

С. Г. Саиян, М. В. Шитикова

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЭФФЕКТИВНЫХ ОРТОТРОПНЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ТРЕХМЕРНЫХ СОТОВЫХ АУКСЕТИЧЕСКИХ МЕТАМАТЕРИАЛОВ С ВОГНУТОЙ СТРУКТУРОЙ НА ОСНОВЕ БАЛОЧНОЙ ТЕОРИИ

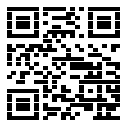
Национальный исследовательский Московский государственный строительный
университет, Москва, Россия

Аннотация. В работе предложен аналитический подход к определению эффективных ортотропных механических характеристик трехмерных сотовых ауксетических метаматериалов с вогнутой стержневой архитектурой. Элементарная ячейка рассматривается как периодическая балочная решетка с симметричной топологией, допускающей переход к эквивалентной ортотропной сплошной среде. Стержневая система моделируется на основе балочной теории с учетом больших перемещений (геометрической нелинейности) и сдвиговых деформаций (теория Тимошенко). Получены замкнутые выражения локальных перемещений, после чего сформулированы геометрические соотношения гомогенизации, связывающие локальные перемещения с усредненными деформациями ауксетической ячейки. Выведены нелинейные (с учетом больших перемещений) и приближенные (малые перемещения) зависимости для эффективных модулей упругости $E_x=E_y$, E_z и коэффициентов Пуассона ν_{zx} , ν_{yz} и ν_{xy} как функции геометрических параметров длины L , высоты H , угла вогнутости θ и толщины элемента t . Проведено параметрическое исследование влияния θ и отношения H/L , показывающее, что увеличение угла θ приводит к снижению значений E_z , $|\nu_{zx}|$ и к увеличению величин E_y , $|\nu_{yz}|$. При увеличении масштабного фактора H/L увеличиваются E_z , $|\nu_{zx}|$ и уменьшаются E_y , $|\nu_{yz}|$. Отмечено, что вклад геометрической нелинейности более существенен для коэффициентов Пуассона, чем для модулей упругости. Полученные зависимости позволяют подбирать геометрию ячейки под требуемые ортотропные константы и использовать их в расчетах конструкций без явного моделирования ауксетической решетки.

Ключевые слова: ауксетические метаматериалы, трехмерная сотовая решетка, вогнутая структура, гомогенизация, ортотропия, балка Тимошенко, геометрическая нелинейность, механические характеристики

Саиян Сергей Гургенович, кандидат технических наук, научный сотрудник НОЦ КМ им. А.Б. Золотова; e-mail: Berformert@gmail.com; <https://orcid.org/0000-0003-0694-4865>; AuthorID: 987238

Шитикова Марина Вячеславовна, доктор физико-математических наук, профессор, заведующая кафедрой высшей математики; e-mail: marinavshitikova@gmail.com; <https://orcid.org/0000-0003-2186-1881>; AuthorID: 4259



для цитирования: Саиян С. Г., Шитикова М. В. Определение эффективных ортотропных механических характеристик трехмерных сотовых ауксетических метаматериалов с вогнутой структурой на основе балочной теории // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2026. № 1(67). С. 26–54. DOI: 10.37972/chgpu.2026.67.1.002. EDN: CKVDT0

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0).

S. G. Saiyan, M. V. Shitikova

DETERMINATION OF EFFECTIVE ORTHOTROPIC MECHANICAL PROPERTIES OF THREE-DIMENSIONAL CELLULAR AUXETIC METAMATERIALS WITH A RE-ENTRANT STRUCTURE BASED ON BEAM THEORY

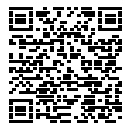
Moscow State University of Civil Engineering (National Research University), Russia

Abstract. Paper proposes an analytical approach for determining the effective orthotropic mechanical properties of three-dimensional cellular auxetic metamaterials with a re-entrant strut architecture. The unit cell is treated as a periodic beam lattice with a symmetric topology, resulting in its replacement by an equivalent orthotropic continuum. The strut system is modeled using beam theory with due account for large displacements (geometric nonlinearity) and shear deformations (Timoshenko theory). Expressions for local displacements have been obtained in a closed form, with further formulation of kinematic relationships of homogenization, allowing one to link the local displacements with the averaged strains of the auxetic cell. Exact (including large displacements) and approximate (small displacement) relationships have been derived for the effective Young's moduli $E_x=E_y$, E_z , and Poisson's ratios ν_{zx} , ν_{yz} , ν_{xy} as functions of such geometric parameters as the length L , height H , re-entrant angle θ , and element thickness t , as well as of the linear elastic material properties E and G . A parametric study of the effects of θ and the ratio H/L shows that the increase in θ reduces the magnitudes of E_z and $|\nu_{zx}|$, and increases the magnitudes of E_y and $|\nu_{yz}|$. The increase in the scale factor H/L results in the increase in E_z and $|\nu_{zx}|$ and in the decrease in E_y and $|\nu_{yz}|$. It is noted that the contribution of geometric nonlinearity is more significant for Poisson's ratios than for Young's modulus. The obtained relationships enable one to select the unit cell geometry in order to achieve the required orthotropic constants, and to adopt them in structural analyses without modeling the auxetic lattice explicitly.

Keywords: auxetic metamaterials, three-dimensional cellular lattice, re-entrant structure, homogenization, orthotropy, Timoshenko beam, geometric nonlinearity, mechanical properties

Sergey G. Saiyan, Candidate of Technical Sciences, Researcher at education-and-research Center of computer modelling named after A.B. Zolotov; e-mail: Berformert@gmail.com; <https://orcid.org/0000-0003-0694-4865>; AuthorID: 987238

Marina V. Shitikova, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Head of the Department of Higher Mathematics; e-mail: marinavshitikova@gmail.com; <https://orcid.org/0000-0003-2186-1881>; AuthorID: 4259



to cite this article: Saiyan S. G., Shitikova M. V. Determination of Effective Orthotropic Mechanical Properties of Three-Dimensional Cellular Auxetic Metamaterials with a Re-Entrant Structure Based on Beam Theory // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2026. No 1(67). p. 26–54. DOI: 10.37972/chgpu.2026.67.1.002

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение. Ауксетические метаматериалы – класс искусственно сформированных структур (функциональные материалы), для которых характерен отрицательный коэффициент Пуассона, выражающийся в том, что при растяжении в одном направлении они могут расширяться в поперечном, а при сжатии, наоборот, сжиматься [1]. Такое поведение не противоречит классической теории упругости, поскольку определяется не материалом как таковым, а геометрией и кинематикой элементарной ячейки [1–7]. Наиболее технологически и инженерно востребованными являются решетчатые (сотовые) ауксетические метаструктуры, где требуемый эффект достигается за счет поворотов узлов и работы стержневых элементов в условиях изгиба и сдвига [1, 8, 9]. К числу наиболее практичных геометрий относится вогнутая структура, в которой наклонные элементы образуют вогнутые углы и обеспечивают выраженную поперечную деформацию при осевом нагружении [1, 10, 11].

Интерес к трехмерным ауксетическим решеткам обусловлен тем, что сочетание отрицательных коэффициентов Пуассона с пространственной топологией дает набор свойств, которые можно использовать в инженерной практике [12]: повышенную деформативность ауксетика, способность к значительным формоизменениям без локального разрушения, эффективное поглощение энергии и управляемую анизотропию. Однако проектирование и расчет таких структур усложняются тем, что их поведение определяется одновременно параметрами исходного материала, из которого изготовлен ауксетик, а также геометрией ячейки, причем вклад геометрии зачастую доминирует и приводит к сильной нелинейности кинематики ауксетической решетки даже при умеренных уровнях напряжений.

1. Виды ауксетических метаматериальных структур. Ауксетический эффект (отрицательный коэффициент Пуассона) может реализовываться в широком спектре метаматериальных архитектур [3, 4]. Особенностью является то, что поперечная деформация определяется преимущественно геометрией и кинематикой элементарной ячейки, а не физико-механическими характеристиками исходного материала. Поэтому в механике ауксетики целесообразно классифицировать не по видам материала, а по конструктивному механизму, который обеспечивает отрицательную поперечную деформацию. Среди наиболее распространенных ауксетических структур можно выделить следующие (рис. 1):

1. Сотовые и решетчатые структуры (рис. 1а), в которых наклонные элементы образуют вогнутые углы [10, 12]. При осевом растяжении такие ячейки раскрываются за счет поворота узлов и изгиба или сдвига наклонных стержней, что приводит к расширению в поперечном направлении. Подобные архитектуры реализуются как в двухмерном (вогнутые соты), так и в трехмерном (пространственные решетки, сформированные периодическим повторением ячейки) виде. Для данного класса характерна выраженная управляемость коэффициентов Пуассона геометрическими параметрами (например, углом наклона) и

возможность получения сильной анизотропии свойств. Именно к этому классу относится рассматриваемая далее в настоящей работе трехмерная сотовая конструкция с вогнутой структурой.

2. Киральные и антикиральные решетки (рис. 1b), в которых ауксетические свойства возникают вследствие вращения узловых колец/ядер (цилиндрические или кольцевые элементы), соединенных тонкими связями [1, 8, 10, 13, 14]. Под нагрузкой узлы поворачиваются, а связи деформируются, обеспечивая отрицательную поперечную деформацию. Антикиральные варианты часто дают более симметричный (квазиизотропный в плоскости) отклик. Такие структуры интересны тем, что ауксетический эффект формируется, главным образом, механизмами вращения, однако для корректного расчета существенны особенности узлов и податливость соединений.

3. Структуры на основе вращающихся жестких элементов (рис. 1c), которые составлены из жестких фигур (квадратов, прямоугольников, треугольников и т.п.), соединенных шарнирно или тонкими перемычками [15–17]. Отрицательный коэффициент Пуассона обеспечивается кинематикой поворота элементов относительно друг друга. Такие архитектуры способны демонстрировать очень сильные свойства ауксетика (вплоть до предельных значений при идеализированных шарнирах), но их реальное поведение чувствительно к форме и жесткости связей между элементами, а также к концентрациям напряжений в местах соединений.

4. Перфорированные ауксетические структуры из листового материала (рис. 1d), которые создают из сплошных листов путем нанесения периодического рисунка отверстий и прорезей [18, 19]. В таких системах отрицательная поперечная деформация также часто связана с механизмом вращения сегментов или раскрытием элементов.

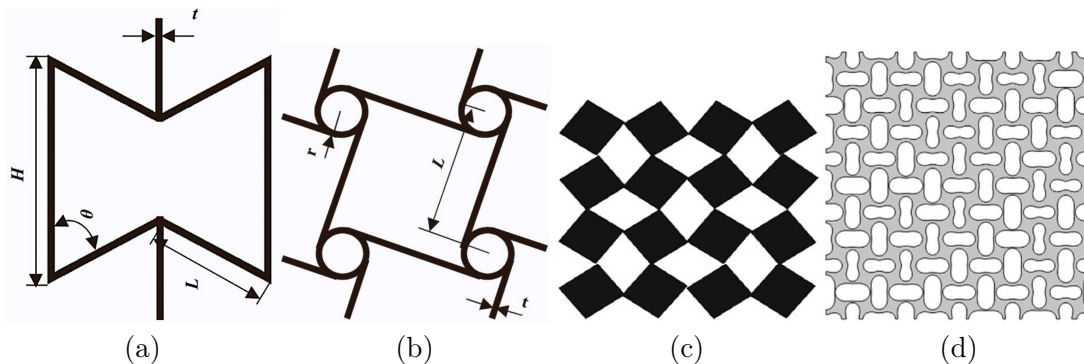


Рис. 1. Ауксетические метаматериальные структуры: (a) – сотовая структура с вогнутыми элементами [10], (b) – киральная решетка [10], (c) – вращающиеся жесткие квадратные диски [18], (d) – перфорированная структура с овальными вырезами [19].

