

С. Л. Субботин, А. А. Алексеев, В. И. Гульяев

МЕТОДИКА ВЫЧИСЛЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛОВ ТЕОРИИ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ ЭКСПЕРИМЕНТОВ ДЛЯ ПЛОСКИХ ТРАЕКТОРИЙ ДЕФОРМИРОВАНИЯ

Тверской государственный технический университет, Тверь, Россия

Аннотация. В статье представлены расчетные формулы и методика практического определения функционалов теории упругопластических процессов по экспериментальным данным для плоских траекторий деформирования. Приведены результаты вычисления функционалов пластичности для эксперимента на сложное нагружение ($P + M$ опыт) по плоской криволинейной траектории в пространстве деформаций. Приведенная методика определения функционалов может быть использована для обработки экспериментальных данных и построения аппроксимаций функционалов пластичности.

Ключевые слова: пластичность, сложное нагружение, гипотеза компланарности, функционалы пластичности, обработка экспериментальных данных.

Субботин Сергей Львович, доктор технических наук, профессор кафедры конструкций и сооружений; e-mail: sbtn@yandex.ru; <https://orcid.org/0000-0001-8881-1390>; AuthorID: 174777

Алексеев Андрей Алексеевич, кандидат технических наук, доцент кафедры сопротивления материалов, теории упругости и пластичности; e-mail: alexeev@bk.ru; AuthorID: 640538

Гульяев Вадим Иванович, доктор технических наук, заведующий кафедрой автомобильных дорог, оснований и фундаментов; e-mail: vig0@mail.ru; AuthorID: 174778



для цитирования: Субботин С. Л., Алексеев А. А., Гульяев В. И. Методика вычисления функционалов теории упругопластических процессов по результатам экспериментов для плоских траекторий деформирования // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2025. № 3(65). С. 214–230. DOI: 10.37972/chgpu.2025.65.3.012. EDN: KKQJQD

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0).

S. L. Subbotin, A. A. Alekseev

METHODOLOGY FOR CALCULATING THE FUNCTIONALS OF THE THEORY OF ELASTIC-PLASTIC PROCESSES BASED ON THE RESULTS OF EXPERIMENTS FOR PLANE STRAIN TRAJECTORIES

Tver State Technical University, Tver, Russia

Abstract. The calculation formulas and the methodology of practical determination of the functionals of the theory of elastic-plastic processes from experimental data for plane strain trajectories are presented. The results of calculating the plasticity functionals for an experiment on complex loading ($P + M$ experiment) along a plane curvilinear trajectory in the strain space are given. The presented methodology for determining the functionals can be used to process experimental data and construct approximations of the plasticity functionals.

Keywords: plasticity, complex loading, coplanarity hypothesis, plasticity functionals, experimental data processing.

Sergey L. Subbotin, Doctor of Technical Sciences, Professor, Professor of the Department of Structures and Constructions; **e-mail:** sbtn@yandex.ru; AuthorID: 174777

Andrey A. Alekseev, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Strength of Materials, Theory of Elasticity and Plasticity; **e-mail:** alexeev@bk.ru; AuthorID: 640538

Vadim I. Gulyaev, Doctor of Technical Sciences, Head of the Department of Highways, Foundations and Footings; **e-mail:** vig0@mail.ru; AuthorID: 174778



to cite this article: Subbotin L. S., Alekseev A. A., Gulyaev V. I. Methodology for calculating the functionals of the theory of elastic-plastic processes based on the results of experiments for plane strain trajectories // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2025. No 3(65). p. 214–230. DOI: 10.37972/chgpu.2025.65.3.012

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

1. Введение. Экспериментальные исследования и проводимый на их основе анализ закономерностей упругопластического деформирования поликристаллических металлов и сплавов играют ключевую роль в развитии теории пластичности. На основе экспериментальных данных разрабатываются новые математические модели в теории пластичности, а также проводится их верификация и устанавливаются пределы применимости. Результаты большого количества экспериментальных исследований при сложном нагружении материалов и варианты математических теории пластичности частично представлены в работах [1-8].

Одной из наиболее общих и активно развивающихся феноменологических теорий пластичности на сегодняшний день является теория упругопластических процессов, предложенная А.А. Ильюшиным [1, 2], развитие положений этой теории, а также макроэкспериментальные исследования их достоверности представлены в работах научной школы В.Г. Зубчанинова и других исследователей [3-4, 8-16]. Математические модели теории упругопластических процессов находят широкое применение в расчетах процессов упругопластического деформирования конструкционных материалов при сложном комбинированном нагружении [4-7, 16-19]. В рамках теории упругопластических процессов используется векторное (геометрическое) представление истории изменения напряжений и деформаций в виде образа процесса нагружения или деформирования. Этот образ включает траекторию, в каждой точке которой задаются характеристики процесса: векторы напряжений $\bar{\sigma}$ и деформаций $\bar{\epsilon}$ формоизменения, их приращения $d\bar{\sigma}$ и $d\bar{\epsilon}$, а также скалярные параметры (температура, среднее напряжение, средняя деформация и др.). Связь между напряжениями и деформациями в теории процессов описывается определяющими соотношениями, которые учитывают как скалярные, так и векторные свойства материалов. Скалярные свойства отражают связь между инвариантами девиаторов напряжений и деформаций, а векторные свойства характеризуют несоосность девиаторов напряжений, деформаций и их приращений.

В практических расчетах удобно применять определяющее соотношение теории упругопластических процессов, которое имеет вид гипотезы компланарности А.А. Ильюшина [2, 3]. Она устанавливает связь между действующими напряжениями и направлениями приращений упругопластических деформаций, и в векторной форме имеет вид

$$\frac{d\bar{\sigma}}{ds} = N \frac{d\bar{\epsilon}}{ds} + (P - N) \frac{\bar{\sigma} \cdot \frac{d\bar{\epsilon}}{ds}}{\sigma^2} \cdot \bar{\sigma}, \quad (1)$$

где N , P – функционалы пластичности.

В работе [12] приведены конкретизированные формулы для определения функционалов по экспериментальным данным для плоского напряженного состояния и трехмерных винтовых траекторий деформаций методом подбора аналитических функций, соответствующих экспериментальным данным. Функционалы пластичности часто имеют сложный вид, что затрудняет их непосредственное использование в математических моделях. Поэтому часто используют аппроксимации функционалов [3, 4], позволяющие заменить их более простыми выражениями с обеспечением достаточной точности.

