

С. Л. Субботин, А. А. Алексеев

ОСОБЕННОСТИ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ УРАВНЕНИЙ ГИПОТЕЗЫ КОМПЛАНАРНОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ НАПРЯЖЕНИЙ

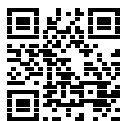
Тверской государственный технический университет, Тверь, Россия

Аннотация. Представлены расчетные формулы и алгоритм численного решения уравнений теории упругопластических процессов в форме гипотезы компланарности при задании процесса нагружения по напряжениям. Показано, что в случае постоянного модуля девиатора напряжений (при отсутствии упрочнения на диаграмме деформирования; прохождении площадки текучести; нагружении по дуге окружности с центром в начале координат пространства напряжений) численное решение становится неопределенным из-за обращения в ноль главного определителя системы расчетных уравнений. При аппроксимации траектории нагружения, например, дугами окружностей со смещенным центром решение такой неопределенности не имеет.

Ключевые слова: пластичность, нагружение в пространстве напряжений, гипотеза компланарности, численное интегрирование.

Субботин Сергей Львович, доктор технических наук, профессор кафедры конструкций и сооружений; e-mail: sbtn@yandex.ru; <https://orcid.org/0000-0001-8881-1390>; AuthorID: 174777

Алексеев Андрей Алексеевич, кандидат технических наук, доцент кафедры сопротивления материалов, теории упругости и пластичности; e-mail: alexeew@bk.ru; AuthorID: 640538



для цитирования: Субботин С.Л., Алексеев А.А. Особенности численного интегрирования уравнений гипотезы компланарности в пространстве напряжений // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им.И.Я.Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2025. № 3(65). С. 203–213. DOI: 10.37972/chgpu.2025.65.3.011. EDN: NHUYVN

Статья опубликована на условиях лицензии *Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)*.

S. L. Subbotin, A. A. Alekseev

FEATURES OF NUMERICAL INTEGRATION OF THE EQUATIONS OF THE COPLANARITY HYPOTHESIS IN STRESS SPACE

Tver State Technical University, Tver, Russia

Abstract. The calculation formulas and the algorithm for the numerical solution of the equations of the theory of elastic-plastic processes in the form of a coplanarity hypothesis when specifying the process of loading by stresses are presented. It is shown that in the case of a constant modulus of the stress deviator (in the absence of hardening on the deformation diagram; passing the yield plateau; loading along an arc of a circle with the center at the origin of the stress space coordinates), the numerical solution becomes indefinite due to the vanishing of the main determinant of the system of calculation equations. When approximating the loading trajectory, for example, by arcs of circles with a displaced center, the solution does not have such an uncertainty.

Keywords: plasticity, stress space loading, coplanarity hypothesis, numerical integration.

Sergey L. Subbotin, Doctor of Technical Sciences, Professor, Professor of the Department of Structures and Constructions; **e-mail:** sbtn@yandex.ru; AuthorID: 174777

Andrey A. Alekseev, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Strength of Materials, Theory of Elasticity and Plasticity; **e-mail:** alexeev@bk.ru; AuthorID: 640538



to cite this article: Subbotin S. L., Alekseev A. A. Features of numerical integration of the equations of the coplanarity hypothesis in stress space // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2025. No 3(65). p. 203–213. DOI: 10.37972/chgpu.2025.65.3.011

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение. В теории упругопластических процессов различают жесткое и мягкое нагружение. Жестким считается кинематическое нагружение, при котором процесс нагружения осуществляется по деформациям, а напряжения должны быть определены из уравнений теории упругопластических процессов. Мягкое (силовое) нагружение ведется по напряжениям, а деформации вычисляются. Для экспериментов, выполненных при жестком нагружении, напряжения являются откликом на заданную траекторию деформаций. Если полученную траекторию напряжений считать заданной, то расчет по теории упругопластических процессов должен дать исходную траекторию деформаций. Такой расчет имеет свои особенности, а в некоторых случаях вообще не может быть реализован. Определяющее соотношение теории упругопластических процессов, которое имеет вид гипотезы компланарности А. А. Ильюшина [1–3] наиболее удобно применять в практических расчетах [4–7].

