования и потери устойчивости упруговязкопластических смеси // Изв. РАН. МТТ. 2020. №6. С. 141-146. EDN: JBOAQP. DOI: 10.31857/S0572329920060148.
- [2] Ивлев Д. Д., Быковцев Г. И. Теория упрочняющегося пластического тела. М.: Наука, 1971. 231 с.
- [3] Спорыхин А. Н. Метод возмущений в задачах устойчивости сложных сред. Воронеж: Воронеж. гос. ун-т, 1997. 361 с.
- [4] Рейнер М. Реология. М.: Наука, 1965. 223 с.
- [5] Ишлинский А. Ю., Ивлев Д. Д. Математическая теория пластичности. М.: Физматлит, 2001. 701 с.
- [6] Лурье А. И. К теории систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами // Тр. Ленингр. индустр. ин-та. 1937. Т. 3. №6. С. 31-36.
- [7] Гузь А. Н. Основы трехмерной теории устойчивости деформируемых тел. Киев: Вища школа, 1986. 512 с.

REFERENCES

-
- [1] Sporykhin A. N. Modeling of deformation processes and loss of stability of elastic-viscoplastic mixtures // Izv. RAS. MTT. 2020. No. 6. P. 141-146. EDN: JBOAQP. DOI: 10.31857/S0572329920060148. (in Russian).
 - [2] Ivlev D. D., Bykovtsev G. I. Theory of a hardening plastic body. Moscow: Nauka, 1971. 231 p. (in Russian).
 - [3] Sporykhin A. N. The method of perturbations in problems of stability of complex media. Voronezh: Voronezh state University, 1997. 361 p. (in Russian).
 - [4] Reiner M. Rheology. Moscow: Nauka, 1965. 223 p. (in Russian).
 - [5] Ishlinsky A. Yu., Ivlev D. D. Mathematical theory of plasticity. Moscow: Fizmatlit, 2001. 701 p. (in Russian).
 - [6] Lurye A. I. On the theory of systems of linear differential equations with constant coefficients // Proceedings of the Leningrad Industrial Institute. 1937. Vol. 3. No. 6. Pp. 31-36. (in Russian).
 - [7] Guz A. N. Fundamentals of the three-dimensional theory of stability of deformable bodies. Kyiv: Vishcha shkola, 1986. 512 p. (in Russian).