В данной статье представлена методика практического определения функционалов теории упругопластических процессов по экспериментальным данным для плоских траекторий деформирования. Также, в наглядной графической форме представлены результаты вычисления функционалов пластичности для программы эксперимента по сложной криволинейной траектории деформаций [20], реализованной на испытательном комплексе СН-ЭВН под руководством профессора В.Г. Зубчанинова.

2. Расчетные формулы для определения функционалов по экспериментальным данным для траекторий, принимаемых плоскими.

Формула для функционала P получается из скалярного произведения вектора напряжений $\bar{\sigma}$ и производной от вектора напряжений по длине траектории деформаций (вектора скорости напряжения) $\frac{d\bar{\sigma}}{ds}$, принимаемой в соответствии с гипотезой компланарности А.А. Ильюшина (1)

$$\bar{\sigma} \cdot \frac{d\bar{\sigma}}{ds} = N \bar{\sigma} \cdot \frac{d\bar{\Theta}}{ds} + (P - N) \cdot \frac{\bar{\sigma} \cdot \frac{d\bar{\Theta}}{ds}}{\sigma^2} \cdot \bar{\sigma} \cdot \bar{\sigma}. \quad (2)$$

Поскольку $\bar{\sigma} \cdot \bar{\sigma} = \sigma^2$, отсюда следует

$$P = \frac{\bar{\sigma} \cdot \frac{d\bar{\sigma}}{ds}}{\bar{\sigma} \cdot \frac{d\bar{\Theta}}{ds}} = \frac{S_1 \cdot \frac{dS_1}{ds} + S_3 \cdot \frac{dS_3}{ds}}{S_1 \cdot \frac{d\Theta_1}{ds} + S_3 \cdot \frac{d\Theta_3}{ds}}. \quad (3)$$

Здесь и далее учтено представление векторов напряжений, деформаций и их производных по длине траектории деформации, принимаемой плоской, в следующем виде

$$\begin{aligned} \bar{\sigma} &= S_1 \hat{e}_1 + S_3 \hat{e}_3, & \bar{\Theta} &= \Theta_1 \hat{e}_1 + \Theta_3 \hat{e}_3, \\ \frac{d\bar{\sigma}}{ds} &= \frac{dS_1}{ds} \hat{e}_1 + \frac{dS_3}{ds} \hat{e}_3, & \frac{d\bar{\Theta}}{ds} &= \frac{d\Theta_1}{ds} \hat{e}_1 + \frac{d\Theta_3}{ds} \hat{e}_3, \end{aligned} \quad (4)$$

где $\hat{e}_1$ и $\hat{e}_3$ – единичные векторы (орты), направленные по осям 1 и 3.

Формула для производной от модуля вектора напряжений по длине дуги траектории деформаций $\frac{d\sigma}{ds}$ получается дифференцированием формулы

$$\sigma = \sqrt{S_1^2 + S_3^2}, \quad (5)$$

тогда

$$\frac{d\sigma}{ds} = \frac{S_1 \frac{dS_1}{ds} + S_3 \frac{dS_3}{ds}}{\sigma}. \quad (6)$$

Эта же формула может быть получена из скалярного произведения (рисунок 1)

$$\bar{\sigma} \cdot \frac{d\bar{\sigma}}{ds} = |\bar{\sigma}| \frac{d\Sigma}{ds} \cos \vartheta = \sigma \cdot \frac{d\sigma}{ds}, \quad (7)$$

где $\sigma = |\bar{\sigma}|$ – модуль вектора напряжений; $\frac{d\Sigma}{ds} = \left| \frac{d\bar{\sigma}}{ds} \right|$ – модуль вектора скорости напряжений; ϑ – угол между векторами $\bar{\sigma}$ и $\frac{d\bar{\sigma}}{ds}$; $\frac{d\bar{\sigma}}{ds} \cdot \cos \vartheta$ – проекция вектора $\frac{d\bar{\sigma}}{ds}$ на направление вектора напряжений $\bar{\sigma}$ (см. рис. 1).

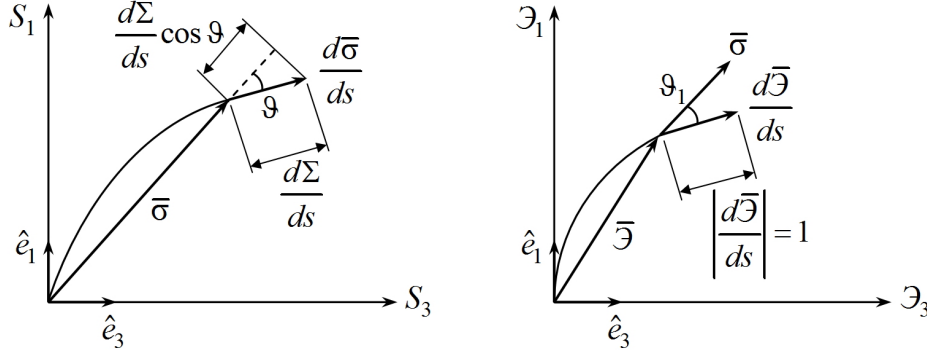


Рис. 1. Траектории нагружения (слева) и деформирования (справа) с приписанными векторами напряжений, деформаций и их приращениями

Отсюда следует

$$\frac{d\sigma}{ds} = \frac{\bar{\sigma} \cdot \frac{d\bar{\sigma}}{ds}}{\sigma} = \frac{S_1 \frac{dS_1}{ds} + S_3 \frac{dS_3}{ds}}{\sigma}. \quad (8)$$

Формула для тригонометрической функции угла сближения $\cos \vartheta_1$ получается (см. рис. 1) из скалярного произведения вектора напряжений и производной от вектора деформаций по длине дуги траектории деформаций (вектора скорости деформаций):

$$\bar{\sigma} \cdot \frac{d\bar{\Theta}}{ds} = |\bar{\sigma}| \cdot \left| \frac{d\bar{\Theta}}{ds} \right| \cos \vartheta_1 = \sigma \cdot 1 \cdot \cos \vartheta_1, \quad (9)$$

откуда

$$\cos \vartheta_1 = \frac{\bar{\sigma} \cdot \frac{d\bar{\Theta}}{ds}}{\sigma} = \frac{S_1 \frac{d\Theta_1}{ds} + S_3 \frac{d\Theta_3}{ds}}{\sigma}. \quad (10)$$