1. Основные формулы гипотезы компланарности в напряжениях и деформациях. Общее соотношение теории упругопластических процессов в форме гипотезы компланарности А. А. Ильюшина имеет вид [1–3]

$$\frac{d\bar{\sigma}}{ds} = N \frac{d\bar{\Theta}}{ds} + (P - N) \frac{\bar{\sigma} \cdot \frac{d\bar{\Theta}}{ds}}{\sigma^2} \bar{\sigma}, \quad (1)$$

где N , P – функционалы теории упругопластических процессов, $\bar{\sigma}$ – вектор напряжений, σ – его модуль, $d\bar{\Theta}/ds$ – вектор скорости деформаций, касательный к траектории деформаций; $d\bar{\sigma}/ds$ – вектор скорости напряжений. Соотношение (1) устанавливает связь между действующими напряжениями и направлениями приращений упругопластических деформаций

Не нарушая общности алгоритма можно рассмотреть случай плоских траекторий через координаты векторов напряжений S_1 , S_3 и деформаций Θ_1 , Θ_3 . Тогда соотношение (1) в скалярной форме записывается в виде системы уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dS_1}{ds} &= N \frac{d\Theta_1}{ds} + (P - N) \frac{S_1 \frac{d\Theta_1}{ds} + S_3 \frac{d\Theta_3}{ds}}{\sigma^2} S_1, \\ \frac{dS_3}{ds} &= N \frac{d\Theta_3}{ds} + (P - N) \frac{S_1 \frac{d\Theta_1}{ds} + S_3 \frac{d\Theta_3}{ds}}{\sigma^2} S_3. \end{aligned} \quad (2)$$

Если траектория нагружения задана в пространстве напряжений, то от интегрирования по длине s траектории деформации нужно перейти к интегрированию по длине Σ траектории напряжений. Замена производных по формулам

$$\frac{dS_1}{ds} = \frac{dS_1}{d\Sigma} \cdot \frac{d\Sigma}{ds}, \quad \frac{d\Theta_1}{ds} = \frac{d\Theta_1}{d\Sigma} \cdot \frac{d\Sigma}{ds}, \quad (3)$$

и так далее, приводит систему (2) к виду

$$\begin{aligned}\frac{dS_1}{d\Sigma} &= \frac{d\Theta_1}{d\Sigma} + (P - N) \frac{S_1 \frac{d\Theta_1}{d\Sigma} + S_3 \frac{d\Theta_3}{d\Sigma}}{\sigma^2} S_1, \\ \frac{dS_3}{d\Sigma} &= \frac{d\Theta_3}{d\Sigma} + (P - N) \frac{S_1 \frac{d\Theta_1}{d\Sigma} + S_3 \frac{d\Theta_3}{d\Sigma}}{\sigma^2} S_3.\end{aligned}\quad (4)$$

Для заданной траектории напряжений известны величины

$$S_1, S_3, \sigma = \sqrt{S_1^2 + S_3^2}, \quad \frac{dS_1}{d\Sigma}, \quad \frac{dS_3}{d\Sigma},$$

поэтому из системы (4) следует система уравнений для определения Θ_1 и Θ_3

$$\begin{aligned}\left[N + (P - N) \frac{S_1^2}{\sigma^2} \right] \frac{d\Theta_1}{d\Sigma} + (P - N) \frac{S_1 S_3}{\sigma^2} \cdot \frac{d\Theta_3}{d\Sigma} &= \frac{dS_1}{d\Sigma}, \\ (P - N) \frac{S_1 S_3}{\sigma^2} \cdot \frac{d\Theta_1}{d\Sigma} + \left[N + (P - N) \frac{S_3^2}{\sigma^2} \right] \frac{d\Theta_3}{d\Sigma} &= \frac{dS_3}{d\Sigma}.\end{aligned}\quad (5)$$

Главный определитель системы уравнений (5) после преобразований приводится к выражению $P \cdot N$.

С учетом того, что $S_3^2 = \sigma^2 - S_1^2$, $S_1^2 = \sigma^2 - S_3^2$ из (5) следует

$$\begin{aligned}\frac{d\Theta_1}{d\Sigma} &= \left[\frac{1}{N} + \left(\frac{1}{P} - \frac{1}{N} \right) \frac{S_1^2}{\sigma^2} \right] \frac{dS_1}{d\Sigma} + \left(\frac{1}{P} - \frac{1}{N} \right) \frac{S_1 S_3}{\sigma^2} \cdot \frac{dS_3}{d\Sigma}, \\ \frac{d\Theta_3}{d\Sigma} &= \left(\frac{1}{P} - \frac{1}{N} \right) \frac{S_1 S_3}{\sigma^2} \cdot \frac{dS_1}{d\Sigma} + \left[\frac{1}{N} + \left(\frac{1}{P} - \frac{1}{N} \right) \frac{S_3^2}{\sigma^2} \right] \frac{dS_3}{d\Sigma}.\end{aligned}\quad (6)$$