С практической позиции важны два признака: топология (периодическая решетка/соты, листовая перфорация и т.д.) и доминирующий механизм деформации (поворот узлов/элементов, изгиб или сдвиг стержней и т.д.). Для целей гомогенизации и получения эффективных анизотропных характеристик наиболее удобны периодические стержневые архитектуры, поскольку их поведение допускает строгую связь между геометрией ячейки и средними деформациями всей системы.

2. Методы определения эффективных характеристик решетчатых метаматериалов. Для использования ауксетических метаструктур в расчете строительных конструкций (в том числе в таких конечно-элементных пакетах, как ANSYS Mechanical APDL, SIMULIA Abaqus и т.д.) необходимы эффективные (гомогенизированные) механические характеристики. Такой подход позволяет заменить моделирование каждой ауксетической ячейки (что является достаточно трудоемким как при построении подобной структуры, так и по вычислительным затратам) на эквивалентную непрерывную среду с набором констант, описывающих данную среду. Это существенно снижает вычислительные затраты и позволяет выполнять параметрические исследования, оптимизацию характеристик и верификацию результатов расчета на уровне конструкции. При этом важно, чтобы эффективные константы среды были получены из модели, адекватно отражающей физику деформирования ауксетического метаматериала.

Существующие подходы к определению эффективных характеристик решетчатых метаматериалов можно условно разделить на следующие:

1. Методы на основе репрезентативного объемного элемента (representative elementary volume (REV)) [20–22], в основе которого используется условие Хилла-Манделя, при котором усредненная виртуальная работа на микроуровне равна виртуальной работе на макроуровне (выполняется энергетическое согласование). Для этого используют кинематические, статические или периодические граничные условия.

2. Гомогенизация на основе методов численного моделирования в программных комплексах (например, конечно-элементное моделирование в ANSYS Mechanical APDL или SIMULIA Abaqus и т.д.) [23–25]. В данном подходе выполняется моделирование либо отдельных ауксетических элементов с целью определения податливости системы на единичное воздействие, либо целой конструкции.

3. Кинематические (так называемые "механизмные" модели) и аналитические модели ячейки, в которых описывается упрощенная механика отдельных ячеек (в составе конструкции), например, шарнирные повороты, изгиб, растяжение, сдвиг элементов, геометрические соотношения между углами и макродеформацией [5, 26–29]. Такие модели особенно популярны для метаматериалов, состоящих из стержневых элементов, а также для вращающихся элементов.

4. Методы, использующие обобщенные непрерывные среды (например, среду Коссера, градиентную или микро-дилатационную теорию упругости), которые

применяются для случаев, когда размер рассматриваемого элемента конструкции сопоставим с характерным размером ячеек метаматериала [26].

5. Экспериментальные методы [15, 27–29], позволяющие определять характеристики на основе серии экспериментов (сжатия, растяжения, изгиба, удара и т.д.).

Настоящая работа посвящена аналитическому методу определения эффективных ортотропных механических характеристик трехмерных сотовых ауксетических метаматериалов с вогнутой структурой на основе балочной теории. Цель работы – получить точные и приближенные (с применением гипотезы малых деформаций) аналитические выражения для эффективных ортотропных констант метаструктуры, которые можно применять для инженерных расчетов, а также для исследования влияния геометрических характеристик ауксетических ячеек на эффективные механические характеристики ортотропной среды. Практическая значимость полученных результатов заключается в возможности подбора геометрических параметров ауксетического метаматериала под требуемые ортотропные механические характеристики среды.

3. Описание ауксетической метаструктуры. Рассматривается пространственная (трехмерная) сотовая структура (метаматериал) с вогнутыми элементами, обладающая ауксетическим эффектом. При осевом растяжении или сжатии в одном направлении поперечные деформации имеют тот же знак, что соответствует отрицательным коэффициентам Пуассона в определенных направлениях. Метаматериал формируется как периодическая решетка из элементарных ауксетических ячеек, многократно повторяемых вдоль осей декартовой системы X , Y , Z (рис. 2 а, б). Геометрическое построение ауксетических решеток выполнялось на основе параметризации в ANSYS SpaceClaim.

Геометрически метаструктура является балочной решеткой, поскольку она состоит из прямолинейных стержней постоянного поперечного сечения, соединенных в узлах. Вогнутость обеспечивается наличием наклонных стержней, образующих с вертикальными стойками вогнутые углы, благодаря чему при нагружении возможны значимые повороты узлов и развитие деформаций изгиба/сдвига в наклонных элементах, что и определяет ауксетическое поведение подобной конструктивной системы материала.

Конструкция обладает центральной симметрией относительно центра ячейки. В частности, для рассматриваемой ячейки направления X и Y являются эквивалентными (симметрия в плоскости XY), что далее отражается в симметрии эффективных механических характеристик.

Оси X , Y , Z выбираются совпадающими с главными направлениями периодичности решетки. Это согласуется с последующей интерпретацией структуры как эквивалентной ортотропной среды, для которой оси ортотропии принимаются совпадающими с глобальной декартовой системой координат.

В качестве основных геометрических параметров рассматриваемой ауксетической ячейки вводятся (рис. 2с):

L – длина наклонного (вогнутого) стержня AC ;

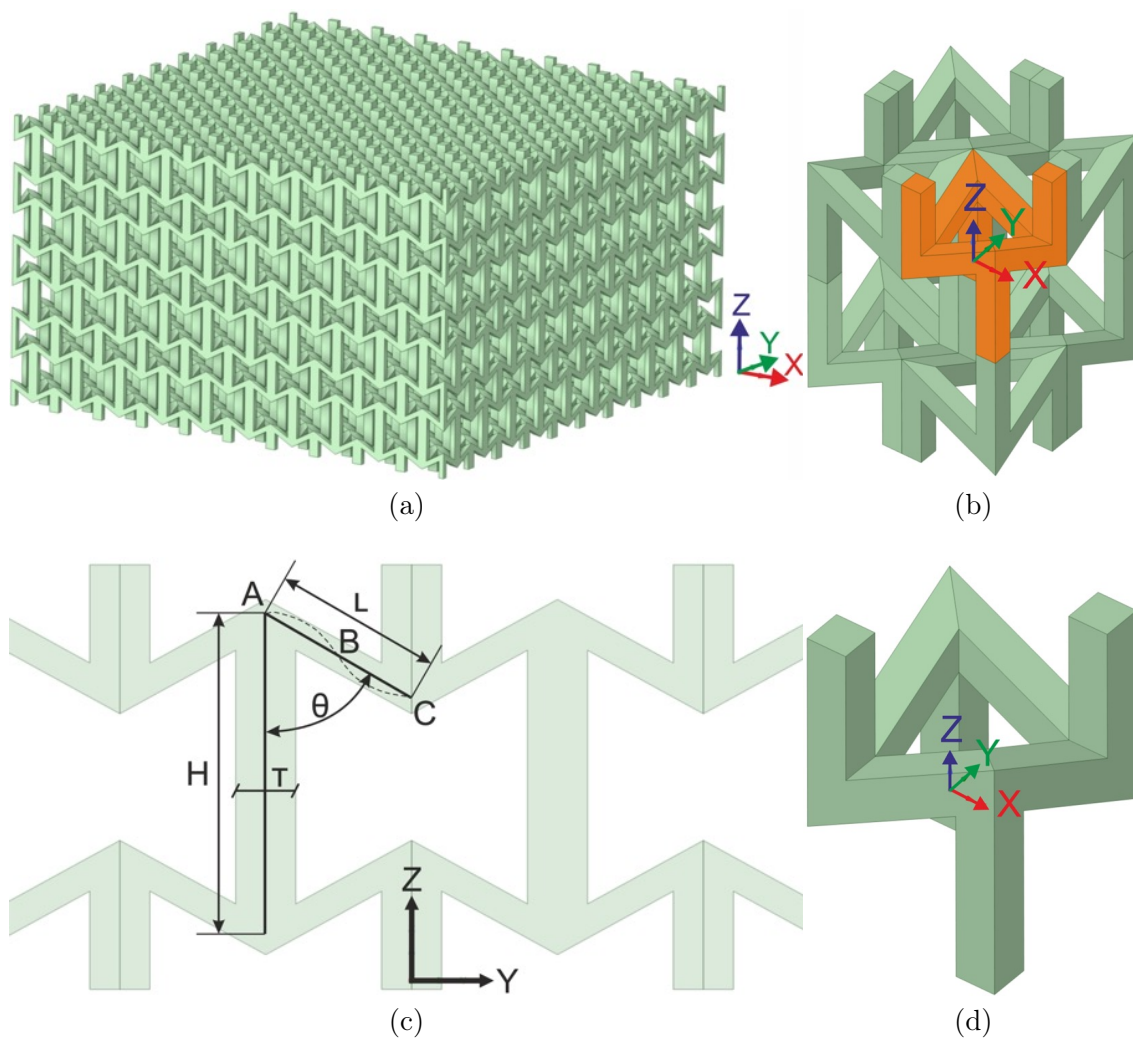


Рис. 2. Трехмерная сотовая ауксетическая конструкция с вогнутой структурой в ANSYS SpaceClaim: (a) трехмерная структура ауксетика; (b) элементарная ауксетическая ячейка (оранжевым цветом выделена единичная образующая структура); (c) геометрические параметры ауксетической ячейки со схемой деформации единичной балочной структуры; (d) единичная образующая структура, которая посредством зеркальной осевой симметрии (по X, Y и Z) образует элементарную ауксетическую ячейку.

H – характерный вертикальный размер, задаваемый длиной соответствующей вертикальной стойки;

θ – вогнутый угол, задающий наклон стержня AC относительно вертикального направления (и, соответственно, степень вогнутости ячейки)

t – размер поперечного сечения стержня (в работе далее принимается квадратное сечение $t \times t$).

При этом вводится ограничение на допустимую геометрию ауксетической ячейки, при которой должны выполняться условия $H > L \cos \theta$, $0 < \frac{t}{2L \sin(\theta)} < 1$ и $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$.

Все стержни метаструктуры считаются изготовленными из линейно-упругого материала, характеризующегося упругим модулем растяжения-сжатия E , модулем сдвига G и коэффициентом Пуассона ν . Таким образом, дальнейшие теоретические выкладки справедливы для любого материала, например, металлического порошка [30–32] или часто используемых пластиков [33], если их поведение можно считать линейно-упругим в рассматриваемом диапазоне.