Сопоставление формул для P , $\frac{d\sigma}{ds}$ и $\cos \vartheta_1$ дает соотношения

$$\frac{d\sigma}{ds} = P \cos \vartheta_1 \quad \text{или} \quad P = \frac{d\sigma}{ds} \frac{1}{\cos \vartheta_1}. \quad (11)$$

Для определения функционала N записывается скалярное произведение вектора $\frac{d\bar{\sigma}}{ds}$ на единичный вектор $\hat{\nu} = \nu_1 \hat{e}_1 + \nu_3 \hat{e}_3$, перпендикулярный вектору напряжений $\bar{\sigma}$, с использованием соотношения гипотезы компланарности (1)

$$\frac{d\bar{\sigma}}{ds} \cdot \hat{\nu} = N \frac{d\bar{\Theta}}{ds} \cdot \hat{\nu} + (P - N) \frac{\bar{\sigma} \cdot \frac{d\bar{\Theta}}{ds}}{\sigma^2} \cdot \bar{\sigma} \cdot \hat{\nu}. \quad (12)$$

Ввиду перпендикулярности векторов $\hat{\nu}$ и $\bar{\sigma}$, их скалярное произведение равно нулю, тогда

$$N = \frac{\frac{d\bar{\sigma}}{ds} \cdot \hat{\nu}}{\frac{d\bar{\Theta}}{ds} \cdot \hat{\nu}} = \frac{\frac{dS_1}{ds} \nu_1 + \frac{dS_3}{ds} \nu_3}{\frac{d\Theta_1}{ds} \nu_1 + \frac{d\Theta_3}{ds} \nu_3}. \quad (13)$$

Компоненты вектора $\hat{\nu}$ находятся из условий

$$\bar{\sigma} \cdot \hat{\nu} = S_1 \nu_1 + S_3 \nu_3 = 0, \quad |\hat{\nu}| = \sqrt{\nu_1^2 + \nu_3^2} = 1, \quad (14)$$

тогда

$$\nu_3 = -\frac{S_1}{S_3} \nu_1, \quad \pm \nu_1 \sqrt{1 + \left(\frac{S_1}{S_3}\right)^2} = 1, \quad (15)$$

откуда

$$\nu_1 = \pm \frac{S_3}{\sigma}, \quad \nu_3 = \mp \frac{S_1}{\sigma}. \quad (16)$$

Таким образом, окончательно формула для определения функционала N имеет вид

$$N = \frac{S_1 \frac{dS_3}{ds} - S_3 \frac{dS_1}{ds}}{S_1 \frac{d\Theta_3}{ds} - S_3 \frac{d\Theta_1}{ds}}. \quad (17)$$

Существенно отметить, что при $\vartheta_1 = 0$ выполняются соотношения

$$\hat{\sigma} = \frac{\bar{\sigma}}{\sigma} = \frac{d\bar{\Theta}}{ds} \quad \text{или} \quad \frac{S_1}{\sigma} = \frac{d\Theta_1}{ds}; \quad \frac{S_3}{\sigma} = \frac{d\Theta_3}{ds}; \quad (18)$$

$$\cos \vartheta_1 = \frac{S_1 \frac{S_1}{\sigma} + S_3 \frac{S_3}{\sigma}}{\sigma} = \frac{S_1^2 + S_3^2}{\sigma^2} = 1. \quad (19)$$

Тогда знаменатель формулы для N обращается в нуль:

$$S_1 \frac{d\Theta_3}{ds} - S_3 \frac{d\Theta_1}{ds} = \sigma \frac{d\Theta_1}{ds} \frac{d\Theta_3}{ds} - \sigma \frac{d\Theta_3}{ds} \frac{d\Theta_1}{ds} = 0 \quad (20)$$

При этом, если числитель формулы (17) для N не обращается в нуль, то есть $S_1 \frac{dS_3}{ds} - S_3 \frac{dS_1}{ds} \neq 0$, то величина функционала $N = \pm\infty$. Иначе говоря, если вектор напряжений $\bar{\sigma}$ направлен по касательной к траектории деформации, то $\vartheta_1 = 0$, а $N = \pm\infty$. Числитель формулы для N также может быть равен нулю, если вектор $\frac{d\bar{\sigma}}{ds}$ по направлению совпадает с вектором напряжений $\bar{\sigma}$. В этом случае $\frac{d\bar{\sigma}}{ds} \cdot \hat{\nu} = 0$.

Другая формула для вычисления функционала N может быть получена дифференцированием выражения $\cos \vartheta_1$ по (10), тогда

$$\frac{d \cos \vartheta_1}{ds} = \frac{d}{ds} \left(\frac{\bar{\sigma} \cdot \frac{d\bar{\sigma}}{ds}}{\sigma} \right). \quad (21)$$

Отсюда, с учетом что $\left| \frac{d^2 \bar{\sigma}}{ds^2} \right| = \kappa_1$ – кривизна траектории деформации, следует [3]

$$N = \frac{\sigma}{\sin \vartheta_1} \left(\kappa_1 - \frac{d\vartheta_1}{ds} \right). \quad (22)$$

Как и для предыдущей формулы (17), знаменатель этой формулы обращается в ноль, если $\vartheta_1 = 0$. Числитель формулы обращается в ноль, если выполняется условие

$$\kappa_1 - \frac{d\vartheta_1}{ds} = 0. \quad (23)$$

По определению кривизны плоской траектории деформации

$$\kappa_1 = \frac{d\varphi}{ds} = \frac{d\varphi}{Rd\varphi} = \frac{1}{R}. \quad (24)$$

Если $\frac{d\varphi}{ds} = \frac{d\vartheta_1}{ds}$, то вектор напряжений $\bar{\sigma}$ не меняет своего направления на участке ds траектории деформации и остается перпендикулярным к вектору $\hat{\nu}$. Отсюда следует

$$\left(\bar{\sigma} + \frac{d\bar{\sigma}}{ds} ds \right) \cdot \hat{\nu} = \bar{\sigma} \cdot \hat{\nu} + \frac{d\bar{\sigma}}{ds} ds \cdot \hat{\nu} = 0; \quad \bar{\sigma} \cdot \hat{\nu} = 0; \quad \frac{d\bar{\sigma}}{ds} \cdot \hat{\nu} = 0. \quad (25)$$

Причем, если в этой точке траектории $\vartheta_1 \neq 0$, то

$$\frac{d\bar{\sigma}}{ds} \cdot \hat{\nu} \neq 0; \quad N = \frac{\frac{d\bar{\sigma}}{ds} \cdot \hat{\nu}}{\frac{d\bar{\sigma}}{ds} \cdot \hat{\nu}} = 0. \quad (26)$$

При вычислении функционала N по формуле (22), содержащей $\sin \vartheta_1$ и $\frac{d\vartheta_1}{ds}$ нужно учитывать знак угла ϑ_1 . Угол ϑ_1 принимается положительным, если угол между вектором напряжений $\bar{\sigma}$ и радиусом кривизны (перпендикулярным

к касательной к траектории деформаций) больше 90° ; при этом угле меньше 90° угол ϑ_1 принимается отрицательным (рисунок 2).