Такой же результат получается непосредственно из выражения (1), которое можно привести к виду

$$\frac{d\bar{\Theta}}{ds} = \frac{1}{N} \frac{d\bar{\sigma}}{ds} - \left(\frac{P}{N} - 1 \right) \frac{\bar{\sigma} \cdot \frac{d\bar{\Theta}}{ds}}{\sigma^2} \bar{\sigma}.\quad (7)$$

Скалярное умножение (1) на вектор напряжений $\bar{\sigma}$ дает выражение

$$\bar{\sigma} \cdot \frac{d\bar{\sigma}}{ds} = N \bar{\sigma} \cdot \frac{d\bar{\Theta}}{ds} + (P - N) \frac{\bar{\sigma} \cdot \frac{d\bar{\Theta}}{ds}}{\sigma^2} \bar{\sigma} \cdot \bar{\sigma},$$

откуда

$$\bar{\sigma} \cdot \frac{d\bar{\Theta}}{ds} = \frac{1}{P} \bar{\sigma} \cdot \frac{d\bar{\sigma}}{ds}.\quad (8)$$

Тогда подстановка (8) в (7) приводит к соотношению

$$\frac{d\bar{\Theta}}{ds} = \frac{1}{N} \frac{d\bar{\sigma}}{ds} + \left(\frac{1}{P} - \frac{1}{N} \right) \frac{\bar{\sigma} \cdot \frac{d\bar{\sigma}}{ds}}{\sigma^2} \bar{\sigma},\quad (9)$$

из которого в скалярной форме с учетом, что

$$\bar{\sigma} \cdot \frac{d\bar{\sigma}}{ds} = S_1 \frac{dS_1}{ds} + S_3 \frac{dS_3}{ds}$$

и представления (3) следует система уравнений (6).

При численном решении уравнений (6) нужно учитывать, что функционалы N и P удобно представлять как функции модуля вектора деформации $\Theta = \sqrt{\Theta_1^2 + \Theta_3^2}$ и угла ϑ_1 между вектором напряжения и касательной к траектории деформации $d\Theta/ds$, называемого углом сближения, для которого

$$\cos \vartheta_1 = \frac{\bar{\sigma}}{\sigma} \cdot \frac{d\bar{\Theta}}{ds} = \frac{S_1 \frac{d\Theta_1}{ds} + S_3 \frac{d\Theta_3}{ds}}{\sigma} = \frac{S_1 \frac{d\Theta_1}{d\Sigma} + S_3 \frac{d\Theta_3}{d\Sigma}}{\sigma \cdot \frac{ds}{d\Sigma}}, \quad (10)$$

где

$$\frac{ds}{d\Sigma} = \left| \frac{d\bar{\Theta}}{d\Sigma} \right| = \left| \frac{d\bar{\Theta}}{ds} \right| \frac{ds}{d\Sigma} = \sqrt{\left(\frac{d\Theta_1}{d\Sigma} \right)^2 + \left(\frac{d\Theta_3}{d\Sigma} \right)^2}. \quad (11)$$

При этом, для заданной траектории напряжений координаты вектора деформаций и длина дуги траектории деформаций

$$\Theta_1 = \int_0^\Sigma \frac{d\Theta_1}{d\Sigma} d\Sigma, \quad \Theta_3 = \int_0^\Sigma \frac{d\Theta_3}{d\Sigma} d\Sigma, \quad s = \int_0^\Sigma \frac{ds}{d\Sigma} d\Sigma. \quad (12)$$

Производные $d\Theta_1/d\Sigma$, $d\Theta_3/d\Sigma$, $ds/d\Sigma$ определяются по формулам (6) и (11), или непосредственно из решения системы уравнений (5).

Функционал P , в соответствии с (8) и (10), может быть заменен на

$$\frac{d\sigma}{ds} = P \cos \vartheta_1 \quad \text{или} \quad P = \frac{d\sigma}{ds} \frac{1}{\cos \vartheta_1}. \quad (13)$$

Тогда из (13) и (10) получаем

$$P = \frac{S_1 \frac{dS_1}{ds} + S_3 \frac{dS_3}{ds}}{S_1 \frac{d\Theta_1}{ds} + S_3 \frac{d\Theta_3}{ds}} = \frac{S_1 \frac{dS_1}{d\Sigma} + S_3 \frac{dS_3}{d\Sigma}}{S_1 \frac{d\Theta_1}{d\Sigma} + S_3 \frac{d\Theta_3}{d\Sigma}}. \quad (14)$$

Подстановка (6) в (14) приводит к тождеству $P = P$.