В расчетной постановке используется элементарная ауксетическая ячейка (рис. 2b), которая служит минимальным повторяющимся объемом для построения всей трехмерной решетки. Для удобства параметризации и последующего аналитического вывода внутри ячейки выделяется единичная образующая структура, представляющий собой минимальный симметричный фрагмент, из которого полная ячейка собирается операциями зеркального отражения относительно координатных плоскостей по осям X , Y , Z (рис. 2d). Такая декомпозиция важна по причине выделения несущих элементов, в которых возникают основные механизмы деформации (изгиб и сдвиг наклонных стержней и осевая деформация вертикальных стоек), что также позволяет в дальнейшем использовать симметрию при выводе зависимостей прогибов от нагрузки и при переходе от перемещений отдельного стержня к средним деформациям ауксетической ячейки.

Полная элементарная ауксетическая ячейка и единичная образующая структура различаются, поскольку эффективные деформации и ортотропные характеристики определяются по полной элементарной ячейке, тогда как единичная образующая структура используется только для локального силового взаимодействия и кинематики внутри нее.

Для моделирования элементарной ячейки было сделано несколько предположений. Во-первых, предполагалось, что элементарная ячейка расположена в бесконечной структуре (т.е. бесконечном числе элементарных ячеек во всех трех направлениях), что исключает краевые эффекты и сохраняет геометрическую симметрию. Во-вторых, все соединения в метаструктуре считались жесткими, а деформация элементов в основном обусловлена изгибом и сдвигом наклонных стержней и осевым сжатием вертикальных стержней.

4. Прогибы вогнутых стержней под нагрузкой на основе балочной теории. Наклонный стержень в единичной ауксетической решетке длиной L (АС на рис.2с) соединен с соседними элементами жесткими узлами и в идеализированной бесконечной решетке работает как балка, защемленная на обоих концах (рис.2а). При симметричном нагружении эпюра моментов для такой балки имеет нулевое значение в середине пролета, что верно для рассматриваемой схемы нагружения, когда точка перегиба находится в центре. Следовательно, каждую половину можно рассматривать как консоль длины $\ell = L/2$.

Введем локальную продольную координату u вдоль исходной оси стержня от заземления А (см. рис.3d). Если конец В смещается вдоль локальной оси стержня u на Δu , эффективное плечо поперечной силы уменьшается относительно u – координаты вдоль исходной (недеформированной) оси половины стержня (локальная продольная координата $u \in [0, L/2]$) и вместо $(\ell - u)$ получаем $(\ell - \Delta u - u)$. Отсюда изгибающий момент в произвольном сечении можно получить из состояния равновесия рис.3с и рис.3d):

$$M(u) = Q(\ell - \Delta u - u), \quad (1)$$

где Q – поперечная сила в балке.

Согласно классической теории Эйлера-Бернулли кривизна оси балки при поворотах определяется как

$$\kappa = \frac{d\varphi}{ds} = \frac{M(u)}{EI} = \frac{Q}{EI}(\ell - \Delta u - u), \quad (2)$$

где s – дуговая координата вдоль деформированной оси половины балки, $\varphi(s)$ – угол поворота касательной к оси балки относительно исходного направления, E – модуль упругости балки, $I = \frac{t^4}{12}$ – осевой момент инерции сечения (рассматривается квадратное).

Важно отметить, что u является зависимой координатой от s , поскольку при больших поворотах проекция дугового элемента ds на исходную ось равна du и связывается с φ .

Для тонких балок (у которых высота сечения значительно меньше длины), работающих в основном на изгиб [34–36], эффекты, связанные с влиянием сдвиговой деформации, являются незначительными. Однако, поскольку длины рассматриваемых элементов ячеек ауксетического метаматериала малы, то для достаточно коротких стержней используется модель балки Тимошенко, в которой связь между углом поворота и производной поперечного прогиба определяется как [37]

$$\gamma = \varphi(u) - \frac{dv}{du} = \frac{Q}{\kappa_s AG}, \quad (3)$$

где γ – сдвиговая деформация, которая является константой при постоянной поперечной силе Q ; κ_s – коэффициент сдвига, зависящий от формы поперечного сечения балки (для прямоугольного сечения $\kappa_s = 5/6$); v – поперечный прогиб балки; G – модуль сдвига материала, из которого изготовлена ячейка ауксетика; A – площадь поперечного сечения балки (квадратного сечения размерами $t \times t$).

Так как поперечная сила Q на рассматриваемом участке балки постоянна, сдвиговая деформация также является постоянной величиной и не зависит от координаты. Поэтому, дифференцируя (3) по дуговой координате s , получаем следующее кинематическое соотношение

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{d}{ds} \left(\frac{dv}{du} + \gamma \right) = \frac{d}{ds} \left(\frac{dv}{du} \right) = \frac{d^2v}{du^2} \frac{du}{ds}. \quad (4)$$

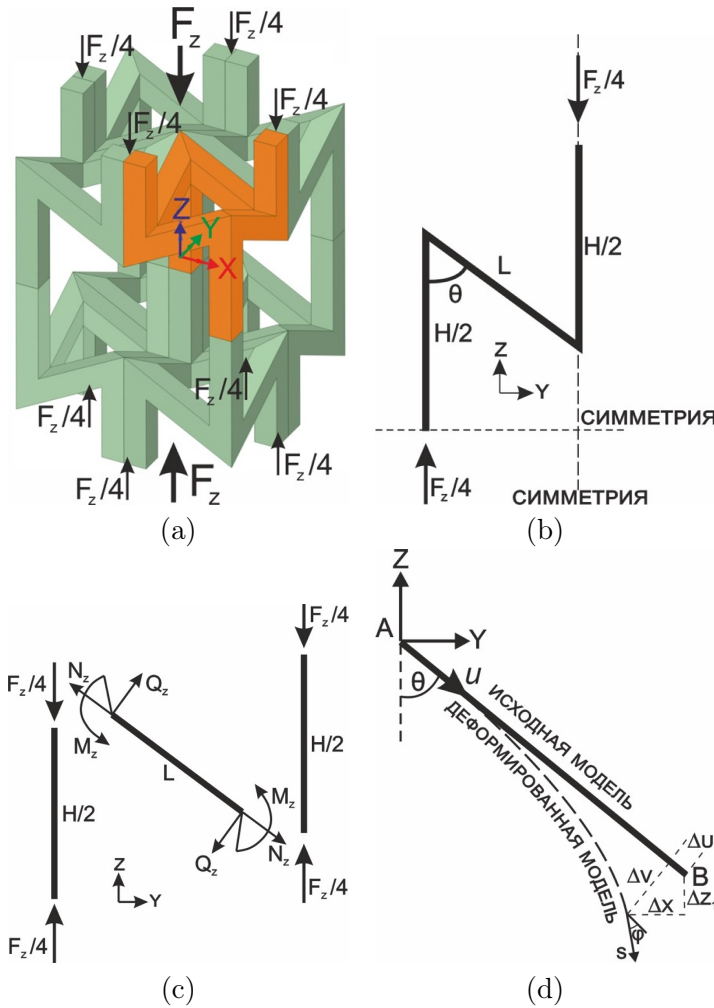


Рис. 3. Нагружение вдоль оси Z на элементарную ауксетическую ячейку: (a) – условие нагружения на элементарную ауксетическую ячейку; (b) – условие нагружения на единичную образующую структуру ауксетика в плоскости ZY; (c) – внутренние усилия в единичной образующей структуре ауксетика в плоскости ZY; (d) – связь между системами координат исходной и деформированной системы при нагружении в направлении Z.

Пренебрегая растяжением оси балки, т.е. считая, что ее длина не изменяется в процессе нагружения, можно получить соотношения, связывающие дуговую координату s с текущей формой в плоскости через угол поворота касательной φ :

$$\frac{du}{ds} = \cos \varphi, \quad \frac{dv}{ds} = \sin \varphi. \quad (5)$$

Для того чтобы получить нелинейное дифференциальное уравнение для $\varphi(s)$, продифференцируем уравнение (2) по s и учтем соотношения (5):

$$\frac{d^2\varphi}{ds^2} = \frac{Q}{EI} \frac{d}{ds} (\ell - \Delta u - u) = -\frac{Q}{EI} \frac{du}{ds} = -\frac{Q}{EI} \cos(\varphi). \quad (6)$$

Умножим (6) на $\frac{d\varphi}{ds}$ и проинтегрируем по s :

$$\int \frac{d^2\varphi}{ds^2} \frac{d\varphi}{ds} ds = -\frac{Q}{EI} \int \cos(\varphi) \frac{d\varphi}{ds} ds. \quad (7)$$

В результате получим:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^2 = -\frac{Q}{EI} \sin(\varphi) + C. \quad (8)$$

Для определения постоянной интегрирования C необходимо задать граничные условия для консольной балки AB (см. рис.3д), которая в нашем случае моделирует половину балки AC (см. рис. 2с):

1. На свободном конце $s = \ell = \frac{L}{2}$ кривизна (а значит, и $d\varphi/ds$) обращается в ноль:

$$\left. \frac{d\varphi}{ds} \right|_{s=\ell} = 0, \quad \varphi(\ell) = \varphi_{L/2}, \quad (9)$$

откуда получаем $C = \frac{Q}{EI} \sin(\varphi_{L/2})$.

2. В защемлении $s=0$ угол поворота равен сдвиговому углу γ . Это следует из (3), поэтому

$$\left. \frac{dv}{du} \right|_{s=0} = 0, \quad \varphi(0) = \gamma. \quad (10)$$

Подставляя найденное C в (8) и выбирая положительную ветвь, получаем:

$$\frac{d\varphi}{ds} = \sqrt{\frac{2Q}{EI} (\sin(\varphi_{L/2}) - \sin(\varphi))}. \quad (11)$$

Разделим переменные в уравнении (11) и проинтегрируем от $s = 0$ до $s = \ell = L/2$ с учетом граничных условий. В результате получим

$$\int_{\gamma}^{\varphi_{L/2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{\sin(\varphi_{L/2}) - \sin(\varphi)}} = \frac{L}{2} \sqrt{\frac{2Q}{EI}}. \quad (12)$$

Покажем, что интеграл в (12) сводится к эллиптическому интегралу Лежандра 1-го рода. Для этого введем параметры $k = \sqrt{\frac{1+\sin(\varphi_{L/2})}{2}}$ и $\sin(\alpha) = \sqrt{\frac{1+\sin(\varphi)}{1+\sin(\varphi_{L/2})}}$. Тогда интеграл в (12) можно представить через неполный эллиптический интеграл первого рода $F(\alpha, k)$ и полный $F(k) \equiv F(\frac{\pi}{2}, k)$:

$$F(k) - F(\alpha_0, k) = \int_{\alpha_0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2(\alpha)}} = \frac{L}{2} \sqrt{\frac{Q}{EI}}, \quad (13)$$

где α_0 соответствует $\varphi = \gamma$, т.е. $\sin(\alpha_0) = \sqrt{\frac{1+\sin(\gamma)}{1+\sin(\varphi_{L/2})}}$.

При заданных значениях величин L , t , E , G и Q параметр k определяется как корень уравнения (13), после чего находится $\varphi_{L/2}$ из условия $\sin(\varphi_{L/2}) = 2k^2 - 1$.