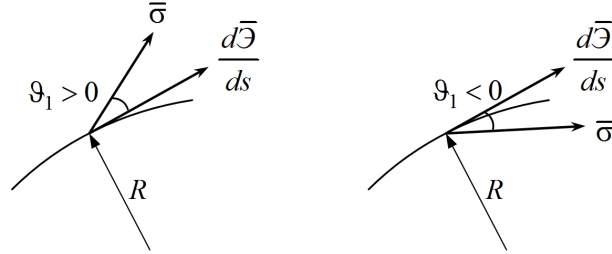


Рис. 2. К определению знака угла сближения

3. Методика практического вычисления P , N , $\frac{d\sigma}{ds}$, $\cos \vartheta_1$ по экспериментальным данным для плоских траекторий.

Программы физических экспериментов по сложному упругопластическому деформированию тонкостенных цилиндрических образцов, проводимые на испытательном комплексе СН-ЭВН [8], задаются для плоских траекторий через декартовы проекции Ξ_1 и Ξ_3 вектора деформации в параметрическом виде. Малые отклонения координат вектора деформаций Ξ_1 и Ξ_3 от задаваемой в эксперименте траектории деформаций, вызванные случайными причинами, приводят к тому, что заданная длина участка траектории деформаций Δs_n меньше суммы длин расстояний между соседними экспериментальными точками (рис. 3), то есть

$$\Delta s_n < \sum_{i=0}^n \sqrt{\Delta \Xi_{1i+1}^2 + \Delta \Xi_{3i+1}^2}, \quad (27)$$

где

$$\Delta \Xi_{1i+1} = \Xi_{1i+1} - \Xi_{1i}, \quad \Delta \Xi_{3i+1} = \Xi_{3i+1} - \Xi_{3i}, \quad (i = 0, 1, 2 \dots, n). \quad (28)$$

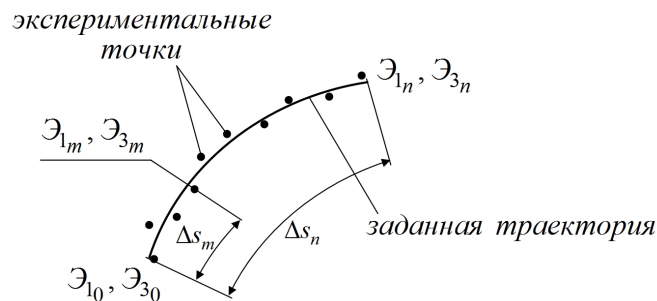


Рис. 3. Отклонения экспериментальных точек от задаваемой в эксперименте программы испытания

Ввиду случайности отклонений, для сглаживания экспериментальной траектории деформации каждую экспериментальную точку можно спроектировать на теоретическую траекторию и вычислить длину участка траектории до текущей точки m по формуле

$$\Delta s_m = \sum_{j=0}^m \sqrt{\Delta \vartheta_{1j+1}^2 + \Delta \vartheta_{3j+1}^2} \cdot \frac{\Delta s_n}{\sum_{i=0}^n \sqrt{\Delta \vartheta_{1i+1}^2 + \Delta \vartheta_{3i+1}^2}}. \quad (29)$$

Далее по величине Δs_m находят сглаженные значения компонент ϑ_{1m} и ϑ_{3m} для этой точки как функции s_m в соответствии с уравнением данного участка траектории, а также их производные $\frac{d\vartheta_{1m}}{ds}$ и $\frac{d\vartheta_{3m}}{ds}$.

Параметрическое представление траекторий деформаций должно обладать ясным геометрическим представлением на плоскости $\vartheta_1 - \vartheta_3$, чтобы использовать их при обработке экспериментальных данных по задаваемым программам. Например, для параметрического задания прямолинейного участка траектории деформаций (рис. 4, а):

$$\begin{aligned} \vartheta_{1m} &= \Delta s \sin \varphi, \quad \vartheta_{3m} = \vartheta_{30} - \Delta s \cos \varphi, \\ \frac{d\vartheta_{1m}}{ds} &= \sin \varphi, \quad \frac{d\vartheta_{3m}}{ds} = -\cos \varphi, \\ d\vartheta_{1m} &= \sin \varphi \cdot ds, \quad d\vartheta_{3m} = -\cos \varphi \cdot ds, \quad \sqrt{d\vartheta_{1m}^2 + d\vartheta_{3m}^2} = ds. \end{aligned} \quad (30)$$

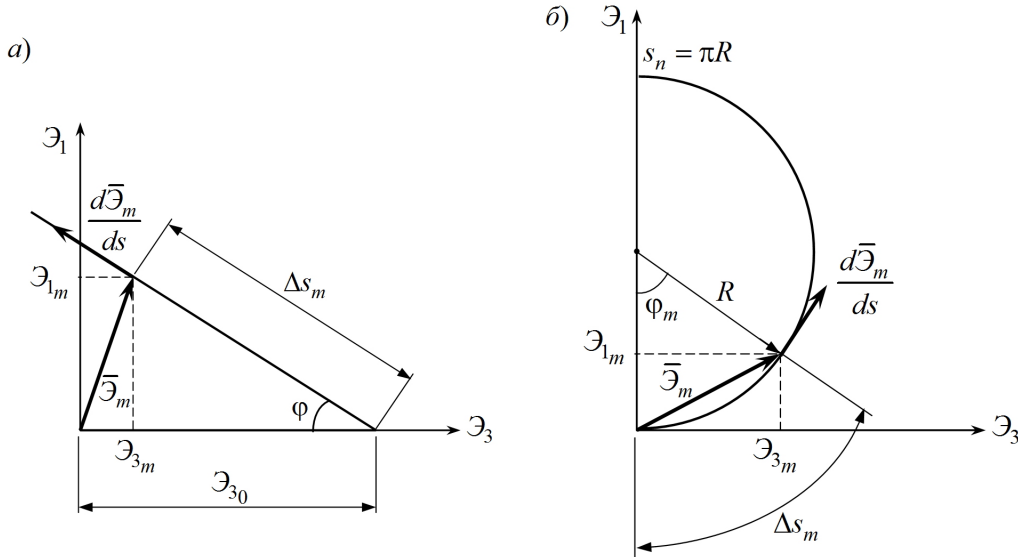


Рис. 4. Параметрическое задание траектории деформаций: а) – прямолинейный участок; б) – дуга окружности