Из (14) следует формула

$$S_1 \frac{d\Theta_1}{d\Sigma} + S_3 \frac{d\Theta_3}{d\Sigma} = \frac{1}{P} \left(S_1 \frac{dS_1}{d\Sigma} + S_3 \frac{dS_3}{d\Sigma} \right). \quad (15)$$

Тот же результат получается из подстановки в левую часть формулы (15) выражений (6). С учетом (15) формула (10) для тригонометрической функции

угла сближения принимает вид

$$\cos \vartheta_1 = \frac{S_1 \frac{dS_1}{d\Sigma} + S_3 \frac{dS_3}{d\Sigma}}{P \sigma \frac{ds}{d\Sigma}}. \quad (16)$$

Дифференцирование (10) по длине траектории деформации для плоской траектории дает формулу [3]

$$\frac{d\vartheta_1}{ds} = \kappa_1 - \frac{N}{\sigma} \sin \vartheta_1$$

или

$$N = \left(\kappa_1 - \frac{d\vartheta_1}{ds} \right) \frac{\sigma}{\sin \vartheta_1} = \left(\kappa_1 - \frac{d\vartheta_1}{d\Sigma} \cdot \frac{d\Sigma}{ds} \right) \frac{\sigma}{\sin \vartheta_1}, \quad (17)$$

где κ_1 – кривизна плоской траектории деформации.

Формулы (11), (12), (13), (16), (17) связывают функционалы N , P и выражаемые через них $\frac{d\sigma}{ds}$, $\frac{ds}{d\Sigma}$, ϑ_1 .

При этом функционалы N и P должны задаваться так, чтобы они соответствовали заданной траектории нагружения и экспериментальному отклику в виде траектории деформаций независимо от формы представления экспериментальных результатов: $S_1(\Sigma)$, $S_3(\Sigma)$, $\vartheta_1(\Sigma)$, $\vartheta_3(\Sigma)$ или $\vartheta_1(s)$, $\vartheta_3(s)$, $S_1(s)$, $S_3(s)$.

2. Алгоритм интегрирования уравнений теории упругопластических процессов по напряжениям. При расчете процесса нагружения по уравнениям (6) вычисления выполняются по следующему алгоритму [8].

1. Задаются начальные значения

$$\Sigma^{(0)}, \vartheta_1^{(0)}, \vartheta_3^{(0)}, S_1^{(0)}, S_3^{(0)}, \sigma^{(0)} = \sqrt{\left(S_1^{(0)}\right)^2 + \left(S_3^{(0)}\right)^2}, \frac{dS_1^{(0)}}{d\Sigma}, \frac{dS_3^{(0)}}{d\Sigma},$$

причем должно выполняться условие

$$\left| \frac{d\sigma}{d\Sigma} \right| = \sqrt{\left(\frac{dS_1^{(0)}}{d\Sigma} \right)^2 + \left(\frac{dS_3^{(0)}}{d\Sigma} \right)^2} = 1,$$

а так же функционалы N , P по формулам, принятым в рассматриваемом варианте теории упругопластических процессов. Например, для начального линейно упругого участка траектории они равны удвоенному модулю упругости второго рода $N = P = 2G$.

По этим заданным значениям с учетом также заданного значения $s^{(0)}$ находят по формулам (6) и (11)

$$\frac{d\vartheta_1^{(0)}}{d\Sigma}, \frac{d\vartheta_3^{(0)}}{d\Sigma}, \frac{ds^{(0)}}{d\Sigma} = \sqrt{\left(\frac{d\vartheta_1^{(0)}}{d\Sigma} \right)^2 + \left(\frac{d\vartheta_3^{(0)}}{d\Sigma} \right)^2}, \quad \frac{d\sigma}{ds} = \frac{S_1^{(0)} \frac{dS_1^{(0)}}{d\Sigma} + S_3^{(0)} \frac{dS_3^{(0)}}{d\Sigma}}{\sigma^{(0)} \frac{ds^{(0)}}{d\Sigma}}.$$

2. Для каждого шага $\Delta\Sigma$ по длине траектории нагружения задаются $\frac{dS_1^{(i)}}{d\Sigma}$ и $\frac{dS_3^{(i)}}{d\Sigma}$, при этом опять обязательным является условие

$$\left| \frac{d\bar{\sigma}}{d\Sigma} \right| = \sqrt{\left(\frac{dS_1^{(i)}}{d\Sigma} \right)^2 + \left(\frac{dS_3^{(i)}}{d\Sigma} \right)^2} = 1,$$

