

А. А. Трещев, Д. О. Бесстрашнов

3-D МОДЕЛЬ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ОРТОТРОПНОЙ НЕЗАМКНУТОЙ ОБОЛОЧКИ ИЗ МАТЕРИАЛА С НЕСОВЕРШЕННОЙ УПРУГОСТЬЮ

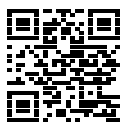
Тулский государственный университет, Тула, Россия

Аннотация. Представлена 3-D конечно-элементная модель деформирования разомкнутой круговой цилиндрической оболочки, не относящейся к классу тонких или конструкции средней толщины. Опирается принята типа жесткого защемления по образующим. Модель свободна от технических гипотез, применяемых при расчете оболочечных конструкций. Поэтому математическая модель определения напряженно-деформированного состояния толсто-стенной оболочки базируется на нелинейном трехмерном подходе. В разработанной модели учтена структурная специфика конструкционных материалов, каковыми являются ортотропные композиты с меняющимися жесткостными параметрами при изменении вида напряженного состояния, что можно характеризовать как наведенная механическая неоднородность структуры. Данный факт усложняет конкретные расчеты конструкций. В связи с этим в расчетной модели были преобразованы объемные десятиузловые изопараметрические конечные элементы в виде тетраэдра с тремя степенями свободы в узле. Корректного учета деформационных свойств ортотропной структуры композита, обладающего несовершенной упругостью, удалось добиться путем использования энергетической связи тензоров деформаций и напряжений, сформулированной в компонентах нормированного пространства в главных осях ортотропии материала. Для решения общей нелинейной задачи использовалась методика переменных параметров упругости. Процесс реализации разработанной модели позволил получить информацию о всех характеристиках деформирования оболочки в полном объеме, основные из которых приведены и проанализированы в данной статье.

Ключевые слова: ортотропный композит, деформационная неоднородность, незамкнутая цилиндрическая оболочка кругового очертания, нормированное тензорное пространство.

Трещев Александр Анатольевич, доктор технических наук, профессор, член-корреспондент РААСН, заведующий кафедрой строительство, строительные материалы и конструкции; e-mail: taa58@yandex.ru; AuthorID: 453902

Бесстрашнов Дмитрий Олегович, ассистент кафедры строительство, строительные материалы и конструкции; e-mail: mr.D-Best@yandex.ru; AuthorID: 1221273



для цитирования: Трещев А. А., Бесстрашнов Д. О. 3-D модель деформирования ортотропной незамкнутой оболочки из материала с несовершенной упругостью // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2025. № 3(65). С. 231–245. DOI: 10.37972/chgpu.2025.65.3.013. EDN: IATUXK

Статья опубликована на условиях лицензии *Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)*.

A. A. Treschev, D. O. Besstrashnov

3-D MODEL OF DEFORMATION OF AN ORTHOTROPIC OPEN SHELL MADE OF A MATERIAL WITH IMPERFECT ELASTICITY

Tula State University, Tula, Russia

Abstract. A 3-D finite element model of deformation of an open circular cylindrical shell, which does not belong to the class of thin or medium-thick structures, is presented. The support is assumed to be of the type of rigid pinching by the formers. The model is free from technical hypotheses used in the calculation of shell structures. Therefore, the mathematical model for determining the stress-strain state of a thick-walled shell is based on a nonlinear three-dimensional approach. The developed model takes into account the structural specifics of structural materials, such as orthotropic composites with varying stiffness parameters when the kind of stress state changes, which can be characterized as induced mechanical heterogeneity of the structure. This fact complicates the specific calculations of structures. In this regard, the volumetric ten-node isoparametric finite elements in the form of a tetrahedron with three degrees of freedom at the node were transformed in the computational model. Correct consideration of the deformation properties of the orthotropic structure of a composite with imperfect elasticity was achieved by using the energy coupling of strain and stress tensors, formulated in the components of the normalized space in the main axes of the orthotropy of the material. To solve the general nonlinear problem, the method of variable elasticity parameters was used. The process of implementing the developed model made it possible to obtain information about all the characteristics of shell deformation in full, the main of which are given and analyzed in this article.

Keywords: structural orthotropy, deformation anisotropy, unrelated problem, cylindrical shell.

Alexander A. Treschev, Doctor of Technical Sciences, Professor; e-mail: taa58@yandex.ru; AuthorID: 453902

Dmitry O. Besstrashnov, Assistant; e-mail: mr.D-Best@yandex.ru; AuthorID: 1221273



to cite this article: Treschev A. A., Besstrashnov D. O. 3-D model of deformation of an orthotropic open shell made of a material with imperfect elasticity // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2025. No 3(65). p. 231–245. DOI: 10.37972/chgpu.2025.65.3.013

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

1. Введение. При развитии современной техники и в строительстве широкое распространение получили композитные материалы, особенностью которых являются структурная ортотропия, осложненная деформационной анизотропией, которая представляется чувствительностью к виду напряженного состояния. Такие материалы широко используются для изготовления элементов толстостенных пространственных конструкций, таких как цилиндрические оболочки различных видов, оболочки положительной гауссовой кривизны, толстые диски, плиты и так далее. Для деформационно-прочностных расчетов подобных объектов требуется разработать математические модели, учитывающие особенности свойств современных материалов, адекватные реальному процессу нагружения и конфигурации сооружений. При этом основой точности расчетных методик должны послужить надежные определяющие соотношения, соответствующие известным экспериментальным данным по деформированию указанных материалов. Такими уравнениями состояния являются потенциальные соотношения, предложенные в работах [1–3]. Там же и в публикациях [4, 5] проанализированы серьезные недостатки предыдущих исследований широко известных авторов, на которых здесь останавливаться не будем.

