

Н. И. Петров

ПОЛИНОМИАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ ЛИНЕАРИЗИРОВАННЫХ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ МАЛЫХ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ В ПОЛЯРНЫХ КООРДИНАТАХ

Приволжский институт (филиал) МАДИ, г. Чебоксары, Россия

Аннотация. Полиномиальные решения ряда задач в теории упругости и пластичности рассмотрены в работах [1-5]. В настоящей работе рассматривается полиномиальное решение линеаризованных уравнений теории малых упругопластических деформаций в случае плоской задачи в полярных координатах.

Ключевые слова: линеаризация, растяжение, напряжение, деформация, функция Бесселя.

Петров Николай Ильич, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры информатики и технологии транспортных процессов; e-mail: ni.petrov46@mail.ru



для цитирования: Петров Н. И. Полиномиальное решение линеаризованных уравнений теории малых упругопластических деформаций в полярных координатах // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2026. № 1(67). С. 89–98. DOI: 10.37972/chgpu.2026.67.1.006. EDN: JDPHJX

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0).

N. I. Petrov

POLYNOMIAL SOLUTION OF LINEARIZED EQUATIONS OF THE THEORY OF SMALL ELASTOPLASTIC DEFORMATIONS IN POLAR COORDINATES

Volga Institute (branch) MADI, Cheboksary, Russia

Abstract. Polynomial solutions of a number of problems in the theory of elastoplasticity are considered in [1-3]. In this paper, we consider a polynomial solution of the linearized equations of the theory of small elastoplastic deformations in the case of a plane problem in polar coordinates.

Keywords: linearization, stretching, stress, deformation, Bessel function

Nikolay I. Petrov, Candidate Sci. Phys. & Math., Assoc. Prof.; e-mail: ni.petrov46@mail.ru



to cite this article: Petrov N.I. Polynomial solution of linearized equations of the theory of small elastoplastic deformations in polar coordinates // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2026. No 1(67). p. 89–98. DOI: 10.37972/chgpu.2026.67.1.006

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение. Соотношения теории малых упругопластических деформаций [1—5] в полярной системе координат имеют вид

$$\sigma_r - \sigma_\theta = \frac{2}{3} \frac{\sigma_i}{e_i} (e_r - e_\theta), \quad \tau_{r\theta} = \frac{2}{3} \frac{\sigma_i}{e_i} e_{r\theta} \quad (1)$$

где согласно степенному упрочнению

$$\sigma_i = A e_i^k \quad (A, k - \text{const}) \quad (2)$$

σ_i, e_i - соответственно интенсивность напряжения и интенсивность деформаций, определяемые соотношениями

$$\sigma_i = \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + 4\tau_{r\theta}^2}, \quad e_i = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{(e_r - e_\theta)^2 + 4e_{r\theta}^2} \quad (3)$$

В силу (2) и условия несжимаемости, соотношения (1) и (3) примут вид

$$\sigma_r - \sigma_\theta = \frac{4}{3} A e_i^{k-1} e_r, \quad \tau_{r\theta} = \frac{2}{3} A e_i^{k-1} e_{r\theta} \quad (4)$$

$$\sigma_i = \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + 4\tau_{r\theta}^2}, \quad e_i = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{e_r^2 + e_{r\theta}^2} \quad (5)$$

Линеаризуем компоненты напряжений и перемещений по безразмерному малому параметру δ

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0 + \delta \sigma'_{ij}, \quad e_{ij} = e_{ij}^0 + \delta e'_{ij} \quad (6)$$

где индекс градус наверху приписан компонентами невозмущенного состояния, а индекс штрих - компонентам возмущения.

В невозмущенном состоянии в трубе, находящейся под действием внутреннего и внешнего нормальных давлений, перемещение вдоль оси θ $u_\theta^0 = 0$, а $u_r^0 = u_r^0(r)$

Тогда по формулам Коши получим

$$e_r^0 = \frac{\partial u_r^0}{\partial r}, \quad e_\theta^0 = \frac{u_r^0}{r}, \quad e_{r\theta}^0 = 0 \quad (7)$$

Используя соотношение (7) и условия несжимаемости находим

$$u_r^0 = \frac{C_l}{r}, \quad e_r^0 = -e_\theta^0 = \frac{-C_l}{r^2}, \quad C_l > 0 \quad (8)$$