Для параметрического задания участка траектории деформаций в виде дуги окружности радиуса R (рис. 4, б) удобно использовать полярный угол $\varphi_m = \Delta s_m / R$, тогда

$$\begin{aligned}\Theta_{1m} &= R - R \cos \varphi_m = R \left(1 - \cos \frac{\Delta s_m}{R} \right), \quad \Theta_{3m} = R \sin \varphi_m = R \sin \frac{\Delta s_m}{R}, \\ \frac{d\Theta_{1m}}{ds} &= \frac{d\Theta_{1m}}{d\varphi_m} \frac{d\varphi_m}{ds} = \sin \frac{\Delta s_m}{R}, \quad \frac{d\Theta_{3m}}{ds} = \frac{d\Theta_{3m}}{d\varphi_m} \frac{d\varphi_m}{ds} = \cos \frac{\Delta s_m}{R}, \\ d\Theta_{1m} &= \sin \varphi_m ds, \quad d\Theta_{3m} = \cos \varphi_m ds, \quad \sqrt{d\Theta_{1m}^2 + d\Theta_{3m}^2} = ds.\end{aligned}\quad (31)$$

Для вычисления значений P , N , $\frac{d\sigma}{ds}$, $\cos \vartheta_1$ по экспериментальным данным необходимы значения координат вектора напряжений S_1 и S_3 и их производные $\frac{dS_1}{ds}$, $\frac{dS_3}{ds}$ по длине дуги траектории деформаций.

На начальном линейно-упругом участке значения координат вектора напряжений S_1 и S_3 , а также их производные вычисляются по формулам закона Гука. Например, в произвольной точке k траектории

$$S_{1k} = 2G\Theta_{1k}, \quad S_{3k} = 2G\Theta_{3k}, \quad \frac{dS_{1k}}{ds} = 2G \frac{d\Theta_{1k}}{ds}, \quad \frac{dS_{3k}}{ds} = 2G \frac{d\Theta_{3k}}{ds}, \quad (32)$$

где G – модуль упругости второго рода (модуль сдвига) материала образца.

Экспериментальные значения для расчета удобно привести к равноотстоящим точкам. Точки с постоянным шагом по длине траектории деформаций s можно получить по экспериментальным точкам линейной интерполяцией

$$\begin{aligned}S_{1k} &= S_{1m} + \frac{S_{1m+1} - S_{1m}}{s_{m+1} - s_m} (s_k - s_m), \\ S_{3k} &= S_{3m} + \frac{S_{3m+1} - S_{3m}}{s_{m+1} - s_m} (s_k - s_m),\end{aligned}\quad (33)$$

где S_{1m} , S_{1m+1} , S_{3m} , S_{3m+1} – значения S_1 и S_3 в экспериментальных точках с длиной траектории деформаций s_m и s_{m+1} соответственно; s_k – длина траектории деформаций в точке k , наиболее близкой к точкам m и $m+1$. Для полученных равноотстоящих точек можно выполнить сглаживание величин S_{1k} и S_{3k} для уменьшения влияния случайных отклонений.

Для вычисления выровненных значений $\tilde{S}_{1k}$ ($k = 0, 1, 2, 3, \dots, n-1, n$) сглаженных многочленом третьей степени (кубической параболой) по пяти точкам можно использовать формулы, полученные по методу наименьших квадратов [21]:

$$\begin{aligned}\tilde{S}_{10} &= \frac{1}{70} (69S_{10} + 4S_{11} - 6S_{12} + 4S_{13} - S_{14}), \\ \tilde{S}_{11} &= \frac{1}{35} (2S_{10} + 27S_{11} + 12S_{12} - 8S_{13} + 2S_{14}), \\ \tilde{S}_{12} &= \frac{1}{35} (-3S_{10} + 12S_{11} + 17S_{12} + 12S_{13} - 3S_{14}),\end{aligned}$$

4. Результаты обработки и вычисления значений P , N , $\frac{d\sigma}{ds}$, $\cos \vartheta_1$ по экспериментальным данным для плоской криволинейной траектории деформаций.

На рисунках 5-10 представлены результаты обработки по описанной выше методике двумерного эксперимента на сложное нагружение (осевой силой и крутящим моментом) тонкостенного трубчатого образца из стали 45.

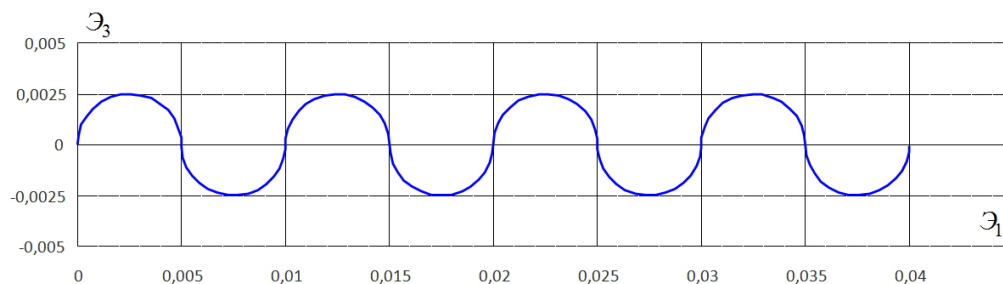


Рис. 5. Траектория деформаций (параметрически заданная)