2. Уравнения связи тензоров деформаций и напряжений для ортотропных композитов, обладающих деформационной неоднородностью. Применив к потенциалу деформаций [2, 3] процедуру дифференцирования Кастильяно, приходим к уравнениям связи тензоров деформаций и напряжений для структурно ортотропных материалов, обладающих деформационной анизотропией:

$$e_{ij} = C_{ijkm}\sigma_{km}, \quad i, j, k, m = 1, 2, 3, \quad (1)$$

где $\alpha_{ij} = \sigma_{ij}/S$; $S = \sqrt{\sigma_{ij}\sigma_{ij}} = \sqrt{\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2 + 2\tau_{12}^2 + 2\tau_{23}^2 + 2\tau_{13}^2}$;

$$\begin{aligned} C_{1111} &= (A_{1111} + B_{1111}\alpha_{11}) + 0, 5[B_{1111}\alpha_{11}(1 - \alpha_{11}^2) - B_{2222}\alpha_{22}^3 - B_{3333}\alpha_{33}^3 - \\ &\quad - B_{1212}\alpha_{12}^3 - B_{2323}\alpha_{23}^3 - B_{1313}\alpha_{13}^3] + B_{1122}\alpha_{22}(1 - \alpha_{11}^2 - \alpha_{11}\alpha_{22}) + \\ &\quad + B_{1133}\alpha_{33}(1 - \alpha_{11}^2 - \alpha_{11}\alpha_{33}) - B_{2233}\alpha_{22}\alpha_{33}(\alpha_{22} + \alpha_{33}); \\ C_{1122} &= A_{1122} + B_{1122}(\alpha_{11} + \alpha_{22}); C_{1133} = A_{1133} + B_{1133}(\alpha_{11} + \alpha_{33}); \\ C_{2222} &= (A_{2222} + B_{2222}\alpha_{22}) + 0, 5[B_{2222}\alpha_{22}(1 - \alpha_{22}^2) - B_{1111}\alpha_{11}^3 - B_{3333}\alpha_{33}^3 - \\ &\quad - B_{1212}\alpha_{12}^3 - B_{2323}\alpha_{23}^3 - B_{1313}\alpha_{13}^3] + B_{1122}\alpha_{11}(1 - \alpha_{22}^2 - \alpha_{11}\alpha_{22}) + \\ &\quad + B_{2233}\alpha_{33}(1 - \alpha_{22}^2 - \alpha_{22}\alpha_{33}) - B_{1133}\alpha_{11}\alpha_{33}(\alpha_{11} + \alpha_{33}); \quad C_{2233} = A_{2233} + B_{2233}(\alpha_{22} + \alpha_{33}); \\ C_{3333} &= (A_{3333} + B_{3333}\alpha_{33}) + 0, 5[B_{3333}\alpha_{33}(1 - \alpha_{33}^2) - B_{1111}\alpha_{11}^3 - B_{2222}\alpha_{22}^3 - B_{1212}\alpha_{12}^3 - \\ &\quad - B_{2323}\alpha_{23}^3 - B_{1313}\alpha_{13}^3] + B_{1133}\alpha_{11}(1 - \alpha_{33}^2 - \alpha_{11}\alpha_{33}) + B_{2233}\alpha_{22}(1 - \alpha_{33}^2 - \alpha_{22}\alpha_{33}) - \\ &\quad - B_{1122}\alpha_{11}\alpha_{22}(\alpha_{11} + \alpha_{22}); \quad C_{1212} = 0, 5\{A_{1212} - (B_{1111}\alpha_{11}^3 + B_{2222}\alpha_{22}^3 + B_{3333}\alpha_{33}^3) - \\ &\quad - 2[B_{1122}\alpha_{11}\alpha_{22}(\alpha_{11} + \alpha_{22}) + B_{2233}\alpha_{22}\alpha_{33}(\alpha_{22} + \alpha_{33}) + B_{1133}\alpha_{11}\alpha_{33}(\alpha_{11} + \alpha_{33})]\}; \\ C_{2323} &= 0, 5\{A_{2323} - (B_{1111}\alpha_{11}^3 + B_{2222}\alpha_{22}^3 + B_{3333}\alpha_{33}^3) - \\ &\quad - 2[B_{1122}\alpha_{11}\alpha_{22}(\alpha_{11} + \alpha_{22}) + B_{2233}\alpha_{22}\alpha_{33}(\alpha_{22} + \alpha_{33}) + B_{1133}\alpha_{11}\alpha_{33}(\alpha_{11} + \alpha_{33})]\}; \\ C_{1313} &= 0, 5\{A_{1313} - (B_{1111}\alpha_{11}^3 + B_{2222}\alpha_{22}^3 + B_{3333}\alpha_{33}^3) - \end{aligned}$$

$-2[B_{1122}\alpha_{11}\alpha_{22}(\alpha_{11} + \alpha_{22}) + B_{2233}\alpha_{22}\alpha_{33}(\alpha_{22} + \alpha_{33}) + B_{1133}\alpha_{11}\alpha_{33}(\alpha_{11} + \alpha_{33})]\};$
 $C_{1212} = C_{2121}; \quad C_{2323} = C_{3232}; \quad C_{1313} = C_{3131}.$ Остальные компоненты тензора податливостей C_{ijij} тождественно равны нулю.