Далее вычислим перемещения Δu и Δv . Для этого сначала воспользуемся соотношением

$$\Delta v = \int_0^\ell \frac{dv}{ds} ds = \int_0^\ell \sin(\varphi) ds,$$

которое с учетом (11) перепишем в виде:

$$\Delta v = \sqrt{\frac{EI}{2Q}} \int_\gamma^{\varphi_{L/2}} \frac{\sin(\varphi) d\varphi}{\sqrt{\sin(\varphi_{L/2}) - \sin(\varphi)}}. \quad (14)$$

Тогда, используя параметры k и $\sin(\alpha)$, перемещение Δv выражается через эллиптические интегралы первого $F(\cdot)$ и второго рода $E(\cdot)$:

$$\Delta v = \sqrt{\frac{EI}{Q}} [F(k) - F(\alpha_0, k) - 2(E(k) - E(\alpha_0, k))]. \quad (15)$$

Продольная проекция деформированной оси на исходную ось:

$$u(\ell) = \int_0^\ell \frac{du}{ds} ds = \int_0^\ell \cos(\varphi) ds. \quad (16)$$

Так как исходная длина половины стержня равна $\ell = L/2$, выражение для продольного перемещения принимает вид:

$$\Delta u = \ell - u(\ell) = \frac{L}{2} - \int_0^\ell \cos(\varphi) ds. \quad (17)$$

Используя тот же переход $ds \rightarrow d\varphi$, получаем замкнутую форму:

$$\Delta u = \frac{L}{2} - \sqrt{\frac{2EI}{Q}} (\sin(\varphi_{L/2}) - \sin(\gamma)). \quad (18)$$

Важно отметить, что Δu появляется только из-за больших перемещений (геометрическая нелинейность). Для классической модели балки Тимошенко обычно принимают $\Delta u \approx 0$ (т.е. проекция пренебрежимо мала).

Для моделирования ауксетических метаматериалов из менее жестких полимерных материалов, подверженных значительным деформациям под нагрузкой, решения на основе модели балки с большими перемещениями учитывают нелинейное изменение размеров и, как ожидается, будут более точно описывать деформацию полимерных структур. При этом это требует применения неаналитических алгоритмов (численных методов), и поэтому они менее эффективны для проектирования и оптимизации конструкций, состоящих из ауксетических метаматериалов. Следовательно, необходимо получить, в том числе и приближенные формулы, которые будут представлять собой замкнутые (аналитические) функции, удобные для практического применения.

Далее приведены теоретические выкладки по переходу от перемещений отдельного стержня Δv и Δu к изменениям размеров ауксетической ячейки по

глобальным осям и к эффективным модулям упругости и коэффициентам Пуассона.

Идея заключается в том, что периодическая ауксетическая ячейка трактуется как эквивалентная ортотропная непрерывная среда. Для этого при заданном напряжении σ_z и σ_y вычисляются средние деформации ячейки через перемещения Δx , Δy и Δz , а затем определяются E_i и ν_{ij} , где $i, j = x, y, z$.

5. Гомогенизация ортотропных механических свойств. Пусть в бесконечной ауксетической решетке возникает сжимающее напряжение σ_z вдоль направления Z. Тогда при моделировании одной элементарной ячейки (показанной на рис. 3а, которая может быть далее упрощена до структуры, представленной на рис. 3б, в виду симметрии) будем рассматривать сжимающее усилие F_z .

Площадь верхней грани (в плоскости XY) равна $A_{xy} = (2L \sin(\theta)) (2L \sin(\theta)) = 4L^2 \sin^2(\theta)$. в силу симметрии и принятого разбиения на симметричную подсистему, результирующая сила:

$$F_z = \frac{1}{2} \sigma_z A_{xy} = 2\sigma_z L^2 \sin^2(\theta). \quad (19)$$

Далее эта сила распределяется по наклонным элементам (рис.3с). На каждый наклонный стержень действует сила $F_z/4$, которую раскладывают на:

1. поперечную компоненту (вызывающую изгиб):

$$Q_z = \frac{F_z}{4} \sin(\theta) = \frac{1}{2} \sigma_z L^2 \sin^3(\theta); \quad (20)$$

2. продольную компоненту (вызывающую растяжение и сжатие):

$$N_z = \frac{F_z}{4} \cos(\theta) = \frac{1}{2} \sigma_z L^2 \sin^2(\theta) \cos(\theta). \quad (21)$$

В дальнейшем для определения перемещений используется прежде всего Q_z , поскольку основное деформирование задается изгибом и сдвигом наклонных стержней, в то время как N_z является более существенным для прочности и локальной устойчивости элементов ауксетической решетки (авторы планируют это учесть в своих дальнейших исследованиях).

Далее локальные перемещения конца половины стержня (Δu , Δv) соотносятся с глобальными (для половины стержня в геометрии элементарной ячейки), показанными на рис. 3d, с помощью следующих соотношений:

$$\Delta x = \Delta u \sin(\theta) + \Delta v \cos(\theta), \quad \Delta z_1 = \Delta v \sin(\theta) - \Delta u \cos(\theta). \quad (22)$$

Соотношения (22) описывают геометрию поворота локальной системы на угол θ . Важно отметить, что Δx и Δz_1 – это вклад половины стержня.

Вертикальная стойка длиной H и сечением $A=t^2$ испытывает осевое сжатие силой F_z , что добавляет компоненту перемещений по Z:

$$\Delta z_2 = \frac{F_z H}{EA} = \frac{F_z H}{Et^2} = \frac{2\sigma_z H L^2 \sin^2(\theta)}{Et^2}. \quad (23)$$

При этом в рассматриваемой симметричной подсистеме вклад наклонных стержней в Δz удваивается (две симметричные половины), следовательно, в результате имеем:

$$\Delta z = 2\Delta z_1 + \Delta z_2. \quad (24)$$

С учетом габаритов для половины элементарной ячейки исходный размер подсистемы $h_z = H - L \cos(\theta)$ – вдоль Z и $h_x = L \sin(\theta)$ – вдоль X. Тогда средние деформации можно определить как:

$$\varepsilon_z = \frac{\Delta z}{H - L \cos(\theta)}, \quad \varepsilon_x = \frac{2\Delta x}{L \sin \theta}. \quad (25)$$

Множитель 2 в ε_x относится к половине стержня, а изменение ширины подсистемы собирается из двух симметричных половин.

Коэффициент Пуассона по определению равен отрицательному значению отношения поперечной деформации к осевой деформации. Таким образом, коэффициент Пуассона в направлении оси Z (ν_{zx}) с учетом (24):

$$\nu_{zx} = -\frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_z} = -\frac{\frac{2\Delta x}{L \sin(\theta)}}{\frac{\Delta z}{H - L \cos(\theta)}} = -\frac{2(H - L \cos(\theta)) \Delta x}{L \sin(\theta) \Delta z} = \frac{2\Delta x (L \cos(\theta) - H)}{L \sin(\theta) (2\Delta z_1 + \Delta z_2)}. \quad (26)$$

Благодаря зеркальной симметрии относительно плоскостей XZ и YZ и симметрии ячейки при перестановке направлений X и Y, эффективные свойства вдоль осей X и Y совпадают, тогда $\nu_{zy} = \nu_{zx}$. Эффективный модуль упругости E_z по определению:

$$E_z = \frac{\sigma_z}{\varepsilon_z} = \frac{\sigma_z}{\frac{\Delta z}{H - L \cos(\theta)}} = \frac{\sigma_z (H - L \cos(\theta))}{2\Delta z_1 + \Delta z_2}. \quad (27)$$

Формула (27) корректна как для модели с учетом больших перемещений (геометрической нелинейности), где Δu и Δv вычисляются по эллиптическим интегралам, так и для малых прогибов.

Для получения замкнутых (аналитических) формул для ν_{zx} и E_z с учетом теории малых прогибов по классической модели балки Тимошенко необходимо использовать решения для консоли длины ℓ под действием поперечной силы Q. Поперечный прогиб консольной балки разделяется на 2 составляющие:

1. изгибная $\Delta v_b = \frac{Q\ell^3}{3EI}$;
2. сдвиговая $\Delta v_s = \frac{Q\ell}{\kappa_s GA}$.

Тогда полный прогиб:

$$\Delta v = \frac{Q (L/2)^3}{3E (t^4/12)} + \frac{Q (L/2)}{(5/6) Gt^2} = Q \left(\frac{L^3}{2Et^4} + \frac{3L}{5Gt^2} \right). \quad (28)$$

Продольное перемещение $\Delta u \approx 0$, поскольку в приближении малых перемещений укорочение из-за кривизны мало. Тогда соотношения (22) упрощаются и определяют глобальные приращения в виде:

$$\Delta x \approx \Delta v \cos(\theta), \quad \Delta z_1 \approx \Delta v \sin(\theta). \quad (29)$$

Используя (26) с (24), а также (23), (28) и (29) получим замкнутую формулу для коэффициента Пуассона в направлении оси z (ν_{zx}):

$$\nu_{zx} = \frac{\tilde{C} \cos(\theta) (L \cos(\theta) - H)}{L \tilde{C} \sin^2(\theta) + 20GHt^2}. \quad (30)$$

где $\tilde{C} = 5GL^2 + 6Et^2$.

Используя (27) и те же подстановки, получим:

$$E_z = \frac{Et^2}{L^2} \frac{H/L - \cos(\theta)}{\sin^2(\theta) \left[\frac{2H}{L} + \left(\frac{L^2}{2t^2} + \frac{3E}{5G} \right) \sin^2(\theta) \right]}. \quad (31)$$

Аналогичный подход был применен для моделирования свойств одноосного сжатия вогнутой ауксетической структуры в направлении оси Y (см. рис. 4). На рис. 4 показана элементарная ячейка, в которой каждый вогнутый элемент, расположенный на ее границе вдоль оси Y , является общим для двух элементарных ячеек.

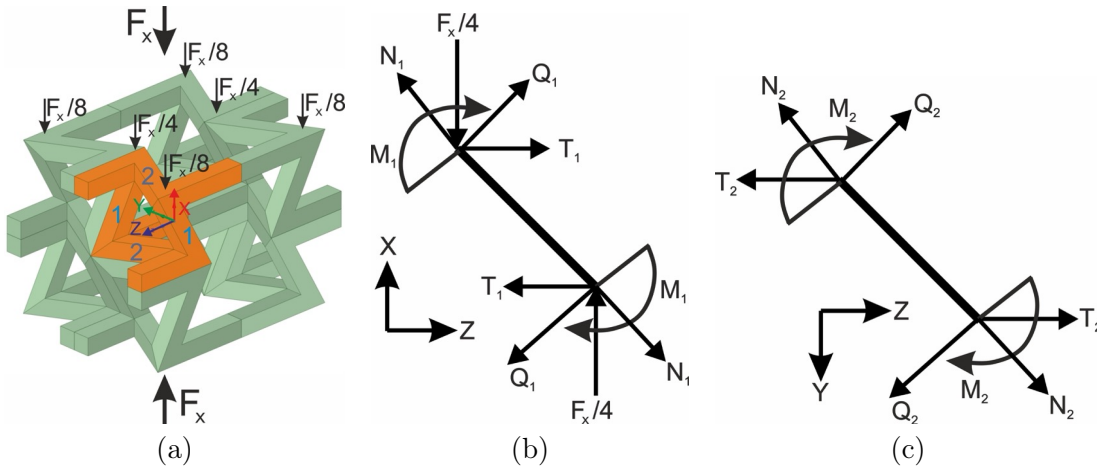


Рис. 4. Нагружение вдоль оси $X \equiv Y$ на элементарную ауксетическую ячейку: (a) – Условие нагружения на элементарную ауксетическую ячейку; (b) – тип стержня 1; (c) – тип стержня 2.