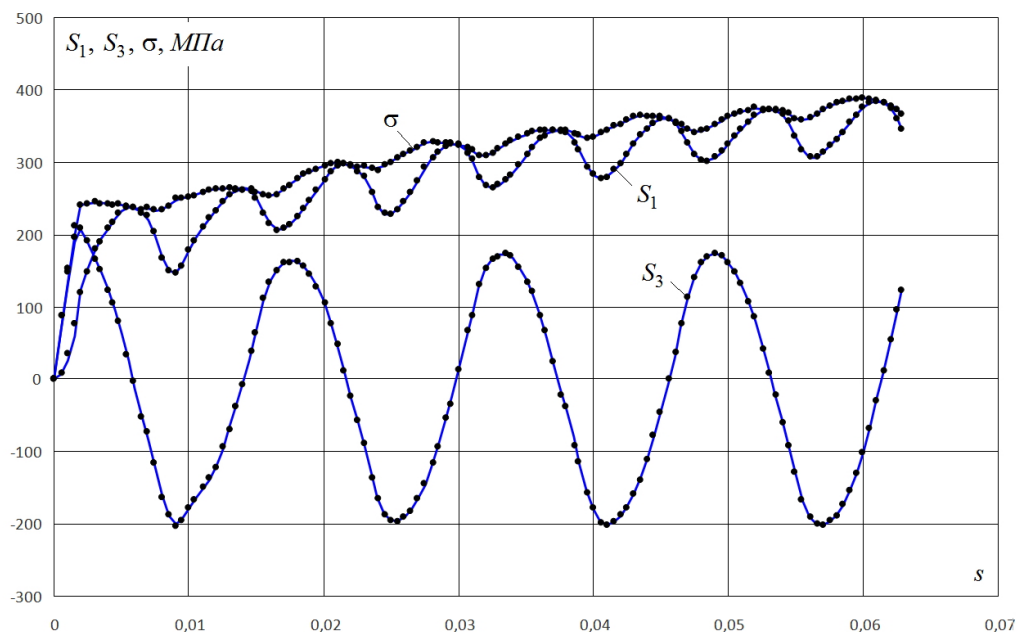


Рис. 6. Диаграммы деформирования: зависимости S_1 , S_3 , σ от длины дуги s

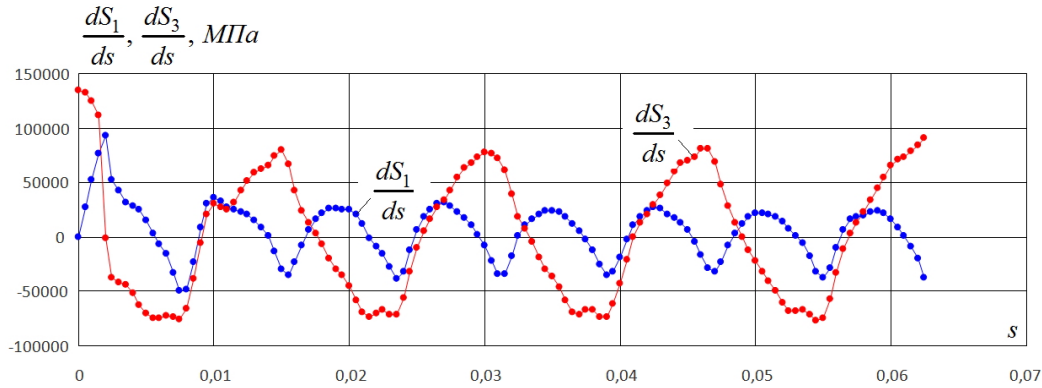


Рис. 7. Графики зависимостей производных координат вектора напряжений от длины дуги s

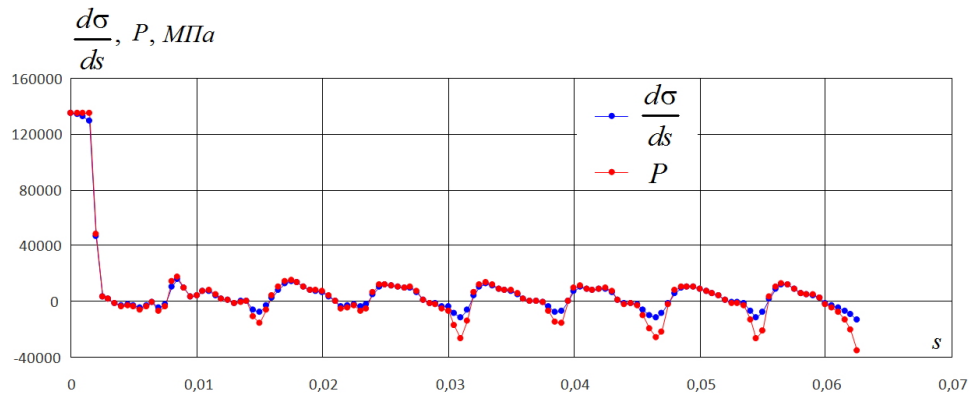
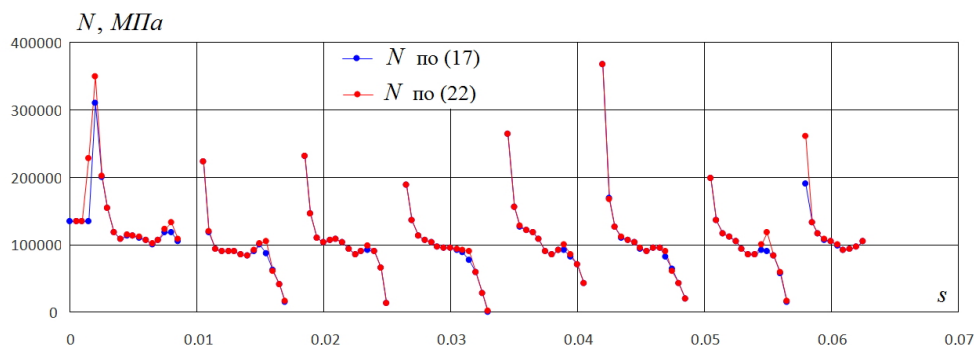
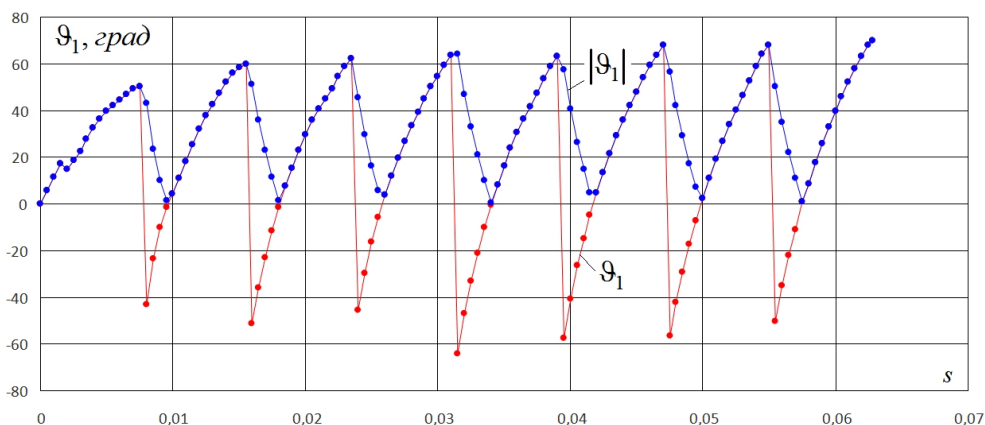