Используя соотношения (5), (6) и (7) получим

$$e_i^0 = \frac{2}{\sqrt{3}} |e_r^0|, \quad e_i' = \frac{2}{\sqrt{3}} e_r' \quad (9)$$

Из соотношении (4) - (7) имеем

$$\tau_{r\theta}^0 = 0, \quad \sigma_i^0 = \frac{\sqrt{3}}{2} (\sigma_r^0 - \sigma_\theta^0), \quad \sigma_i' = \frac{\sqrt{3}}{2} (\sigma_r' - \sigma_\theta'), \quad \tau_{r\theta}' = 2Br^q e_{r\theta}' \quad (10)$$

$$q = 2(l - k), \quad B = \frac{A}{3} \left(\frac{2C_l}{\sqrt{3}} \right)^{k-l} \quad (11)$$

Используя соотношения (6), (8), (9) формулы (4) приведем к виду

$$\sigma_r^0 - \sigma_\theta^0 = -4BC_l r e^{-2k} \quad (12)$$

$$\sigma'_r = \sigma' + 2Bkr^q e'_r, \quad \sigma'_\theta = \sigma' - 2Bkr^q e'_r \quad (13)$$

Подставив (12) в уравнение равновесия в основном (нулевом) состоянии

$$\frac{\partial \sigma_r^0}{\partial r} + \frac{\sigma_r^0 - \sigma_\theta^0}{r} = 0 \quad (14)$$

получим

$$\sigma_r^0 = -\frac{2BC_l}{k} r^{-2k} + C_2, \quad C_2 = \text{const} \quad (15)$$

Тогда

$$\sigma_\theta^0 = -\frac{2BC_l}{k} r^{-2k} (l - 2k) + C_2 \quad (16)$$

Удовлетворим уравнению несжимаемости полагая

$$u'_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \eta}{\partial \theta}, \quad u'_\theta = \frac{\partial \eta}{\partial r} \quad (17)$$

Следовательно

$$e'_r = \frac{\partial u'_r}{\partial r} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial \eta}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \eta}{\partial r \partial \theta}$$

$$e'_{r\theta} = \frac{1}{2} \left[r \frac{\partial}{\partial r} \frac{u'_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u'_r}{\partial \theta} \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 \eta}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \eta}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial \theta^2} \right] \quad (18)$$

Используя формулы (13), (18) и (10), получим

$$\sigma'_r = \sigma' + B(2 - q) \left[r^{q-2} \frac{\partial \eta}{\partial \theta} - r^{q-1} \frac{\partial^2 \eta}{\partial \theta \partial r} \right] \quad (19)$$

$$\sigma'_\theta = \sigma' - B(2 - q) \left[r^{q-2} \frac{\partial \eta}{\partial \theta} - r^{q-1} \frac{\partial^2 \eta}{\partial \theta \partial r} \right] \quad (20)$$

$$\tau'_{r\theta} = B \left[r^q \frac{\partial^2 \eta}{\partial r^2} - r^{q-1} \frac{\partial \eta}{\partial r} - r^{q-2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial r \partial \theta^2} \right] \quad (21)$$

Уравнения равновесия в первом приближении имеют вид

$$\frac{\partial \sigma'_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau'_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma'_r - \sigma'_\theta}{r} = 0$$

$$\frac{\partial \tau'_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma'_\theta}{\partial \theta} + \frac{2\tau'_{r\theta}}{r} = 0$$

Подставив (19), (20), (21) в эти уравнения получим

$$\frac{\partial \sigma'}{\partial r} + B \left[(2-q)qr^{q-3} \frac{\partial \eta}{\partial r} + (q^2 - 2q - 1)r^{q-2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial r \partial \theta} + (q-1)r^{q-1} \frac{\partial^3 \eta}{\partial r^2 \partial \theta} - r^{q-3} \frac{\partial^3 \eta}{\partial r \partial \theta^3} \right] = 0 \quad (22)$$

Уравнение (22) сводится к дифференциальному уравнению четвертого порядка в частных производных [4]

$$\nabla_1 \eta + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \nabla_2 \eta + \frac{\partial^4 \eta}{\partial \theta^4} = 0, \quad (23)$$

где операторы ∇_1 и ∇_2 имеют вид

$$\nabla_1 = r^4 \frac{\partial^4}{\partial r^4} + 2(q+1)r^3 \frac{\partial^3}{\partial r^3} + (q^2-1)r^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} - (q^2-1)r \frac{\partial}{\partial r}, \quad (24)$$

$$\nabla_2 = 2(1-q)r^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} - 2(1-q)^2 r \frac{\partial}{\partial r} + (q-2)^2. \quad (25)$$