В силу симметрии ячейки физико-механические свойства вдоль осей X и Y одинаковы, поэтому достаточно рассмотреть одно направление. Площадь соответствующей грани вдоль оси Y равна $A_{xz} = (2(H - L \cos(\theta))) (2L \sin(\theta))$. Поскольку напряжение прикладывается к бесконечной структуре, то сжимающая сила, приложенная к каждому целому вогнутому элементу, составляет $F_y/4$. Связь между силой и напряжением определяется следующим соотношением:

$$F_y = \sigma_y A_{xz} = 4\sigma_y (H - L \cos(\theta)) (L \sin(\theta)), \quad (32)$$

где F_y относится к полной элементарной ячейке. На единичную образующую структуру, выделенную на рис.4 оранжевым цветом, приходится сила $F_y/8$. Силы $F_y/4$ и $F_y/8$, показанные на отдельных элементах, обусловлены тем, что

соответствующие граничные стержни совместно используются соседними элементарными ячейками.

Благодаря геометрической симметрии элементарную ячейку можно дополнительно упростить до единичной образующей структуры, показанной на рис. 4 оранжевым цветом. В силу равновесия и симметрии вертикальные стойки, которые теперь кажутся горизонтальными, не испытывают никакой эффективной силы. Также следует отметить, что вогнутые стержни, отмеченные цифрами 1 и 2 на рис. 4, не являются механически симметричными и, следовательно, должны рассматриваться отдельно. При таком нагружении выделяются два неэквивалентных набора наклонных стержней (тип 1 и тип 2) на рис. 4b и рис. 4c. Для типа 1 обозначим их силовые компоненты N_1 и Q_1 для продольной и поперечной составляющих сил и M_1 для изгибающего момента, а также N_2 , Q_2 и M_2 для типа 2. Введем горизонтальные реакции T_1 и T_2 , тогда из условия равновесия и отсутствия поворота получаются условия, приводящие к результатам для $Q_1 = \frac{F_y}{4} \cos(\theta) - T_1 \sin(\theta)$ и $Q_2 = T_2 \sin(\theta)$.

Следует отметить, что для обоих типов стержней граничные условия идентичны. Поскольку стержни типа 1 и типа 2 должны компенсировать прогиб таким образом, чтобы в упрощенной конструкции не возникали глобальные крутильные эффекты, как того требует симметрия конструкции, их прогибы должны быть одинаковыми. Следовательно, $M_1 = M_2$, тогда $\frac{F_y}{4} \cos(\theta) - T_1 \sin(\theta) = T_2 \sin(\theta)$. Кроме того, для равновесия вертикальных стоек необходимо, чтобы $T_1 = T_2$. Откуда следует, что

$$T_1 = T_2 = \frac{F_y \cos(\theta)}{8 \sin(\theta)} = \frac{F_y}{8} \operatorname{ctg}(\theta), \quad Q_1 = Q_2 = \frac{F_y}{8} \cos(\theta). \quad (33)$$

Компоненты продольных сил, которые интересны в основном при анализе несущей способности и не учитываются вследствие малого вклада в перемещение наклонных элементов, получаются из проекций

$$N_1 = \frac{F_y}{4} \sin(\theta) + T_1 \cos(\theta), \quad N_2 = T_2 \cos(\theta). \quad (34)$$

Для половины стержня при известных Δu и Δv из соотношений (22) определяются изменения размеров в главных направлениях $\Delta z = \Delta v \sin(\theta) - \Delta u \cos(\theta)$ и $\Delta x = \Delta y = \Delta u \sin(\theta) + \Delta v \cos(\theta)$. Заметим, то здесь проявляется одна важная особенность: поскольку при сжатии вдоль Y из-за симметрии подсистемы изменения вдоль X и Y оказываются одинаковыми, то сразу можно определить один из коэффициентов Пуассона.

Средняя деформация вдоль Y берется по половине ячейки $h_y = L \sin(\theta)$, а вдоль Z - $h_z = H - L \cos(\theta)$, поэтому

$$\varepsilon_y = \frac{2\Delta y}{L \sin(\theta)}, \quad \varepsilon_z = \frac{2\Delta z}{H - L \cos(\theta)}. \quad (35)$$

Тогда коэффициент Пуассона ν_{yz} определяется как

$$\nu_{yz} = -\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_y} = -\frac{\frac{2\Delta z}{H-L\cos(\theta)}}{\frac{2\Delta y}{L\sin(\theta)}} = -\frac{\Delta z \sin(\theta)}{\Delta y (H/L - \cos(\theta))}. \quad (36)$$

Так как $\Delta x = \Delta y$, то $\varepsilon_x = \varepsilon_y$. Тогда коэффициент Пуассона $\nu_{yx} = -\frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_y} = -1$. Эффективный модуль упругости E_y (а значит, и E_x) определяется как

$$E_y = \frac{\sigma_y}{\varepsilon_y} = \frac{\sigma_y}{\frac{2\Delta y}{L\sin(\theta)}} = \frac{\sigma_y L \sin(\theta)}{2\Delta y}. \quad (37)$$

В приближении малых перемещений по линейной теории Тимошенко $\Delta u \approx 0$. Тогда $\Delta z \approx \Delta v \sin(\theta)$ и $\Delta y \approx \Delta v \cos(\theta)$, а соотношения (36) и (37) сводятся соответственно к виду:

$$\nu_{yz} \approx -\frac{(\Delta v \sin(\theta)) \sin(\theta)}{(\Delta v \cos(\theta)) (H/L - \cos(\theta))} = \frac{L \sin(\theta) \operatorname{tg}(\theta)}{L \cos(\theta) - H}. \quad (38)$$

$$E_y = \frac{10EGt^4}{L \cos^2(\theta) (H - L \cos(\theta)) (5L^2G + 6Et^2)} \quad (39)$$

При этом $E_y = E_x$.

6. Влияния геометрических параметров на ортотропные характеристики ауксетика. Геометрические параметры ячейки задаются длиной наклонного стержня L , высотой стойки H , углом вогнутости (наклона) θ и размером поперечного сечения t (квадратное). Для получения эффективных констант используются две модели:

1. точное решение с учетом геометрической нелинейности наклонных стержней, определяемые по формулам (26), (27), (36) и (37);
2. приближенное (на основе линейной балки Тимошенко), использующее гипотезу малых деформаций. Принимается $\Delta u \approx 0$, а Δv задается суммой изгибной и сдвиговой составляющих, что приводит к замкнутым аналитическим формулам (30), (31), (38) и (39).

Эффективные характеристики определяются в рамках процедуры гомогенизации как отношение заданного напряжения к средней деформации ячейки в соответствующем направлении. Обезразмеривание модулей упругости производилось в виде E_z/E и E_y/E , где E – модуль упругости материала, из которого изготовлен ауксетик.

Использованы параметры материала, соответствующие нержавеющей стали 17-4РН (ХН4МДБТ): $E=200$ ГПа и $G=77.4$ ГПа. Геометрические параметры: $L=5$ мм, $t=1$ мм, базовое значение $H=10$ мм и $\theta=60^\circ$. Для точной модели расчет выполнен при фиксированных уровнях напряжений σ_z и σ_y , равных 1 и 100 МПа (в этом случае получаемые эффективные модули являются секущими по отношению к заданной нагрузке, а отличие от модели с гипотезой малых деформаций отражает вклад геометрической нелинейности).

На рис. 5а показана зависимость E_z/E от угла θ при базовых значениях H и L , а также от масштабного параметра H/L при базовом угле θ 5б. Из рис. 5а видно, что наблюдается резкое падение эффективной жесткости по z с ростом θ . При увеличении θ возрастает поперечная составляющая нагрузки на наклонные элементы и, как следствие, увеличивается их изгибно-сдвиговая податливость, формирующая основной вклад в Δz . Из рис. 5б следует, что E_z/E монотонно растет с увеличением H/L . Рост связан с тем, что при увеличении H возрастает характерный размер h_z , тогда как вклад изгибной составляющей наклонных стержней в абсолютное приращение Δz остается сопоставимым (он определяется, в первую очередь, величинами L , t , θ и уровнем нагрузки). В результате относительная деформация $\varepsilon_z = \Delta z/h_z$ снижается, и эффективная жесткость $E_z = \sigma/\varepsilon_z$ возрастает. Вклад напряжения σ_z незначителен.

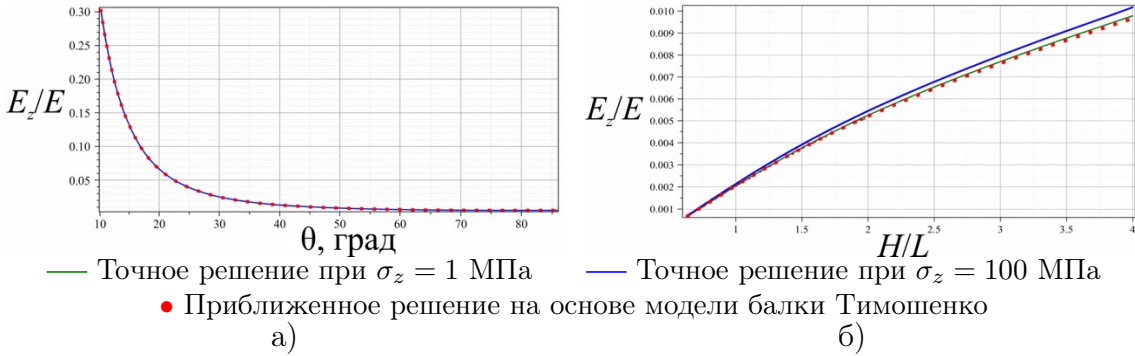


Рис. 5. Зависимость модуля упругости E_z от угла вогнутости (а) и отношения H/L (б) для точного решения при σ_z , равном 1 МПа (зеленый цвет) и 100 МПа (синий), а также приближенное решение на основе модели балки Тимошенко (красный).

На рис. 6 показана зависимость E_y/E от угла θ (а) при базовых значениях H и L , а также от масштабного параметра H/L при базовом угле θ (б). Из рис. 6а видно, что в отличие от E_z , модуль E_y возрастает с увеличением θ , причем рост становится особенно резким при $\theta > 75^\circ$. Такая тенденция согласуется с аналитической структурой приближенной формулы для E_y (при $\theta \rightarrow 90^\circ \cos(\theta) \rightarrow 0$) и жесткость по y увеличивается. Из рис. 6б видно, что E_y/E убывает с увеличением H/L . Это связано с тем, что при росте H увеличивается вертикальный размер подсистемы $h_z = H - L \cos(\theta)$, что повышает податливость по оси Y . Вклад геометрической нелинейности становится более значительным при увеличении угла θ .