Рис. 8. Графики зависимостей функционалов $\frac{d\sigma}{ds}$, P от длины дуги s

Представленная на рисунке 5 программа эксперимента [20], выполненного на испытательном комплексе СН-ЭВМ, представляла собой в пространстве деформаций плоскую гладкую кривую, состоящую из восьми последовательных полуокружностей радиуса 0,0025. Для ее реализации трубчатый образец подвергался комбинированному растяжению по координате $\mathcal{E}_1$ от нуля до конечного значения $\mathcal{E}_1^* = 0,04$ и знакопеременному кручению по $\mathcal{E}_3$ от нуля до $\mathcal{E}_3^* = \pm 0,0025$. Расчетная длина дуги траектории деформирования составляет 0,0628.

На рисунке 6 представлены зависимости координат вектора напряжений S_1 и S_3 , а также его модуля σ от длины дуги s траектории деформаций.

Экспериментальные данные на рис. 6 обозначены точками, результаты сглаживания сплошными кривыми синего цвета. Как видно, графики на рисунках

Рис. 9. Графики зависимости функционала N от длины дуги s Рис. 10. Диаграмма $\vartheta_1 - s$

носят колебательный характер и прослеживается их периодичность, а результаты сглаживания преобразуют данные в относительно гладкие кривые с достаточно плавными производными.

Далее на рисунке 7 приведены графики зависимостей производных $\frac{dS_1}{ds}$, $\frac{dS_3}{ds}$ от длины дуги s траектории деформаций, которые были определены по приведенной выше методике с шагом для равноотстоящих точек $\Delta s = 0,0005$.

На рисунке 8 показаны диаграммы зависимостей функционалов P и $\frac{d\sigma}{ds}$ от s , а на рисунке 9 — функционала N от s . Значения функционала N на рис. 9 определены по двум разным формулам (17) и (22).

Как видно обе формулы дают очень близкие результаты, наибольшие расхождения наблюдаются при переходе с одного участка окружности траектории деформаций на другой, поскольку в этих точках меняется знак угла сближения ϑ_1 . Также при значениях угла ϑ_1 близких к нулю, значение $N \rightarrow \infty$, поэтому на

графике присутствуют разрывы. Анализируя полученные графики на рис. 8 и 9 можно заметить в пластической области явную периодичность или повторяемость значений уже начиная со второй окружности траектории деформирования.

На рисунке 10 представлена диаграмма зависимости $\vartheta_1 - s$, характеризующая векторные свойства материала, на которой показаны как значения ϑ_1 с учетом знака, так и абсолютные значения ϑ_1 . Такое резкое изменение знака угла сближения ϑ_1 происходит в местах стыка полуокружностей траектории деформаций.

Таким образом, представленная в статье методика определения функционалов теории упругопластических процессов для плоских траекторий деформаций может быть использована для обработки экспериментальных данных и построения аппроксимаций функционалов пластичности. При определении функционала N по формуле (22) необходимо учитывать знак угла сближения между касательной к траектории деформации и вектором напряжения, поэтому наиболее удобной для вычисления N является формула (17).

ДОПОЛНИТЕЛЬНО

Вклад авторов. Все авторы внесли существенный вклад в разработку концепции, проведение исследования и подготовку статьи, прочли и одобрили финальную версию перед публикацией.

Конфликт интересов. Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

Источник финансирования. Авторы заявляют об отсутствии внешнего финансирования при проведении исследования.

ADDITIONAL INFORMATION

Authors' contribution. All authors have made a significant contribution to the development of the concept, research and preparation of the article, read and approved the final version before publication.

Competing interests. The authors declare that they have no competing interests.

Funding. This study was not supported by any external sources of funding.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ильюшин А. А. Пластичность. Основы общей математической теории. М. : Изд-во АН СССР, 1963. 273 с.
- [2] Ильюшин А. А. Механика сплошной среды. М. : Изд-во МГУ, 1990. 310 с.
- [3] Зубчанинов В. Г. Механика процессов пластических сред. М. : Физматлит, 2010. 352 с.
- [4] Зубчанинов В. Г. Устойчивость и пластичность. Т.2. Пластичность. М. : Физматлит, 2008. 336 с.
- [5] Прикладная теория пластичности / Ф. М. Митенков [и др.]. М. : Физматлит, 2015. 284 с.
- [6] Аннин Б. Д., Жигалкин В. М. Поведение материалов в условиях сложного нагружения. Новосибирск : Изд-во СО РАН, 1999. 342 с.
- [7] Bondar V. S. Inelasticity. Variants of the theory. New York : Begell House, 2013.
- [8] Гультяев В. И., Алексеев А. А. Экспериментально-теоретическое исследование деформирования конструкционных материалов при сложном нагружении за пределом упругости. Тверь : ТвГТУ, 2023. 164 с.