В публикации [3] проведена идентификация сформулированной модели, заключающейся в вычислении параметров, формулирующих в энергетическом представлении. Константы потенциала [3] были вычислены по технически измеренным параметрам при тензометрировании растягиваемых, сжимаемых эталонов материала, вырезанных в направлениях главных осей ортотропии, а также при испытании на сдвиг в соответствующих ортогональных плоскостях. Эти константы представлены следующим образом:

$$\begin{aligned} A_{kkkk} &= (1/E_k^+ + 1/E_k^-)/2; \quad B_{kkkk} = (1/E_k^+ - 1/E_k^-)/2; \\ A_{ijij} &= -(\nu_{ij}^+/E_j^+ + \nu_{ij}^-/E_j^-)/2; \quad B_{ijij} = -(\nu_{ij}^+/E_j^+ - \nu_{ij}^-/E_j^-)/2; \\ A_{ijji} &= 1/G_{ij}; \quad \nu_{ij}^+/E_j^+ = \nu_{ji}^+/E_i^+; \quad \nu_{ij}^-/E_j^- = \nu_{ji}^-/E_i^-; \quad i, j, k = 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (2)$$

где $E_k^\pm, \nu_{ij}^\pm$ – секущие модули деформаций и параметры отношений поперечных деформаций к продольным, полученные из испытаний в направлениях главных осей ортотропии (положительный знак приписан к опытам на растяжение, а отрицательный – на сжатие); G_{ij} – модули сдвига в соответствующих ортогональных плоскостях ортотропии.

Кроме того, там же [3] установлены ограничения на константы потенциала по Друкеру и доказана теорема единственности решений прикладных задач, подтверждающая справедливость фундаментального закона не исчезания энергии [6, 7]. Конкретные жесткостные параметры ортотропных материалов, проявляющих деформационную анизотропию, широко представлены в научно-технических публикациях [1–17].

3. Постановка задачи и ее решение. Учитывая несомненные преимущества уравнений состояния [2, 3], они были включены в процедуру формирования конечно-элементной модели деформационного расчета коротких толсто-стенный незамкнутых цилиндрических оболочек. Для этой цели были применены объемные десятиузловые изопараметрические конечные элементы в форме тетраэдра с тремя степенями свободы в узле. Чтобы получить удовлетворительные результаты при расчете произвольного объемного тела с помощью полученной матрицы жесткости для тетраэдра с четырьмя узловыми точками, требуется достаточно большое количество конечных элементов, так как напряжения и деформации внутри объема элемента постоянны, а следовательно, при переходе от элемента к элементу они будут изменяться скачкообразно и претерпевать разрывы. Более естественно предположить о линейном характере изменения напряжений и деформаций внутри объема тетраэдра, что в свою очередь требует задания функций перемещений по квадратичному закону.

Это последнее обстоятельство влечет за собой необходимость задания дополнительной информации о геометрии тетраэдра. Проще всего для тетраэдра, имеющего четыре узловые точки, ввести в рассмотрение еще шесть узловых

точек, расположенных посередине длины каждого из шести его ребер (рис. 1). В результате получим десять узловых точек, что приведет к увеличению числа степеней свободы элемента до 30. Вид элементов второго порядка представлен на рис. 1.

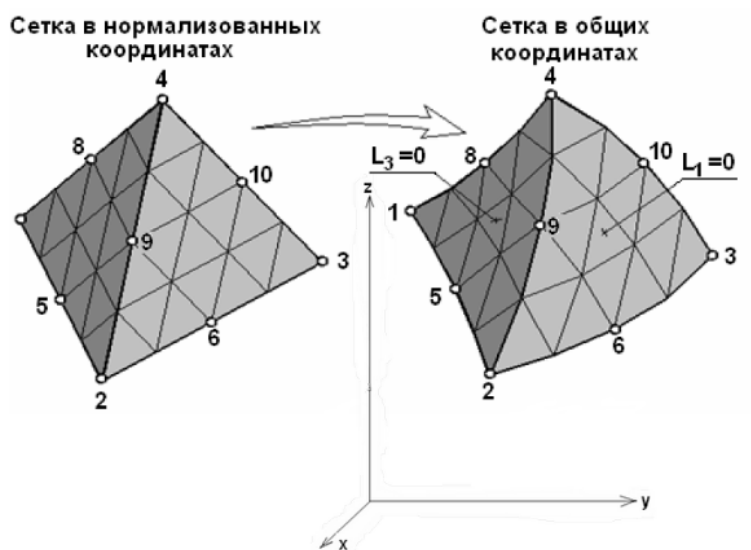


Рис. 1. Конечный элемент в виде тетраэдра второго порядка

Дальнейшую процедуру вычисления матрицы жесткости удобнее производить, используя естественные объемные координаты тетраэдра L_i . Координата L_i соответствует отношению расстояния от точки A внутри тетраэдра до плоскости, противоположной узлу i , к расстоянию от противоположащего узла до той же плоскости, например, $L_1 = n_1/h_2$. Кроме того, L_i может быть интерпретировано как отношение объема подэлемента A_{234} к объему всего элемента V_{1234} , т. е. $L_1 = V_1/V$, или в общем случае:

$$L_i = V_i/V. \quad (3)$$

Связь между декартовыми координатами (x, y, z) и объемными координатами (L_1, L_2, L_3, L_4) записывается так:

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{Bmatrix}. \quad (4)$$

Из первой строки выражения (4) следует, что $L_1 + L_2 + L_3 + L_4 = 1$. Обращая матрицу, входящую в (4), получаем связь объемных координат и декартовых:

$$\begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{6V} \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad (5)$$

где коэффициенты a_i, b_i, c_i – определяются следующими равенствами (6) с круговой перестановкой индексов.

$$\begin{aligned} a_2 &= \det \begin{vmatrix} x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{vmatrix}; & b_2 &= -\det \begin{vmatrix} 1 & y_3 & z_3 \\ 1 & y_4 & z_4 \\ 1 & y_1 & z_1 \end{vmatrix}, \\ c_2 &= -\det \begin{vmatrix} x_3 & 1 & z_3 \\ x_4 & 1 & z_4 \\ x_1 & 1 & z_1 \end{vmatrix}; & d_2 &= -\det \begin{vmatrix} x_3 & y_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (6)$$

Основным преимуществом объемных координат является простота и удобство вычисления интегралов по объему тетраэдра. Перемещения представимы в виде:

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= \frac{1}{6V} \{ (a_1 + b_1x + c_1y + d_1z)u_1 + (a_2 + b_2x + c_2y + d_2z)u_2 + \\ &+ (a_3 + b_3x + c_3y + d_3z)u_3 + (a_4 + b_4x + c_4y + d_4z)u_4 \}. \end{aligned}$$

С помощью объемных координат L_i записывается связь между $\{U\}$ и $\{q\}$:

$$\{U\} = [C] \{q\}, \quad (7)$$

где

$$[A] = [\{\Phi\}^T \{\Phi\}^T \{\Phi\}^T], \quad \{\Phi\} = \{L_1 L_2 L_3 L_4\} \quad (8)$$

Выражение для компоненты перемещения $u(x, y, z)$ тетраэдра с десятью узловыми точками можно принять в виде:

$$u = \alpha_1 + \alpha_2x + \alpha_3y + \alpha_4z + \alpha_5xy + \alpha_6xz + \alpha_7yz + \alpha_8x^2 + \alpha_9y^2 + \alpha_{10}z^2. \quad (9)$$

Выражения для v и w могут быть выписаны по аналогии с полиномом (9).

Тридцать произвольных параметров в зависимостях для u, v, w могут быть выражены через соответствующие компоненты перемещений узловых точек аналогично (7):

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \frac{1}{6V} \begin{bmatrix} \{\psi\}^T & 0 & 0 \\ 0 & \{\psi\}^T & 0 \\ 0 & 0 & \{\psi\}^T \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \{u_{yz}\} \\ \{v_{yz}\} \\ \{w_{yz}\} \end{pmatrix}, \quad (10)$$

где векторы $\{\psi\}$ и $\{u_{yz}\}$ размерами 1×10 таковы:

$$\begin{aligned} \{\psi\} &= \{L_1, L_2, L_3, L_4, 4L_1L_4, 4L_2L_4, 4L_3L_4, 4L_1L_2, 4L_2L_3, 4L_3L_1\}, \\ \{u_{yz}\} &= \{u_1u_2u_3u_4u_5u_6u_7u_8u_9u_{10}\}. \end{aligned}$$

Аналогично запишутся векторы $\{u_{yz}\}$ и $\{w_{yz}\}$.

Вектор деформаций $\{\varepsilon\}$ через обобщенные узловые координаты 10 точек выражается так:

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [d] & 0 & 0 \\ 0 & [e] & 0 \\ 0 & 0 & [f] \\ [e] & [d] & 0 \\ 0 & [f] & [e] \\ [f] & 0 & [d] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{yz} \\ v_{yz} \\ w_{yz} \end{Bmatrix} \quad (11)$$

Здесь:

$$[d] = \left[\frac{\partial \psi}{\partial x} \right] = \frac{1}{6V} [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, 4(L_1\alpha_4 + L_4\alpha_1), 4(L_2\alpha_4 + L_4\alpha_2), 4(L_3\alpha_4 + L_4\alpha_3), 4(L_1\alpha_2 + L_2\alpha_1), 4(L_2\alpha_3 + L_3\alpha_2), 4(L_3\alpha_1 + L_1\alpha_3)]. \quad (12)$$

Векторы $[e]$ и $[f]$ записываются аналогично (12) с заменой α_i соответственно на b_i и c_i .

Так как все компоненты деформаций изменяются линейно внутри объема тетраэдра, целесообразно выразить их путем линейной интерполяции через функции от узловых деформаций, которые могут быть вычислены через координаты четырех основных узлов тетраэдра с помощью выражения (11). Так, например, узловые деформации $\{\varepsilon_x\}_{yz}$ из первой строки выражения (11) запишутся в форме:

$$\{\varepsilon_x\}_{yz} = [N] \{u_{yz}\}, \quad (13)$$

где $\{\varepsilon_x\}_{yz} = \{\varepsilon_{x_1}\varepsilon_{x_2}\varepsilon_{x_3}\varepsilon_{x_4}\}$ -линейные деформации по оси x в четырех основных узловых точках.