и вычисляются прогнозируемые значения

$$\Sigma^{(i)} = \Sigma^{(i-1)} + \Delta\Sigma \quad (i = 1, 2, 3...), \quad \frac{d\Theta_1^{(i)}}{d\Sigma} = \frac{d\Theta_1^{(i-1)}}{d\Sigma}, \quad \frac{d\Theta_3^{(i)}}{d\Sigma} = \frac{d\Theta_3^{(i-1)}}{d\Sigma},$$

$$\frac{ds^{(i)}}{d\Sigma} = \sqrt{\left(\frac{d\Theta_1^{(i)}}{d\Sigma} \right)^2 + \left(\frac{d\Theta_3^{(i)}}{d\Sigma} \right)^2},$$

$$S_1^{(i)} = S_1^{(i-1)} + \frac{1}{2} \left(\frac{dS_1^{(i-1)}}{d\Sigma} + \frac{dS_1^{(i)}}{d\Sigma} \right) \Delta\Sigma, \quad S_3^{(i)} = S_3^{(i-1)} + \frac{1}{2} \left(\frac{dS_3^{(i-1)}}{d\Sigma} + \frac{dS_3^{(i)}}{d\Sigma} \right) \Delta\Sigma,$$

$$\sigma^{(i)} = \sqrt{\left(S_1^{(i)} \right)^2 + \left(S_3^{(i)} \right)^2},$$

$$\Theta_1^{(i)} = \Theta_1^{(i-1)} + \frac{1}{2} \left(\frac{d\Theta_1^{(i-1)}}{d\Sigma} + \frac{d\Theta_1^{(i)}}{d\Sigma} \right) \Delta\Sigma, \quad \Theta_3^{(i)} = \Theta_3^{(i-1)} + \frac{1}{2} \left(\frac{d\Theta_3^{(i-1)}}{d\Sigma} + \frac{d\Theta_3^{(i)}}{d\Sigma} \right) \Delta\Sigma,$$

$$s^{(i)} = s^{(i-1)} + \frac{1}{2} \left(\frac{ds^{(i-1)}}{d\Sigma} + \frac{ds^{(i)}}{d\Sigma} \right) \Delta\Sigma,$$

$$\cos \vartheta_1 = \frac{S_1^{(i)} \frac{d\Theta_1^{(i)}}{d\Sigma} + S_3^{(i)} \frac{d\Theta_3^{(i)}}{d\Sigma}}{\sigma^{(i)} \frac{ds^{(i)}}{d\Sigma}}, \quad \frac{d\sigma}{ds} = \frac{S_1^{(i)} \frac{dS_1^{(i)}}{d\Sigma} + S_3^{(i)} \frac{dS_3^{(i)}}{d\Sigma}}{\sigma^{(i)} \frac{ds^{(i)}}{d\Sigma}}.$$

Величины функционалов N и P вычисляются по заданным формулам.

3. Для этого же шага вычисляются корректируемые значения

$$\frac{d\Theta_1^{(i)}}{d\Sigma} = \left[\frac{1}{N} + \left(\frac{1}{P} - \frac{1}{N} \right) \left(\frac{S_1^{(i)}}{\sigma^{(i)}} \right)^2 \right] \frac{dS_1^{(i)}}{d\Sigma} + \left(\frac{1}{P} - \frac{1}{N} \right) \frac{S_1^{(i)} S_3^{(i)}}{(\sigma^{(i)})^2} \frac{dS_3^{(i)}}{d\Sigma},$$

$$\frac{d\Theta_3^{(i)}}{d\Sigma} = \left(\frac{1}{P} - \frac{1}{N} \right) \frac{S_1^{(i)} S_3^{(i)}}{(\sigma^{(i)})^2} \frac{dS_1^{(i)}}{d\Sigma} + \left[\frac{1}{N} + \left(\frac{1}{P} - \frac{1}{N} \right) \left(\frac{S_3^{(i)}}{\sigma^{(i)}} \right)^2 \right] \frac{dS_3^{(i)}}{d\Sigma},$$

$$\frac{ds^{(i)}}{d\Sigma} = \sqrt{\left(\frac{d\Theta_1^{(i)}}{d\Sigma} \right)^2 + \left(\frac{d\Theta_3^{(i)}}{d\Sigma} \right)^2},$$