- [9] Зубчанинов В. Г., Алексеев А. А., Гультияев В. И. Испытание стали 45 при упругопластическом деформировании по сложным траекториям постоянной и переменной кривизны // Деформация и разрушение материалов. 2016. № 9. С. 14–19.
- [10] Проверка постулата изотропии при деформировании сплава В95 по двухзвенным ломаными траекториям / В. Г. Зубчанинов [и др.] // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. 2023. № 5. С. 47–52.
- [11] Экспериментальные исследования сложного нагружения латуни Л63 на двухзвенных ломаных траекториях типа «смещенный веер» / В. Г. Зубчанинов [и др.] // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2023. № 1 (55). С. 18–25.
- [12] Субботин С. Л., Алексеев А. А. Конкретизация обобщения гипотезы компланарности для упругопластических процессов в трехмерном изображающем пространстве А. А. Ильюшина // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2022. № 1 (51). С. 85–95.
- [13] Пелешко В. А. Прикладной и инженерный варианты теории упругопластических процессов активного сложного нагружения. Часть 2: Идентификация и верификация // Изв. РАН. МТТ. 2016. № 1. С. 110–135. DOI: 10.3103/S0025654416010106.
- [14] Молодцов И. Н. Особенности применения теории упругопластических процессов при сложном нагружении по криволинейным траекториям деформации // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. 2022. № 4. С. 48–55.
- [15] Васин Р. А. Теория упругопластических процессов и исследование структурно-механических свойств материалов // Изв. РАН. МТТ. 2011. № 1. С. 19–26.
- [16] Modeling of elastoplastic deformation of structural steel by a trajectory containing three circles touching internally / V. G. Zubchaninov [et al.] // Materials Physics and Mechanics. 2019. Vol. 42, no. 5. P. 528–534. DOI: 10.18720/MPM.4252019_6.
- [17] Процессы сложного нагружения конструкционной стали по пятизвенной кусочно-ломаной траектории деформирования / В. Г. Зубчанинов [и др.] // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2019. № 61. С. 32–44. DOI: 10.17223/19988621/61/4.
- [18] Алексеев А. А. Моделирование процесса упругопластического деформирования стали 45 по траекториям типа спирали Архимеда // Вычислительная механика сплошных сред. 2021. Т. 14, № 1. С. 102–109.
- [19] Пелешко В. А. Прикладной и инженерный варианты теории упругопластических процессов активного сложного нагружения. Часть 1: условия математической корректности и методы решения краевых задач // Изв. РАН. МТТ. 2015. № 6. С. 61–68. DOI: 10.3103/S0025654415060060.
- [20] Экспериментальное исследование стали 45 по некоторой гладкой криволинейной траектории деформирования / В. И. Гультияев [и др.] // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2021. № 3 (49). С. 33–41.
- [21] Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М. : Наука, 1973. 832 с.

REFERENCES

- [1] Ilyushin A. A. Plasticity. Fundamentals of General Mathematical Theory. Moscow : Publishing House of the USSR Academy of Sciences, 1963. 273 p.
- [2] Ilyushin A. A. Continuum Mechanics. Moscow : Publishing House of Moscow State University, 1990. 310 p.
- [3] Zubchaninov V. G. Mechanics of Processes of Plastic Media. Moscow : Fizmatlit, 2010. 352 p.
- [4] Zubchaninov V. G. Stability and Plasticity. Vol. 2: Plasticity. Moscow : Fizmatlit, 2008. 336 p.
- [5] Applied Theory of Plasticity / F. M. Mitenkov [et al.]. Moscow : Fizmatlit, 2015. 284 p.

- [6] Annin B. D., Zhigalkin V. M. Behavior of Materials under Complex Loading. Novosibirsk : Publishing House of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, 1999. 342 p.
- [7] Bondar V. S. Inelasticity. Variants of the Theory. New York : Begell House, 2013.
- [8] Gulyaev V. I., Alekseev A. A. Experimental and Theoretical Study of Deformation of Structural Materials under Complex Loading beyond the Elastic Limit. Tver : TvSTU, 2023. 164 p.
- [9] Zubchaninov V. G., Alekseev A. A., Gulyaev V. I. Testing of Steel 45 under Elasto-Plastic Deformation along Complex Paths of Constant and Variable Curvature // *Deformatsiya i razrusheniye materialov*. 2016. no. 9. P. 14–19.
- [10] Verification of the Isotropy Postulate during Deformation of B95 Alloy along Two-Link Broken Trajectories / V. G. Zubchaninov [et al.] // *Bulletin of Moscow University. Series 1: Mathematics. Mechanics*. 2023. no. 5. P. 47–52.
- [11] Experimental Studies of Complex Loading of L63 Brass on Two-Link Broken Trajectories of the "Offset Fan" Type / V. G. Zubchaninov [et al.] // *Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I. Ya. Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya*. 2023. no. 1(55). P. 18–25.
- [12] Subbotin S. L., Alekseev A. A. Concretization of Generalization of the Coplanarity Hypothesis for Elastic-Plastic Processes in a Three-Dimensional Space by A. A. Ilyushin // *Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I. Ya. Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya*. 2022. no. 1(51). P. 85–95.
- [13] Peleshko V. A. Applied and Engineering Versions of the Theory of Elastic-Plastic Processes of Active Complex Loading. Part 2: Identification and Verification // *Izvestiya Akademii Nauk. Mekhanika Tverdogo Tela*. 2016. no. 1. P. 110–135. DOI: 10.3103/S0025654416010106.
- [14] Molodtsov I. N. Features of the Application of the Theory of Elastic-Plastic Processes under Complex Loading along Curvilinear Deformation Trajectories // *Bulletin of Moscow University. Series 1: Mathematics. Mechanics*. 2022. no. 4. P. 48–55.
- [15] Vasin R. A. Theory of Elastic-Plastic Processes and the Study of Structural and Mechanical Properties of Materials // *Izvestiya Akademii Nauk. Mekhanika Tverdogo Tela*. 2011. no. 1. P. 19–26.
- [16] Modeling of Elastoplastic Deformation of Structural Steel by a Trajectory Containing Three Circles Touching Internally / V. G. Zubchaninov [et al.] // *Materials Physics and Mechanics*. 2019. Vol. 42, no. 5. P. 528–534. DOI: 10.18720/MPM.4252019_6.
- [17] The Processes of Complex Loading Structural Steel for a Five-Link Piecewise Broken Strain Path / V. G. Zubchaninov [et al.] // *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 2019. no. 61. P. 32–44. DOI: 10.17223/19988621/61/4.
- [18] Alekseev A. A. Modeling of Elastoplastic Deformation of Steel 45 along Archimedes Spiral Type Trajectories // *Computational Continuum Mechanics*. 2021. Vol. 14, no. 1. P. 102–109.
- [19] Peleshko V. A. Applied and Engineering Versions of the Theory of Elastoplastic Processes of Active Complex Loading. Part 1: Conditions of Mathematical Well-Posedness and Methods for Solving Boundary Value Problems // *Izvestiya Akademii Nauk. Mekhanika Tverdogo Tela*. 2015. no. 6. P. 61–68. DOI: 10.3103/S0025654415060060.
- [20] Experimental Study of Steel 45 along a Certain Smooth Curvilinear Deformation Trajectory / V. I. Gulyaev [et al.] // *Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I. Ya. Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya*. 2021. no. 3(49). P. 33–41.
- [21] Korn G., Korn T. Handbook of Mathematics for Scientists and Engineers. Moscow : Science, 1973. 832 p.