Матрица $[N]$ вычисляется путем последовательной подстановки в (12) координат этих узлов:

$$[N] = \frac{1}{6V} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & 4a_4 & 0 & 0 & 4a_2 & 0 & 4a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & 0 & 4a_4 & 0 & 4a_1 & 4a_3 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & 0 & 0 & 4a_4 & 0 & 4a_2 & 4a_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & 4a_1 & 4a_2 & 4a_3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (14)$$

С помощью зависимостей (13) и (14) можно выразить узловые деформации через узловые перемещения:

$$\{\varepsilon\}_{yz} = \begin{Bmatrix} \{\varepsilon_x\}_{yz} \\ \{\varepsilon_y\}_{yz} \\ \{\varepsilon_z\}_{yz} \\ \{\gamma_{xy}\}_{yz} \\ \{\gamma_{yz}\}_{yz} \\ \{\gamma_{xz}\}_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [N] & 0 & 0 \\ 0 & [M] & 0 \\ 0 & 0 & [L] \\ [M] & [N] & 0 \\ 0 & [L] & [M] \\ [L] & 0 & [N] \end{bmatrix}, \quad (15)$$

где матрицы $[M]$ и $[L]$ вычисляются аналогично матрице $[N]$ путем последовательной подстановки в $[e]$ и $[f]$ координат основных четырех узлов, а $[0]$ есть нулевая матрица размером (4×10) .

Выражение (15) перепишем в матричной форме:

$$\{\varepsilon\}_{yz} = [S] \{q\}, \quad (16)$$

вид матрицы $[S]$ порядка (24×30) и вектора $\{q\}$ порядка (30×1) ясен из выражения (15).

Используя теперь линейную интерполяцию (7), примененную нами выше при аппроксимации перемещений $\{U\}$ через узловые перемещения $\{q\}$, для аппроксимации деформаций $\{\varepsilon\}$ через узловые деформации $\{\varepsilon_{yz}\}$ можем записать:

$$\{\varepsilon\} = [\Phi_\varepsilon] \{\varepsilon\}_{yz}, \quad (17)$$

где

$$[\Phi_\varepsilon] = \begin{bmatrix} \{\Phi\}^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \{\Phi\}^T & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \{\Phi\}^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \{\Phi\}^T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \{\Phi\}^T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \{\Phi\}^T \end{bmatrix}, \quad (18)$$

а $\{\Phi\}$ определяется согласно (8).

Подставляя $\{\varepsilon\}_{yz}$ из выражения (16) в (17), получаем:

$$\{\varepsilon\} = [\Phi_\varepsilon] [S] \{q\} \quad (19)$$

Матрица связи между напряжениями и деформациями с учетом выражений (1), (2):

$$[E_\varepsilon] = [C_{ijk}]^{-1} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ C_{2211} & C_{2222} & C_{2233} & 0 & 0 & 0 \\ C_{3311} & C_{3322} & C_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{1212} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{1313} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{2323} \end{bmatrix}^{-1}, \quad (20)$$

и принимая во внимание (19), запишем окончательную матрицу жесткости порядка (30×30) для тетраэдра с 10-ю узловыми точками:

$$[K] = \int_V [S]^T [\Phi_\varepsilon]^T [E_\varepsilon] [\Phi_\varepsilon] [S] dV. \quad (21)$$

Так как матрица $[S]$ не зависит от параметров интегрирования, то её можно вынести за знак интеграла:

$$[K] = [S]^T \left(\int_V [\Phi_\varepsilon]^T [E_\varepsilon] [\Phi_\varepsilon] dV \right) [S]. \quad (22)$$

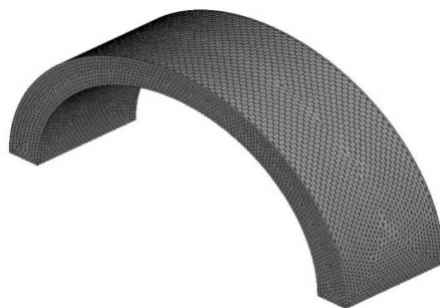


Рис. 3. Схема разбивки оболочки на КЭ

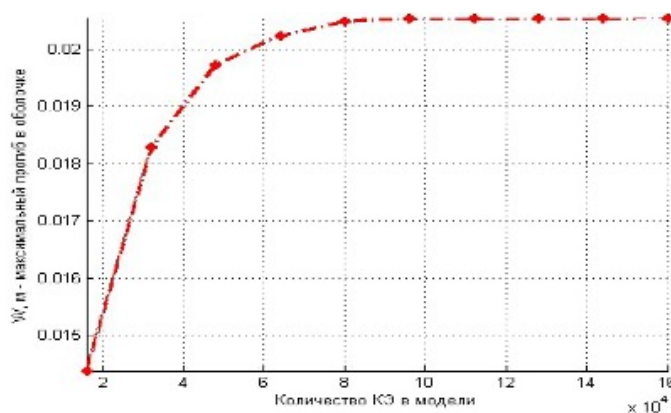


Рис. 4. Сходимость КЭ модели

характеристики которого заимствованы из работы [10–14]. Как результат проведенных расчетов была получена полная информация о распределении параметров НДС оболочки. Здесь приведем лишь отдельные характерные картины распределения этих параметров, которые представлены на рис. 5 – 10.