$$\begin{aligned}\vartheta_1^{(i)} &= \vartheta_1^{(i-1)} + \frac{1}{2} \left(\frac{d\vartheta_1^{(i-1)}}{d\Sigma} + \frac{d\vartheta_1^{(i)}}{d\Sigma} \right) \Delta\Sigma, \quad \vartheta_3^{(i)} = \vartheta_3^{(i-1)} + \frac{1}{2} \left(\frac{d\vartheta_3^{(i-1)}}{d\Sigma} + \frac{d\vartheta_3^{(i)}}{d\Sigma} \right) \Delta\Sigma, \\ s^{(i)} &= s^{(i-1)} + \frac{1}{2} \left(\frac{ds^{(i-1)}}{d\Sigma} + \frac{ds^{(i)}}{d\Sigma} \right) \Delta\Sigma, \\ \cos \vartheta_1 &= \frac{S_1^{(i)} \frac{d\vartheta_1^{(i)}}{d\Sigma} + S_3^{(i)} \frac{d\vartheta_3^{(i)}}{d\Sigma}}{\sigma^{(i)} \frac{ds^{(i)}}{d\Sigma}}, \quad \frac{d\sigma}{ds} = \frac{S_1^{(i)} \frac{dS_1^{(i)}}{d\Sigma} + S_3^{(i)} \frac{dS_3^{(i)}}{d\Sigma}}{\sigma^{(i)} \frac{ds^{(i)}}{d\Sigma}},\end{aligned}$$

а также величины N и P .

4. Для учета в расчете скорректированного в пункте 3 значения $\cos \vartheta_1$ выполняется повторная коррекция по формулам предыдущей коррекции пункта 3.

5. Для подготовки к следующему шагу выполняется переобозначение найденных для данного шага величин в начальные значения для следующего шага

$$S_1^{(i-1)} = S_1^{(i)}, \quad S_3^{(i-1)} = S_3^{(i)}, \quad \vartheta_1^{(i-1)} = \vartheta_1^{(i)}, \quad \vartheta_3^{(i-1)} = \vartheta_3^{(i)}, \quad \Sigma^{(i-1)} = \Sigma^{(i)}, \quad s^{(i-1)} = s^{(i)}.$$

6. Выводятся на экран компьютера (на печать, в файл) найденные для данного шага величины

$$\Sigma^{(i)}, \quad S_1^{(i)}, \quad S_3^{(i)}, \quad \sigma^{(i)}, \quad s^{(i)}, \quad \vartheta_1^{(i)}, \quad \vartheta_3^{(i)}, \quad \cos \vartheta_1, \quad N, \quad P, \quad \frac{d\sigma}{ds}.$$

7. Для следующего шага расчет повторяется с пункта 2. Расчет заканчивается при достижении конечного значения длины траектории нагружения Σ .

Рассмотрим некоторые особенности решения. В общем случае простого нагружения, то есть когда величины S_1 и S_3 изменяются пропорционально одному параметру, для траектории в пространстве напряжений имеет место соотношение

$$\frac{S_1}{S_3} = \frac{dS_1/d\Sigma}{dS_3/d\Sigma},$$

Тогда с учетом (6) отношение

$$\begin{aligned}\frac{d\vartheta_1/d\Sigma}{d\vartheta_3/d\Sigma} &= \frac{\left(\left[\frac{1}{N} + \left(\frac{1}{P} - \frac{1}{N} \right) \frac{S_1^2}{\sigma^2} \right] + \left(\frac{1}{P} - \frac{1}{N} \right) \frac{S_1 S_3}{\sigma^2} \frac{dS_3/d\Sigma}{dS_1/d\Sigma} \right) \frac{dS_1}{d\Sigma}}{\left(\left(\frac{1}{P} - \frac{1}{N} \right) \frac{S_1 S_3}{\sigma^2} \frac{dS_1/d\Sigma}{dS_3/d\Sigma} + \left[\frac{1}{N} + \left(\frac{1}{P} - \frac{1}{N} \right) \frac{S_3^2}{\sigma^2} \right] \frac{dS_3}{d\Sigma} \right)} = \\ &= \frac{\frac{1}{N} + \frac{1}{P} - \frac{1}{N}}{\frac{1}{P} - \frac{1}{N} + \frac{1}{N}} \cdot \frac{dS_1/d\Sigma}{dS_3/d\Sigma} = \frac{dS_1/d\Sigma}{dS_3/d\Sigma},\end{aligned}\tag{18}$$