На рис. 7 показана зависимость коэффициента Пуассона ν_{zx} от угла θ (а) при базовых значениях H и L , а также от масштабного параметра H/L при базовом угле θ (б). Во всем исследованном диапазоне $\nu_{zx} < 0$, т.е. структура демонстрирует ауксетическое поведение. При этом коэффициент Пуассона ν_{zx} существенно зависит от угла (рис. 7а): при малых углах эффект максимально выражен ($\nu_{zx} \approx -3.18$ при $\theta = 10^\circ$), а при приближении к 85° он ослабевает ($\nu_{zx} \approx -0.28$). Это объясняется тем, что при малых θ механизм поворота

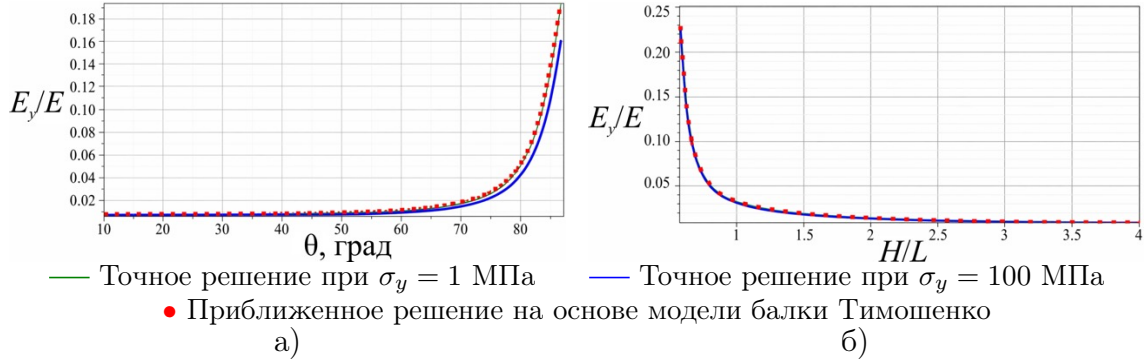


Рис. 6. Зависимость модуля упругости E_y от угла вогнутости (а) и отношения H/L (б) для точного решения при σ_y , равном 1 МПа (зеленый цвет) и 100 МПа (синий), а также приближенного решения на основе модели балки Тимошенко (красный).

наклонных стержней дает значительное изменение $h_x = L \sin(\theta)$ при сравнительно малом изменении $h_z = H - L \cos(\theta)$. На рис.7б показано, что при росте H/L коэффициент Пуассона ν_{zx} проявляет более сильные ауксетические свойства. Это означает, что более высокие ячейки (параметр H) при сжатии по оси Z дают более выраженную поперечную деформацию в X (или Y) относительно продольной деформации по Z . Вклад геометрической нелинейности становится более значительным при увеличении угла θ , а также при увеличении масштабного параметра H/L .

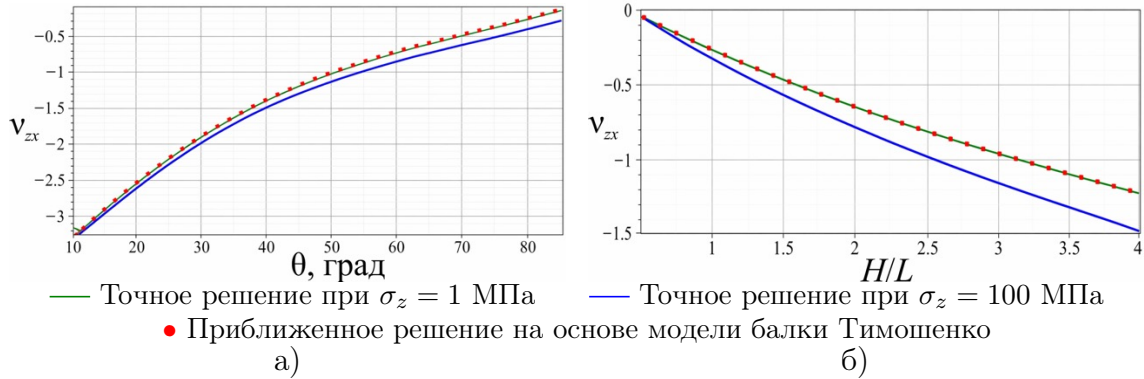


Рис. 7. Зависимость коэффициента Пуассона ν_{zx} от угла вогнутости (а) и отношения H/L (б) для точного решения при σ_z , равном 1 МПа (зеленый цвет) и 100 МПа (синий), а также приближенного решения на основе модели балки Тимошенко (красный).

На рис. 8 показана зависимость коэффициента Пуассона ν_{yz} от угла θ (а) при базовых значениях H и L , а также от масштабного параметра H/L при базовом угле θ (б). Во всем исследованном диапазоне $\nu_{yz} < 0$, т.е. структура демонстрирует ауксетическое поведение. По мере роста угла θ коэффициент Пуассона ν_{yz} демонстрирует более сильные ауксетические свойства (рис. 8а), что свидетельствует об увеличении вертикальной составляющей деформаций, возникающей

из поворота и прогиба наклонных элементов при нагружении по y , а также наблюдается рост чувствительности к геометрии при $\theta \rightarrow 90^\circ$. Характерный результат демонстрирует коэффициент Пуассона ν_{yz} в зависимости от H/L . При стремлении $H/L \rightarrow \cos(\theta)$, коэффициент Пуассона ν_{yz} сильно усиливает ауксетические свойства, а при росте масштабного параметра H/L быстро уменьшается. Это соответствует структуре аналитической зависимости ν_{yz} , в которой присутствует знаменатель вида $L \cos(\theta) - H$, при котором вертикальный размер h_z становится малым при H близком к $L \cos(\theta)$, и даже небольшие абсолютные приращения по Z дают большие относительные деформации и, как следствие, большую по модулю величину ν_{yz} . Вклад геометрической нелинейности становится более значительным при увеличении угла θ .

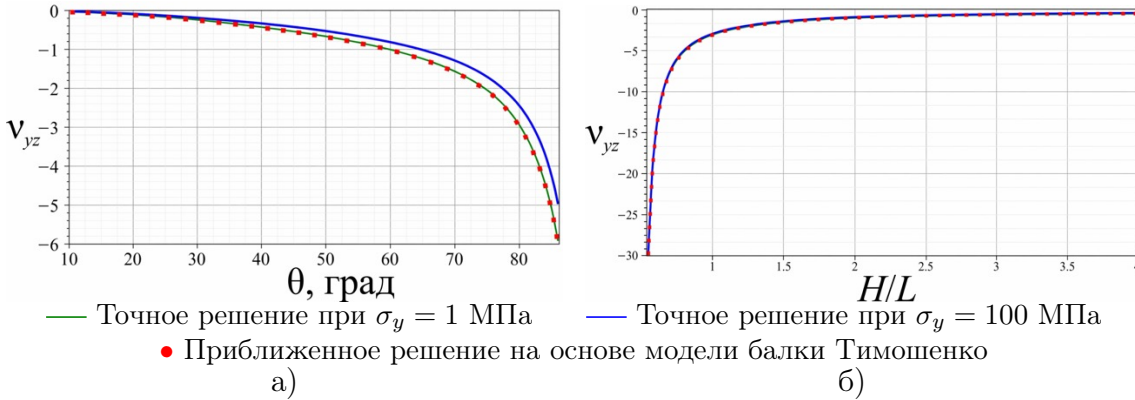


Рис. 8. Зависимость коэффициента Пуассона ν_{yz} от угла вогнутости (а) и отношения H/L (б) для точного решения при σ_y , равном 1 МПа (зеленый цвет) и 100 МПа (синий), а также приближенные решения на основе модели балки Тимошенко (красный).

В результате проведенного анализа угол вогнутости θ выступает как важный фактор ортотропии, поскольку при увеличении θ уменьшается жесткость по Z , но жесткость по Y увеличивается и усиливает ν_{yz} , тогда как $|\nu_{zx}|$ уменьшается. Тем самым угол θ позволяет целенаправленно смещать поведение структуры от жесткой по Z и сильно выраженных свойств ауксетика в ZX (при малых θ) к более жесткой по Y и сильно выраженных свойств ауксетика в YZ (при больших θ).

Увеличение масштабного фактора H/L повышает E_z и усиливает $|\nu_{zx}|$, но одновременно снижает E_y и делает ν_{yz} менее отрицательным. Таким образом, масштабный фактор H/L является вторым важным параметром для настройки ортотропных свойств и перераспределяет свойства ауксетика между парами направлений ZX и YZ .

При увеличении нагрузки σ_z и σ_y влияние геометрической нелинейности на эффективные ортотропные характеристики возрастает. При этом данный эффект оказывает большее влияние на коэффициенты Пуассона, чем на модули упругости.

7. Заключение. В работе проведено исследование по определению эффективных ортотропных механических характеристик трехмерных сотовых ауксетических конструкций с вогнутой структурой на основе балочной модели деформирования элементов.

Получено, что механический отклик рассматриваемой структуры при основных нагружениях в главных направлениях (направлениях ортотропии) в значительной степени определяется изгибно-сдвиговой податливостью наклонных стержней и осевой деформацией вертикальных стоек, тогда как продольные усилия в наклонных элементах оказываются вторичными для оценки деформативности и эффективных модулей. На уровне единичного элемента введена постановка в виде консольной балки для половины наклонного стержня, что позволило свести задачу больших прогибов к нелинейному уравнению для угла поворота $\varphi(s)$ и получить замкнутые выражения для локальных перемещений Δu и Δv через эллиптические интегралы.

На этапе гомогенизации сформулированы геометрические связи перехода от локальных перемещений Δu и Δv к изменениям размеров ячейки Δx , Δy и Δz , а далее к средним деформациям ε_x , ε_y и ε_z . В результате получены выражения для эффективных ортотропных модулей упругости $E_x = E_y$, E_z , а также коэффициентов Пуассона ν_{zx} , ν_{yz} и ν_{xy} представимые в виде функций геометрических параметров ячейки (L , H , θ , t) и линейно-упругих свойств исходного материала (E , G). Для инженерного применения дополнительно выведены замкнутые аналитические формулы в приближении малых деформаций, учитывающих сдвиг по модели балки Тимошенко, удобные для параметрических расчетов и последующего использования при задании эквивалентного ортотропного материала.

Показано, что при увеличении уровня напряжений возрастают эффекты геометрической нелинейности, при этом она заметнее влияет на коэффициенты Пуассона, чем на модули упругости. Следовательно, при проектировании высокодеформируемых ауксетических решеток (особенно из полимерных материалов) предпочтительно использовать точную (нелинейную) модель, а приближенные формулы рассматривать для первичной оценки.

Установлено, что угол вогнутости θ и масштабный параметр H/L являются главными управляющими параметрами ортотропности ауксетика. Угол θ перераспределяет свойства между парами направлений ZX и YZ (уменьшая E_z , увеличивая E_y и усиливая ν_{yz} , но ослабляя ν_{zx}), а H/L повышает E_z и усиливает ν_{zx} , одновременно снижая E_y и делая ν_{yz} менее отрицательным.

Выполнено исследование влияния геометрических параметров ауксетической ячейки на ортотропные характеристики и показано следующее:

1. Жесткость по направлению Z резко уменьшается при росте угла θ , поскольку увеличение угла вогнутости усиливает поперечную составляющую нагружения наклонных элементов и тем самым повышает их изгибно-сдвиговую податливость. При увеличении масштабного фактора H/L модуль E_z монотонно возрастает.

2. Жесткость вдоль направлений Y (и X) ведет себя противоположным образом, поскольку E_y возрастает с увеличением θ и демонстрирует особенно резкий рост при $\theta > 75^\circ$, в то же время с ростом H/L E_y уменьшается.