4. Результаты решения краевой задачи и их анализ. Анализируя представленные на рис. 5–10 результаты следует отметить, что классический подход к расчету коротких ортотропных цилиндрических оболочек не учитывающий деформационную анизотропию графитокompозита ATJ-S может привести к погрешностям в напряжениях от 58% до 78%. Аналогичные погрешности, возникающие при определении перемещений поверхностей оболочки, достигают 35%. Результаты расчета оболочки по моделям R.M.Jones – D.A.R.Nelson

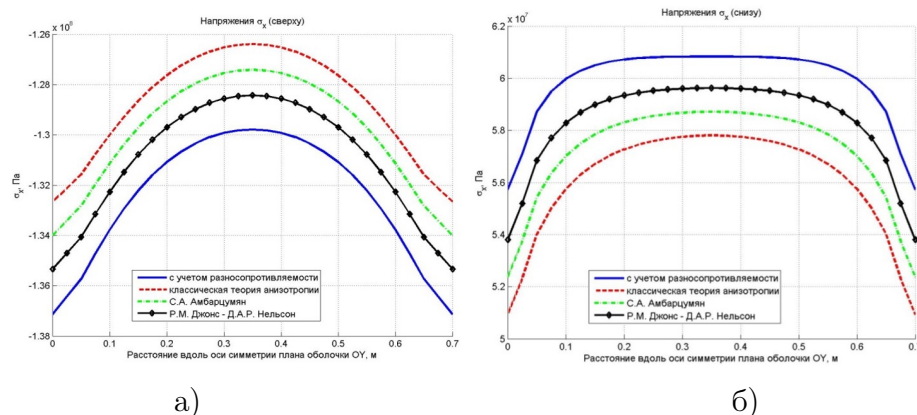


Рис. 5. Распределение нормальных напряжений σ_x вдоль линии А-Б, Па: в верхних волокнах (а); в нижних волокнах (б)

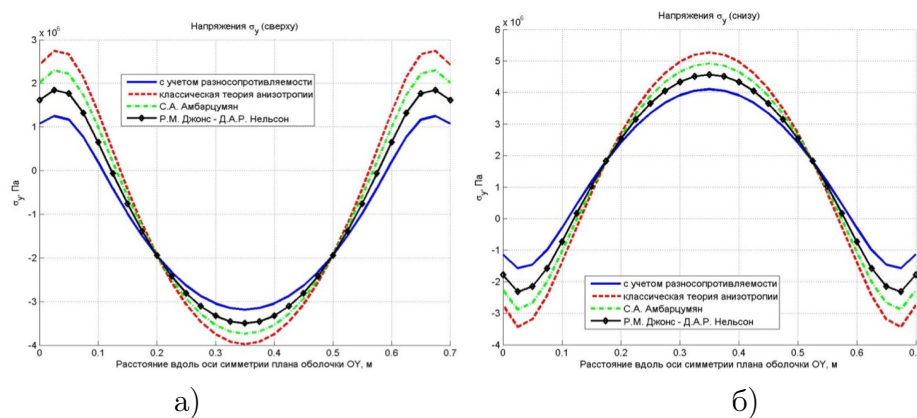


Рис. 6. Распределение нормальных напряжений σ_y вдоль линии А-Б, Па: в верхних волокнах (а); в нижних волокнах (б)

[10, 11, 13, 14] и С.А.Амбарцумяна [18] отличаются от данных классической теории на меньшие величины до 16–36% и до 18%. Это можно объяснить не корректным учетом влияния сложного напряженного состояния на параметры тензора податливостей, который заложен в моделях [10, 11, 13, 14] и [18] по сравнению с подходом, основанным на нормированном тензорном пространстве напряжений [1–5].

5. Выводы. В заключении отметим, что при проектировании оболочечных конструкций, имеющих цилиндрическое очертание и выполненных из композитных материалов, необходимо более тщательно учитывать их специфические механические свойства, а также уделять особое внимание выбору расчетных моделей и определяющих соотношений.

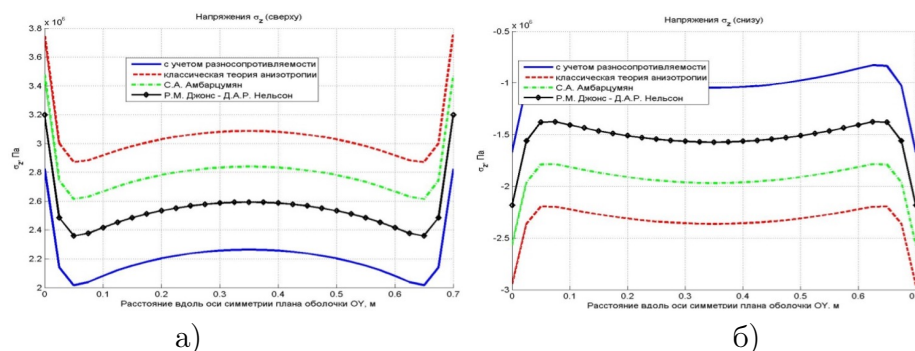


Рис. 7. Распределение нормальных напряжений σ_z вдоль линии А-В, Па: в верхних волокнах (а); в нижних волокнах (б)

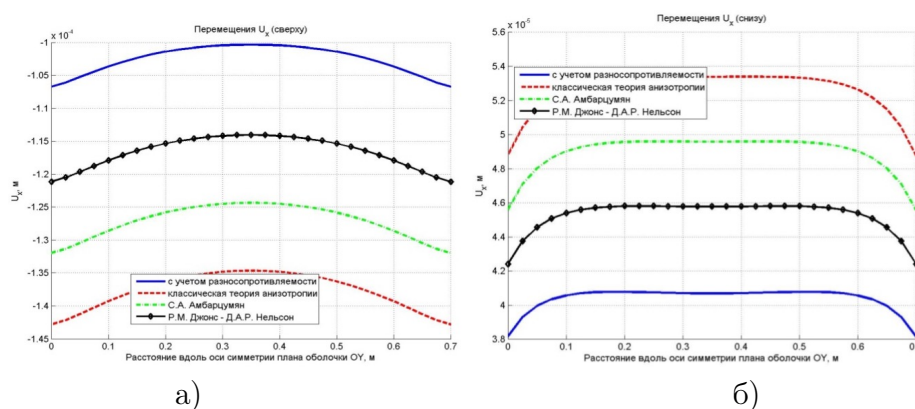


Рис. 8. Распределение перемещений U_x вдоль линии А-В, м: в верхних волокнах (а); в нижних волокнах (б)