и окончательно

$$\frac{d\vartheta_1/d\Sigma}{d\vartheta_3/d\Sigma} = \frac{S_1}{S_3}.\tag{19}$$

Косинус угла сближения по (10)

$$\begin{aligned}\cos \vartheta_1 &= \frac{S_1 \frac{d\vartheta_1}{d\Sigma} + S_3 \frac{d\vartheta_3}{d\Sigma}}{\sigma \frac{ds}{d\Sigma}} = \frac{d\vartheta_1}{d\Sigma} \frac{S_1 + S_3 \frac{d\vartheta_3/d\Sigma}{d\vartheta_1/d\Sigma}}{\sqrt{S_1^2 + S_3^2} \sqrt{\left(\frac{d\vartheta_1}{d\Sigma}\right)^2 + \left(\frac{d\vartheta_3}{d\Sigma}\right)^2}} = \\ &= \frac{S_1 + S_3 \frac{S_1}{S_3}}{\sqrt{S_1^2 + S_3^2} \sqrt{1 + \left(\frac{d\vartheta_3/d\Sigma}{d\vartheta_1/d\Sigma}\right)^2}} = \frac{S_1^2 + S_3^2}{\left(\sqrt{S_1^2 + S_3^2}\right)^2} = 1,\end{aligned}$$

Это значит что угол $\vartheta_1 = 0$.

При простом (пропорциональном) нагружении для площади текучести $\sigma = \text{const}$ и $ds = \sqrt{(d\vartheta_1)^2 + (d\vartheta_3)^2} \neq 0$, поэтому $\frac{d\sigma}{ds} = 0$, причем $\cos \vartheta_1 = 1$, следовательно

$$P = \frac{d\sigma}{ds} \frac{1}{\cos \vartheta_1} = 0.$$

В этом случае главный определитель системы уравнений (5) обращается в ноль, а в системе (6) величина $\frac{1}{P} = \infty$. В результате производные деформаций $\frac{d\vartheta_1}{d\Sigma}$ и $\frac{d\vartheta_3}{d\Sigma}$ становятся неопределенными.

Такая же неопределенность имеет место и для траектории напряжений в виде центральной окружности для которой $|\bar{\sigma}| = \sigma = \text{const}$. Для траектории напряжений в виде дуги окружности со смещенным центром относительно начала координат такой неопределенности не возникает. Для такой дуги окружности должен быть задан начальный участок нагружения от начала координат до начала дуги окружности.

При простом нагружении по компоненте S_3 на первом участке

$$0 \leq \Sigma \leq \Sigma_1 = a + R,$$

где a – смещение центра окружности (может быть как положительными, так и отрицательным), R – радиус окружности,

$$S_1 = 0, \quad S_3 = \Sigma, \quad \frac{dS_1}{d\Sigma} = 0, \quad \frac{dS_3}{d\Sigma} = 1, \quad \sqrt{\left(\frac{dS_1}{d\Sigma}\right)^2 + \left(\frac{dS_3}{d\Sigma}\right)^2} = 1.$$

На втором участке с дугой окружности при $\Sigma > \Sigma_1$ полярный угол $\varphi = \frac{\Sigma - \Sigma_1}{R}$ (отсчитывается от оси S_3), тогда

$$S_1 = R \sin \varphi = R \sin \frac{\Sigma - \Sigma_1}{R}, \quad S_3 = a + R \cos \varphi = a + R \cos \frac{\Sigma - \Sigma_1}{R},$$

$$\frac{dS_1}{d\Sigma} = \cos\left(\frac{\Sigma - \Sigma_1}{R}\right), \quad \frac{dS_3}{d\Sigma} = -\sin\left(\frac{\Sigma - \Sigma_1}{R}\right), \quad \sqrt{\left(\frac{dS_1}{d\Sigma}\right)^2 + \left(\frac{dS_3}{d\Sigma}\right)^2} = 1.$$

Величина a и R задаются подбором из условия наилучшего соответствия траектории экспериментальным данным.

Заключение. Представленные результаты показывают, что хотя расчетные формулы теории упругопластических процессов в прямой форме (жесткое нагружение) и обратной (мягкое нагружение) теоретически равнозначны, практическое решение требует достаточно точно задавать траектории нагружения. Например, если экспериментальная траектория деформаций задана в виде окружности, то отклик в пространстве напряжений имеет вид, также близкий к окружности [4, 9]. Однако, как показано выше, задание траектории напряжений в виде окружности не позволяет точно воспроизвести исходную траекторию деформации в численном расчете. В случае, когда траектория деформации представляет собой двузвенную ломаную [10], использование смещенной окружности в качестве траектории напряжений при удачном подборе параметров дает расчетную траекторию деформации достаточно близкую к исходной двузвенной ломаной траектории.

ДОПОЛНИТЕЛЬНО

Вклад авторов. Все авторы внесли существенный вклад в разработку концепции, проведение исследования и подготовку статьи, прочли и одобрили финальную версию перед публикацией.

Конфликт интересов. Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

Источник финансирования. Авторы заявляют об отсутствии внешнего финансирования при проведении исследования.