3. Во всем исследованном диапазоне параметров структура сохраняет ауксетическое поведение $\nu_{zx} < 0$ и $\nu_{yz} < 0$. При этом $|\nu_{zx}|$ максимален при малых углах θ (характерное значение $\nu_{zx} \approx -3.18$ при $\theta = 10^\circ$) и ослабевает при приближении к большим углам (порядка $\nu_{zx} \approx -0.28$ при приближении к $\theta \approx 85^\circ$). Увеличение H/L усиливает ауксетический эффект ν_{zx} , а для ν_{yz} наблюдается усиление с ростом угла θ . Также выявлен характерный режим при $H/L \rightarrow \cos(\theta)$, где малость вертикального размера подсистемы h_z приводит к резкому росту $|\nu_{yz}|$.

Ограничения модели связаны с принятыми идеализациями: балочная аппроксимация элементов, жесткость узловых соединений, линейно-упругий закон материала элементов ауксетического метаматериала и отсутствие учета локальных эффектов (контакт, локальная потеря устойчивости, технологические эффекты, связанные с методами изготовления, неоднородность и анизотропия исходного материала и т.п.). Тем не менее, предложенная в данной работе модель позволяет подбирать геометрию ячейки под требуемые ортотропные константы и использовать их в расчетах конструкций без явного моделирования ауксетической решетки.

ДОПОЛНИТЕЛЬНО

Вклад авторов. С. Г. Саиян - разработка физико-математической модели, написание текста рукописи; М. В. Шитикова - общее руководство работой, редактирование текста рукописи.

Конфликт интересов. Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

Источник финансирования. Данная работа была поддержана грантом 2026 года на проведение фундаментальных научных исследований (НИР/НИОКР) научными коллективами НИУ МГСУ, проект № 01-482/130.

ADDITIONAL INFORMATION

Authors' contribution. S. G. Saiyan - developing the physical-and-mathematical model, writing the draft of the manuscript, M. V. Shitikova - general supervision, editing the final manuscript.

Competing interests. The authors declare that they have no competing interests.

Funding. The research was funded by the National Research Moscow State University of Civil Engineering (grant for fundamental scientific research, project No. 01-482/130).

ЛИТЕРАТУРА

1. Изучение свойств метаматериалов с отрицательным коэффициентом Пуассона при пробивании жестким ударником / С. Ю. Иванова [и др.] // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2023. – № 5. – С. 120–130. – DOI: 10.31857/S0572329923600366. – EDN: GBZWAQ.
2. Mechanical metamaterials with negative Poisson's ratio: A review / L. Zhang [и др.] // Engineering Structures. – 2025. – Т. 329. – С. 119838. – DOI: 10.1016/j.engstruct.2025.119838.

3. A review on the auxetic mechanical metamaterials and their applications in the field of applied engineering / V. Siniauskaya [и др.] // *Frontiers in Materials*. – 2024. – Т. 11. – С. 1453905. – DOI: 10.3389/fmats.2024.1453905.
4. Мазаев А. В., Аженеза О., Шитикова М. В. Ауксетические материалы: классификация, механические свойства и приложения // XXXI Международная инновационная конференция молодых ученых и студентов по проблемам машиноведения (МИКМУС - 2019) : Сборник трудов конференции. – 2020. – С. 32–35.
5. Ченцов А. В., Сокоренко А. В. Исследование моделей и механических свойств структур Миура-ори // *Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния*. – 2024. – 1 (59). – С. 39–49. – DOI: 10.37972/chgpu.2024.59.1.003. – EDN: CSJSRK.
6. A new type of hierarchical honeycomb in-plane impact study / H. Song [и др.] // *Materials*. – 2021. – Т. 14, № 8. – С. 1917. – DOI: 10.3390/ma14081917.
7. Mechanical metamaterials with negative Poisson's ratio: A review / L. Zhang [и др.] // *Engineering Structures*. – 2025. – Т. 329. – С. 119838. – DOI: 10.1016/j.engstruct.2025.119838.
8. Ахметшин Л. Р., Смолин И. Ю. Анализ некоторых методов соединения ячеек в механическом тетрахиальном метаматериале // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. – 2022. – № 77. – С. 27–37. – DOI: 10.17223/19988621/77/3. – EDN: BLXDFJ.
9. Recent developments of auxetic metamaterials / N. F. Mohamad Razali [и др.] // *Advances in Physics: X*. – 2025. – Т. 10, № 1. – С. 2548208. – DOI: 10.1080/23746149.2025.2548208.
10. Исследование влияния вязкого заполнителя на механические свойства метаматериалов с отрицательным и положительным коэффициентом Пуассона при пробивании жестким ударником / С. Ю. Иванова [и др.] // *Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния*. – 2024. – 4 (62). – С. 62–75. – DOI: 10.37972/chgpu.2024.62.4.005. – EDN: SFQXCI.
11. Additive manufacturing of re-entrant structures: Well-tailored structures, unique properties, modelling approaches and real applications / W. T. Nugroho [и др.] // *Additive Manufacturing*. – 2023. – Т. 78. – С. 103829. – DOI: 10.1016/j.addma.2023.103829.
12. Скрипняк В. В., Чирков М. О., Скрипняк В. А. Моделирование механической реакции ауксетических метаматериалов на динамические воздействия // *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика*. – 2021. – № 2. – С. 144–152. – DOI: 10.15593/perm.mech/2021.2.13. – EDN: ELZBAF.
13. Contribution of tension–torsion coupling effect on elastic properties of chiral and anti-chiral structures / H. Tang [и др.] // *Thin-Walled Structures*. – 2023. – Т. 182. – С. 110199. – DOI: 10.1016/j.tws.2022.110199.
14. Geometric analysis and experimental studies of hexachiral structures / J. Plewa [и др.] // *Materials*. – 2025. – Т. 18, № 18. – С. 4344. – DOI: 10.3390/ma18184344.
15. Experimental characterization of nonlinear mechanical behavior and auxeticity in 3D-printed rotating-square auxetics with spatially variable materials / T. Paupst [и др.] // *Progress in Additive Manufacturing*. – 2025. – Т. 10. – С. 10783–10799. – DOI: 10.1007/s40964-025-01260-9.

16. Investigation and tailoring of rotating squares' and rectangles' auxetic structure behavior through computational simulations of 6082T6 Aluminum alloy structures / M. Elsamanty [и др.] // *Materials*. – 2023. – Т. 16, № 24. – С. 7597. – DOI: 10.3390/ma16247597.
17. Hassani F., Javanbakht Z., Malek S. Large deformation behavior and energy absorption of rotating square auxetics // *Composites Part B: Engineering*. – 2024. – Т. 283. – С. 111596. – DOI: 10.1016/j.compositesb.2024.111596.
18. Architectural design and additive manufacturing of mechanical metamaterials: a review / C. Lu [и др.] // *Engineering*. – 2022. – Т. 17, № 10. – С. 44–63. – DOI: 10.1016/j.eng.2021.12.023.
19. Hui W., Sihang X., Jianshan W. Disordered auxetic metamaterials architected by random peanut-shaped perturbations // *Materials & Design*. – 2021. – Т. 212. – С. 110291. – DOI: 10.1016/j.matdes.2021.110291.
20. Томин П. Ю. О понятии Representative elementary volume // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. – 2011. – № 13. – С. 1–23. – EDN: NKZHEY.
21. On dissipative effects in thermo-electrically coupled systems: Hill–Mandel-type homogenisation, asymptotic expansions and two-scale convergence / D. Güzel [и др.] // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. – 2026. – Т. 208. – С. 106427. – DOI: 10.1016/j.jmps.2025.106427.
22. Нассар М. Э. Численное исследование гомогенизации пьезоэлектрического композита с полыми сферическими металлическими включениями с использованием представительного объема, основанного на алгоритме случайной последовательной адсорбции // *Наука Юга России: достижения и перспективы : XVIII Ежегодная молодежная научная конференция : тезисы докладов*. – 2022. – С. 242. – EDN: ZPINWF.
23. Zona R., Minutolo V. Elastic to plastic lattice structure homogenization via Finite Element Limit Analysis // *Symmetry*. – 2025. – Т. 17, № 7. – С. 1120. – DOI: 10.3390/sym17071120.
24. Somnic J., Jo B. W. Status and challenges in homogenization methods for lattice materials // *Materials*. – 2022. – Т. 15, № 2. – С. 605. – DOI: 10.3390/ma15020605.
25. Kim J. E., Cho N. K., Park K. Computational homogenization of additively manufactured lightweight structures with multiscale topology optimization // *Journal of Computational Design and Engineering*. – 2022. – Т. 9, № 5. – С. 1602–1615. – DOI: 10.1093/jcde/qwac078.
26. Устенко А. Д. Исследование возможности применения микро-дилатационной теории упругости для моделирования метаматериалов с отрицательным коэффициентом Пуассона // *XLIII Гагаринские чтения : Материалы Международной молодежной научной конференции. Секция "Механика и моделирование материалов и технологий"*. – Москва : Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского Российской академии наук, 2017. – С. 79–80. – EDN: ZDTPQL.
27. Novel compliant mechanism-based auxetic metamaterial: Kinematic and experimental analysis / O. Ochoa [и др.] // *International Journal of Mechanical Sciences*. – 2024. – Т. 279. – С. 109478. – DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2024.109478.
28. Shitikova M. V., Soloviev I. A., Levchenko A. V. Experimental identification of the measure of internal friction in plates with a two-dimensional Auxetic structure // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*. – 2025. –

- Т. 21, № 1. – С. 177–187. – DOI: 10.22337/2587-9618-2025-21-1-177-187. – EDN: GJYCOC.
29. Multiscale experimental characterization of nonlinear mechanics and auxeticity in mechanical metamaterials with rotating squares / K. Z. Uddin [и др.] // *Composite Structures*. – 2025. – Т. 357. – С. 118931. – DOI: 10.1016/j.compstruct.2025.118931.
 30. Исследование влияния температуры на структуру, твердость, термостабильность и фазовые переходы стали X16H4Д4Б, применяемой для изготовления деталей методом аддитивных технологий / Л. В. Свинцова [и др.] // *Аддитивные технологии: настоящее и будущее : Материалы VII Международной конференции*. – Москва : Всероссийский научно-исследовательский институт авиационных материалов Национального исследовательского центра "Курчатовский институт", 2021. – С. 87–95. – EDN: FANEFL.
 31. Прогрессивные технологии изготовления деталей высокой сложности / А. И. Пронин [и др.]. – Нижний Новгород : ННГАСУ, 2025. – 88 с. – EDN: BFXIDL. – Учебное пособие.
 32. Пархоменко А. В., Амосов А. П., Пастухов А. М. Разработка и применение гранулята на основе порошка нержавеющей стали 12X18H10T для МИМ-технологии // *Вестник Сибирского государственного индустриального университета*. – 2025. – 3 (53). – С. 73–81. – DOI: 10.57070/2304-4497-2025-3(53)-73-81. – EDN: TLQPXP.
 33. Применение функциональных и адаптивных материалов, полученных способом 3D-печати (обзор) / Е. Н. Каблов [и др.] // *Труды ВИАМ*. – 2022. – 2 (108). – С. 32–51. – DOI: 10.18577/2307-6046-2022-0-2-32-51. – EDN: YXDAOX.
 34. Paushkin A., Saiyan S. Numerical study of the applicability of the Saint-Venant principle // *MATEC Web of Conferences*. – 2017. – Т. 117. – С. 00134. – DOI: 10.1051/mateconf/201711700134.
 35. Saiyan S., Paushkin A. Numerical study of the shear stress distribution in an I-beam in the load application zone // *Materials Science Forum*. – 2019. – Т. 974. – С. 659–664. – DOI: 10.4028/www.scientific.net/MSF.974.659.
 36. Саиян С. Г., Паушкин А. Г. Численное параметрическое исследование напряженно-деформированного состояния двутавровых балок с различными типами гофрированных стенок // *Вестник МГСУ*. – 2021. – Т. 16, № 6. – С. 676–687. – DOI: 10.22227/1997-0935.2021.6.676-687. – EDN: XDBUIJ.
 37. Timoshenko S. P. On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars // *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*. – 1921. – Т. 41, № 245. – С. 744–746.