ДОПОЛНИТЕЛЬНО

Вклад авторов. Все авторы внесли существенный вклад в разработку концепции, проведение исследования и подготовку статьи, прочли и одобрили финальную версию перед публикацией.

Конфликт интересов. Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

Источник финансирования. Авторы заявляют об отсутствии внешнего финансирования при проведении исследования.

ADDITIONAL INFORMATION

Authors' contribution. All authors have made a significant contribution to the development of the concept, research and preparation of the article, read and approved the final version before publication.

Competing interests. The authors declare that they have no competing interests.

Funding. This study was not supported by any external sources of funding.

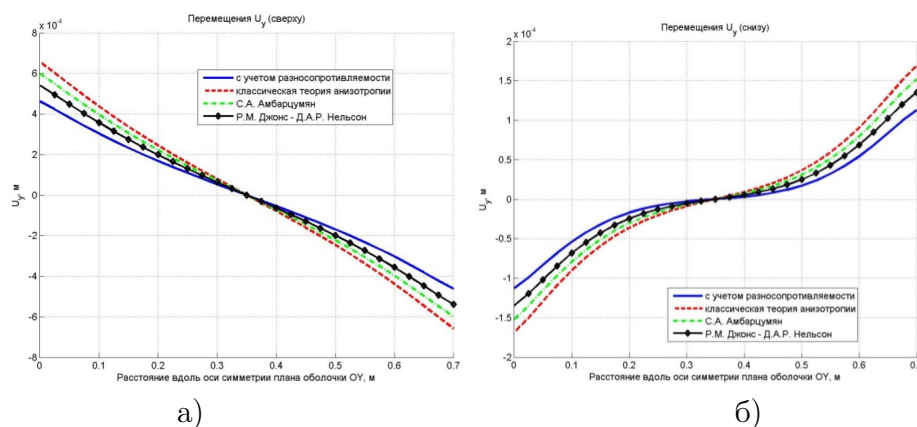


Рис. 9. Распределение перемещений U_Y вдоль линии А-Б, м: в верхних волокнах (а); в нижних волокнах (б)

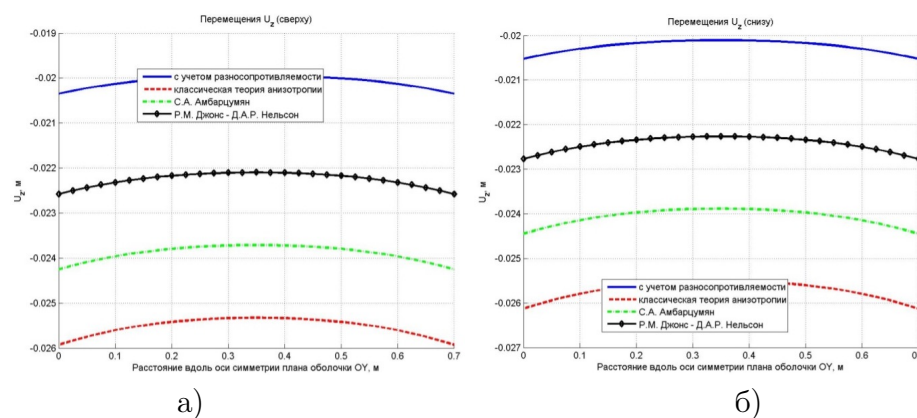


Рис. 10. Распределение перемещений U_Z вдоль линии А-Б, м: в верхних волокнах (а); в нижних волокнах (б)

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Трещев А.А. Потенциальная зависимость между деформациями и напряжениями для ортотропных физически нелинейных материалов // *Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии*. 2017. № 4-1 (324). С. 71–74.
- [2] Трещев А.А., Завьялова Ю.А., Лапшина М.А. Вариант модели деформирования ортотропных композитных материалов // *Эксперт: Теория и практика*. 2020. № 3(6). С. 62–68.
- [3] Defining equations of deformation of materials with double anisotropy / A.A. Treschev [et al.] // *Chebyshevskii sbornik*. 2021. Vol. 22, no. 4. P. 369–383.
- [4] Трещев А.А. Теория деформирования и прочности материалов с изначальной и наведенной чувствительностью к виду напряженного состояния. Определяющие соотношения: монография. М.; Тула : РААСН; ТулГУ, 2016.
- [5] Трещев А.А. Теория деформирования и прочности разнотропных материалов: учебник. Тула : ТулГУ, 2020.