ADDITIONAL INFORMATION

Authors' contribution. All authors have made a significant contribution to the development of the concept, research and preparation of the article, read and approved the final version before publication.

Competing interests. The authors declare that they have no competing interests.

Funding. This study was not supported by any external sources of funding.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ильюшин А. А. Пластичность. Основы общей математической теории. Москва : Изд-во АН СССР, 1963. 273 с.
- [2] Ильюшин А. А. Механика сплошной среды. Москва : Изд-во МГУ, 1990. 310 с.
- [3] Зубчанинов В. Г. Механика процессов пластических сред. Москва : Физматлит, 2010. 352 с.
- [4] Modeling of elastoplastic deformation of structural steel by a trajectory containing three circles touching internally / V. G. Zubchaninov [et al.] // Materials Physics and Mechanics. 2019. Vol. 42, no. 5. P. 528–534. DOI: 10.18720/MPM.4252019_6.
- [5] Абиров Р. А. К физической достоверности определяющих соотношений при нагружении с изломом // Проблемы машиноведения. Материалы V Международной научно-технической конференции. Омск, 2021. С. 9–12.

- [6] Peleshko V. A. Applied and engineering versions of the theory of elastoplastic processes of active complex loading. Part 1: Conditions of mathematical well-posedness and methods for solving boundary value problems // *Mechanics of Solids*. 2015. Vol. 50, no. 6. P. 650–656. DOI: 10.3103/S0025654415060060.
- [7] Peleshko V. A. Applied and engineering versions of the theory of elastoplastic processes of active complex loading part 2: Identification and verification // *Mechanics of Solids*. 2016. Vol. 51, no. 1. P. 91–113. DOI: 10.3103/S0025654416010106.
- [8] Корн Г. А., Корн Т. М. Справочник по математике для научных работников и инженеров. Москва : Наука, 1973. 832 с.
- [9] Экспериментальная проверка постулата изотропии при деформировании стали 45 по ортогональным криволинейным траекториям постоянной кривизны / В. И. Гульяев [и др.] // *Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния*. 2021. № 1(47). С. 86–94.
- [10] Проверка постулата изотропии при деформировании сплава В95 по двузвенным ломаными траекториям / В. Г. Зубчанинов [и др.] // *Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика*. 2023. № 5. С. 47–52.

REFERENCES

- [1] Ilyushin A. A. *Plasticity. Fundamentals of the General Mathematical Theory*. Moscow : Publishing House of the USSR Academy of Sciences, 1963. 273 p.
- [2] Ilyushin A. A. *Continuum Mechanics*. Moscow : Moscow State University Press, 1990. 310 p.
- [3] Zubchaninov V. G. *Mechanics of Plastic Media Processes*. Moscow : Fizmatlit, 2010. 352 p.
- [4] Modeling of elastoplastic deformation of structural steel by a trajectory containing three circles touching internally / V. G. Zubchaninov [et al.] // *Materials Physics and Mechanics*. 2019. Vol. 42, no. 5. P. 528–534. DOI: 10.18720/MPM.4252019_6.
- [5] Abirov R. A. On the physical credibility of constitutive equations under loading with discontinuity // *Problems of Machine Science. Proceedings of the 5th International Scientific and Technical Conference*. Omsk, 2021. P. 9–12.
- [6] Peleshko V. A. Applied and engineering versions of the theory of elastoplastic processes of active complex loading. Part 1: Conditions of mathematical well-posedness and methods for solving boundary value problems // *Mechanics of Solids*. 2015. Vol. 50, no. 6. P. 650–656. DOI: 10.3103/S0025654415060060.
- [7] Peleshko V. A. Applied and engineering versions of the theory of elastoplastic processes of active complex loading. Part 2: Identification and verification // *Mechanics of Solids*. 2016. Vol. 51, no. 1. P. 91–113. DOI: 10.3103/S0025654416010106.
- [8] Korn G. A., Korn T. M. *Mathematical Handbook for Scientists and Engineers*. Moscow : Nauka, 1973. 832 p.
- [9] Experimental verification of the isotropy postulate during deformation of steel 45 along orthogonal curved trajectories of constant curvature / V. I. Gulyaev [et al.] // *Bulletin of the Chuvash State Pedagogical University named after I. Ya. Yakovlev. Series: Mechanics of Limit State*. 2021. no. 1(47). P. 86–94.
- [10] Verification of the isotropy postulate during deformation of V95 alloy along double-segment broken trajectories / V. G. Zubchaninov [et al.] // *Bulletin of Moscow University. Series 1: Mathematics. Mechanics*. 2023. no. 5. P. 47–52.