REFERENCES

1. Studying the properties of metamaterials with a negative Poisson's ratio when punched by a rigid impactor / S. Y. Ivanova [et al.] // *Mechanics of Solids*. – 2023. – Vol. 58, no. 5. – P. 1536–1544. – DOI: 10.3103/S0025654423600897. – EDN: MLVQTM.
2. Mechanical metamaterials with negative Poisson's ratio: A review / L. Zhang [et al.] // *Engineering Structures*. – 2025. – Vol. 329. – P. 119838. – DOI: 10.1016/j.engstruct.2025.119838.

3. A review on the auxetic mechanical metamaterials and their applications in the field of applied engineering / V. Siniauskaya [et al.] // *Frontiers in Materials*. – 2024. – Vol. 11. – P. 1453905. – DOI: 10.3389/fmats.2024.1453905.
4. Mazaev A. V., Ajeneza O., Shitikova M. Auxetics materials: classification, mechanical properties and applications // *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. – 2020. – T. 747. – C. 012008. – DOI: 10.1088/1757-899X/747/1/012008.
5. *Chentsov A. V., Sokorenko A. V.* Investigation of models and mechanical properties of Miura-Ori structures // *Vestnik of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State*. – 2024. – 1 (59). – P. 39–49. – DOI: 10.37972/chgpu.2024.59.1.003. – EDN: CSJSRK. – (in Russian).
6. A new type of hierarchical honeycomb in-plane impact study / H. Song [et al.] // *Materials*. – 2021. – Vol. 14, no. 8. – P. 1917. – DOI: 10.3390/ma14081917.
7. Mechanical metamaterials with negative Poisson's ratio: A review / L. Zhang [et al.] // *Engineering Structures*. – 2025. – Vol. 329. – P. 119838. – DOI: 10.1016/j.engstruct.2025.119838.
8. *Akhmetshin L. R., Smolin I. Y.* Analysis of some methods of joining cells in a mechanical tetrachiral metamaterial // *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. – 2022. – No. 77. – P. 27–37. – DOI: 10.17223/19988621/77/3. – EDN: BLXDFJ. – (in Russian).
9. Recent developments of auxetic metamaterials / N. F. Mohamad Razali [et al.] // *Advances in Physics: X*. – 2025. – Vol. 10, no. 1. – P. 2548208. – DOI: 10.1080/23746149.2025.2548208.
10. Investigation of the effect of a viscous filler on the mechanical properties of metamaterials with negative and positive Poisson's ratio when punched by a rigid impactor / S. Y. Ivanova [et al.] // *Vestnik of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State*. – 2024. – 4 (62). – P. 62–75. – DOI: 10.37972/chgpu.2024.62.4.005. – EDN: SFQXCI. – (in Russian).
11. Additive manufacturing of re-entrant structures: Well-tailored structures, unique properties, modelling approaches and real applications / W. T. Nugroho [et al.] // *Additive Manufacturing*. – 2023. – Vol. 78. – P. 103829. – DOI: 10.1016/j.addma.2023.103829.
12. *Skripnyak V. V., Chirkov M. O., Skripnyak V. A.* Modeling the mechanical response of auxetic metamaterials to dynamic effects // *Bulletin of Perm National Research Polytechnic University. Mechanics*. – 2021. – No. 2. – P. 144–152. – DOI: 10.15593/perm.mech/2021.2.13. – EDN: ELZBAF. – (in Russian).
13. Contribution of tension–torsion coupling effect on elastic properties of chiral and anti-chiral structures / H. Tang [et al.] // *Thin-Walled Structures*. – 2023. – Vol. 182. – P. 110199. – DOI: 10.1016/j.tws.2022.110199.
14. Geometric analysis and experimental studies of hexachiral structures / J. Plewa [et al.] // *Materials*. – 2025. – Vol. 18, no. 18. – P. 4344. – DOI: 10.3390/ma18184344.
15. Experimental characterization of nonlinear mechanical behavior and auxeticity in 3D-printed rotating-square auxetics with spatially variable materials / T. Paupst [et al.] // *Progress in Additive Manufacturing*. – 2025. – Vol. 10. – P. 10783–10799. – DOI: 10.1007/s40964-025-01260-9.
16. Investigation and tailoring of rotating squares' and rectangles' auxetic structure behavior through computational simulations of 6082T6 Aluminum alloy structures /

- M. Elsamanty [et al.] // *Materials*. – 2023. – Vol. 16, no. 24. – P. 7597. – DOI: 10.3390/ma16247597.
17. *Hassani F., Javanbakht Z., Malek S.* Large deformation behavior and energy absorption of rotating square auxetics // *Composites Part B: Engineering*. – 2024. – Vol. 283. – P. 111596. – DOI: 10.1016/j.compositesb.2024.111596.
 18. Architectural design and additive manufacturing of mechanical metamaterials: a review / C. Lu [et al.] // *Engineering*. – 2022. – Vol. 17, no. 10. – P. 44–63. – DOI: 10.1016/j.eng.2021.12.023.
 19. Hui W., Sihang X., Jianshan W. Disordered auxetic metamaterials architected by random peanut-shaped perturbations // *Materials & Design*. – 2021. – T. 212. – C. 110291. – DOI: 10.1016/j.matdes.2021.110291.
 20. *Tomin P. Y.* On the representative elementary volume concept // *Preprints of the Keldysh Institute of Applied Mathematics*. – 2011. – No. 13. – P. 23. – EDN: NKZHEY. – (in Russian).
 21. On dissipative effects in thermo-electrically coupled systems: Hill–Mandel-type homogenisation, asymptotic expansions and two-scale convergence / D. Güzel [et al.] // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. – 2026. – Vol. 208. – P. 106427. – DOI: 10.1016/j.jmps.2025.106427.
 22. *Nassar M. E.* Numerical investigation of homogenization of a piezoelectric composite with hollow spherical metallic inclusions using a representative volume based on the random sequential adsorption algorithm // *Science of the South of Russia: Achievements and Prospects: XVIII Annual Youth Scientific Conference: Abstracts*. – Rostov-on-Don : Federal Research Centre the Southern Scientific Centre of the Russian Academy of Sciences, 2022. – P. 242. – (in Russian).
 23. *Zona R., Minutolo V.* Elastic to plastic lattice structure homogenization via Finite Element Limit Analysis // *Symmetry*. – 2025. – Vol. 17, no. 7. – P. 1120. – DOI: 10.3390/sym17071120.
 24. *Somnic J., Jo B. W.* Status and challenges in homogenization methods for lattice materials // *Materials*. – 2022. – Vol. 15, no. 2. – P. 605. – DOI: 10.3390/ma15020605.
 25. *Kim J. E., Cho N. K., Park K.* Computational homogenization of additively manufactured lightweight structures with multiscale topology optimization // *Journal of Computational Design and Engineering*. – 2022. – Vol. 9, no. 5. – P. 1602–1615. – DOI: 10.1093/jcde/qwac078.
 26. *Ustenko A. D.* Investigation of the possibility of applying the micro-dilatation theory of elasticity for modeling metamaterials with a negative Poisson’s ratio // *XLIII Gagarin Readings: Proceedings of the International Youth Scientific Conference. Section “Mechanics and Modeling of Materials and Technologies”*. – Moscow : Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, 2017. – P. 79–80. – EDN: ZDTPQL. – (in Russian).
 27. Novel compliant mechanism-based auxetic metamaterial: Kinematic and experimental analysis / O. Ochoa [et al.] // *International Journal of Mechanical Sciences*. – 2024. – Vol. 279. – P. 109478. – DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2024.109478.
 28. *Shitikova M. V., Soloviev I. A., Levchenko A. V.* Experimental identification of the measure of internal friction in plates with a two-dimensional auxetic structure // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*. – 2025. –

- Vol. 21, no. 1. – P. 177–187. – DOI: 10.22337/2587-9618-2025-21-1-177-187. – EDN: GJYCOC.
29. Multiscale experimental characterization of nonlinear mechanics and auxeticity in mechanical metamaterials with rotating squares / K. Z. Uddin [et al.] // *Composite Structures*. – 2025. – Vol. 357. – P. 118931. – DOI: 10.1016/j.compstruct.2025.118931.
30. Investigation of the effect of temperature on the structure, hardness, thermal stability, and phase transitions of Kh16N4D4B steel used for manufacturing parts by additive technologies / L. V. Svintsova [et al.] // *Additive Technologies: Present and Future: Proceedings of the VII International Conference*. – Moscow : All-Russian Research Institute of Aviation Materials of the Kurchatov Institute National Research Centre, 2021. – P. 87–95. – EDN: FAHEFL. – (in Russian).
31. Progressive technologies for manufacturing highly complex parts / A. I. Pronin [et al.]. – Nizhny Novgorod : NNGASU, 2025. – 88 p. – EDN: BFXIDL. – Textbook (in Russian).
32. *Parkhomenko A. V., Amosov A. P., Pastukhov A. M.* Development and application of granulate based on 12Kh18N10T stainless steel powder for MIM technology // *Bulletin of the Siberian State Industrial University*. – 2025. – 3 (53). – P. 73–81. – DOI: 10.57070/2304-4497-2025-3(53)-73-81. – EDN: TLQXPX. – (in Russian).
33. Application of functional and adaptive materials obtained by 3D printing (review) / E. N. Kablov [et al.] // *Proceedings of VIAM*. – 2022. – 2 (108). – P. 32–51. – DOI: 10.18577/2307-6046-2022-0-2-32-51. – EDN: YXDAOX. – (in Russian).
34. *Paushkin A., Saiyan S.* Numerical study of the applicability of the Saint-Venant principle // *MATEC Web of Conferences*. – 2017. – Vol. 117. – P. 00134. – DOI: 10.1051/matecconf/201711700134.
35. *Saiyan S., Paushkin A.* Numerical study of the shear stress distribution in an I-beam in the load application zone // *Materials Science Forum*. – 2019. – Vol. 974. – P. 659–664. – DOI: 10.4028/www.scientific.net/MSF.974.659.
36. *Saiyan S. G., Paushkin A. G.* Numerical parametric study of the stress-strain state of I-beams with various types of corrugated webs // *Vestnik MGSU*. – 2021. – Vol. 16, no. 6. – P. 676–687. – DOI: 10.22227/1997-0935.2021.6.676-687. – EDN: XDBUIJ. – (in Russian).
37. Timoshenko S. P. On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars // *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*. – 1921. – T. 41, № 245. – C. 744–746.