- [6] Каудерер Г. Нелинейная механика. Москва : Изд-во иностр. лит., 1961.
- [7] Турсунов Б.С. О свойствах потенциала напряжений упругих тел // ПММ. 1970. Т. 34, № 1. С. 15–22.
- [8] Schmueser D.W. Nonlinear Stress-Strain and Strength Response of Axisymmetric Bimodulus Composite Material Shells // AIAA Journal. 1983. Vol. 21, no. 12. P. 1742–1747.
- [9] Reddy L.N., Bert C.W. On the Behavior of Plates Laminated of Bimodulus Composite Materials // ZAMM. 1982. Vol. 62, no. 6. P. 213–219.
- [10] Jones R.M. A Nonsymmetric Compliance Matrix Approach to Nonlinear MultimodulusOrthotropic Materials // AIAA Journal. 1977. Vol. 15, no. 10. P. 1436–1443.
- [11] Jones R.M. Modeling Nonlinear Deformation of Carbon-Carbon Composite Material // AIAA Journal. 1980. Vol. 18, no. 8. P. 995–1001.
- [12] Розе А.В., Жигун И.Г., Душин М.Н. Трехармированные тканые материалы // Механика полимеров. 1970. № 3. С. 471–476.
- [13] Jones R.M., Nelson D.A.R. Theoretical-experimental correlation of material models for non-linear deformation of graphite // AIAA Journal. 1976. Vol. 14, no. 10. P. 1427–1435.
- [14] Jones R.M. Stress-Strain Relations for Materials with Different Moduli in Tension and Compression // AIAA Journal. 1977. Vol. 15, no. 1. P. 16–25.
- [15] Золочевский А.А., Кузнецов В.Н. Расчет анизотропных оболочек из разномодульных материалов при неосесимметричном нагружении // Динамика и прочность тяжелых машин. 1989. С. 84–92.
- [16] Трещев А.А., Теличко В.Г. Теория деформирования пространственных железобетонных конструкций: монография. М.; Тула : РААСН; ТулГУ, 2019.
- [17] Конечно-элементная модель расчета пространственных конструкций из материалов с усложненными свойствами / А.А. Трещев [и др.] // Известия ТулГУ. Технические науки. 2012. № 10. С. 106–114.
- [18] Амбарцумян С.А. Основные уравнения и соотношения разномодульной теории упругости анизотропного тела // Изв. АН СССР. МТТ. 1969. № 3. С. 51–61.

REFERENCES

- [1] Treshchev A.A. Potential dependence between deformations and stresses for orthotropic physically nonlinear materials // Fundamental and applied problems of engineering and technology. 2017. no. 4-1 (324). P. 71–74.
- [2] Treshchev A.A., Zavyalova Yu.A., Lapshina M.A. Variant of the deformation model of orthotropic composite materials // Expert: Theory and Practice. 2020. no. 3(6). P. 62–68.
- [3] Defining equations of deformation of materials with double anisotropy / A.A. Treshchev [et al.] // Chebyshevskii sbornik. 2021. Vol. 22, no. 4. P. 369–383.
- [4] Treshchev A.A. Theory of deformation and strength of materials with initial and induced sensitivity to the type of stress state. Defining relationships. Moscow; Tula : RAASN; TulSU, 2016.
- [5] Treshchev A.A. Theory of deformation and strength of highly resistant materials. Tula : TulSU, 2020.
- [6] Kauderer G. Nonlinear mechanics. Moscow : Publishing House of Foreign Literature, 1961.
- [7] Tursunov B.S. On the properties of the stress potential of elastic bodies // PMM. 1970. Vol. 34, no. 1. P. 15–22.
- [8] Schmueser D.W. Nonlinear Stress-Strain and Strength Response of Axisymmetric Bimodulus Composite Material Shells // AIAA Journal. 1983. Vol. 21, no. 12. P. 1742–1747.
- [9] Reddy L.N., Bert C.W. On the Behavior of Plates Laminated of Bimodulus Composite Materials // ZAMM. 1982. Vol. 62, no. 6. P. 213–219.
- [10] Jones R.M. A Nonsymmetric Compliance Matrix Approach to Nonlinear MultimodulusOrthotropic Materials // AIAA Journal. 1977. Vol. 15, no. 10. P. 1436–1443.

-
- [11] Jones R.M. Modeling Nonlinear Deformation of Carbon-Carbon Composite Material // AIAA Journal. 1980. Vol. 18, no. 8. P. 995–1001.
 - [12] Rose A.V., Zhigun I.G., Dushin M.N. Three-reinforced woven materials // Mechanics of polymers. 1970. no. 3. P. 471–476.
 - [13] Jones R.M., Nelson D.A.R. Theoretical-experimental correlation of material models for non-linear deformation of graphite // AIAA Journal. 1976. Vol. 14, no. 10. P. 1427–1435.
 - [14] Jones R.M. Stress-Strain Relations for Materials with Different Moduli in Tension and Compression // AIAA Journal. 1977. Vol. 15, no. 1. P. 16–25.
 - [15] Zolochovsky A.A., Kuznetsov V.N. Calculation of anisotropic shells from multi-modular materials under non-axisymmetric loading // Dynamics and strength of heavy machines. 1989. P. 84–92.
 - [16] Treshchev A.A., Telichko V.G. Theory of deformation of spatial reinforced concrete structures. Moscow; Tula : RAASN; TulSU, 2019.
 - [17] A finite element model for calculating spatial structures made of materials with complicated properties / A.A. Treshchev [et al.] // Izvestiya TulSU. Technical sciences. 2012. no. 10. P. 106–114.
 - [18] Ambartsumyan S.A. Basic equations and relations of the multi-module theory of elasticity of an anisotropic body // Izvestiya AN SSSR. MTT. 1969. no. 3. P. 51–61.