Рассмотрим толстостенную трубу радиусов a и b ($a < b$), находящейся под действием внутреннего давления p и содержащую выточки на внутренней и внешней поверхностях трубы. Уравнение выточек имеют вид

$$r = 1 + \delta c_1 (\beta_1^2 - \theta^2) \quad (26)$$

и

$$r = \alpha + \delta c_2 (\theta^2 - \beta_2^2) \quad (27)$$

на внешней и внутренней поверхностях соответственно

где β_1 и β_2 - пологость выточек, а c_1 и c_2 - глубина выточек. Величины, имеющие размерность длины, отнесем к внешнему радиусу трубы b и $\alpha = \alpha/b$.

С учетом уравнений выточек (26) и (27) имеем линеаризованные граничные условия [4]

$$\sigma'_r + \frac{\partial \sigma_r^0}{\partial r} c_1 (\beta_1^2 - \theta^2) = 0, \quad (r = 1)$$

$$\tau'_{r\theta} - 2(\sigma_r^0 - \sigma_\theta^0) c_1 \theta = 0 \quad (28)$$

$$\sigma'_r - \frac{\partial \sigma_r^0}{\partial r} c_2 (\beta_2^2 - \theta^2) = 0, \quad (r = \alpha)$$

$$\tau'_{r\theta} - \frac{2}{\alpha} (\sigma_r^0 - \sigma_\theta^0) c_2 \theta = 0 \quad (29)$$

Подставив соотношения (15) и (16) в граничные условия в невозмущенном состоянии

$$\sigma_r^0(r=1)=0, \quad \sigma_r^0(r=\alpha)=-p \quad (30)$$

для C_1 и C_2 получим выражения

$$C_1 = \frac{p\alpha^2}{2B(1-\alpha^2)}, \quad C_2 = \frac{p\alpha^2}{1-\alpha^2} \quad (31)$$

(15) и (16) примут вид

$$\sigma_r^0 = \frac{p\alpha^2(r^2-1)}{r^2(1-\alpha^2)}, \quad \sigma_\theta^0 = \frac{p\alpha^2(r^2+1)}{r^2(1-\alpha^2)} \quad (32)$$

и будем иметь

$$\sigma_r^0 - \sigma_\theta^0 = -2p \frac{\alpha^2 r}{r^2(1-\alpha^2)}, \quad \frac{\partial \sigma_r^0}{\partial r} = 2p \frac{\alpha^2}{r^3(1-\alpha^2)} \quad (33)$$

Поиск решения уравнения (23) в виде

$$\eta = R_3 \theta^3 + R_1 \theta \quad (34)$$

сведется к решению двух уравнений

$$\nabla_1 R_3 = 0, \quad \nabla_1 R_1 + 6\nabla_2 R_3 = 0 \quad (35)$$

В результате получим

$$\begin{aligned} R_3 &= A_3 r^2 + B_3 r^{2-q} + C_3 r^{-q} + D_3 \\ R_1 &= A_1 r^2 + B_1 r^{2-q} + C_1 r^{-q} + D_1 - \frac{3(4-3q^2)A_3}{2q(q+2)} r^2 (2 \ln r - 1) + \\ &+ \frac{3B_3}{q} r^{2-q} ((2-q) \ln r - 1) + \frac{3(4-3q^2)C_3}{q^2(q+2)} r^{-q} (q \ln r + 1) + \frac{3(q-2)D_3}{q} \ln r \end{aligned} \quad (36)$$

где $q \neq 0$, а $k \neq 1$. Из соотношений (36), (34) и (19)-(22) находим

$$\begin{aligned} \sigma_r' &= B \left[\frac{q(2-q)}{2} B_3 \theta^4 - \left(q(q-2)B_1 + \frac{6(q-2)}{q} A_3 r^q + \right. \right. \\ &+ \frac{3(3q^2) - 6q^2 - 8q + 8}{2q} B_3 - 3(q-2)^2 B_3 \ln r + \frac{3(q^2 - 4q - 4)}{2} C_3 r^{-2} - \\ &- 6D_3 r^{q-2} \Big) \theta^2 - \frac{2(q-2)}{q} A_1 r^q - (q-2)(q-1)B_1 + (q-2)^2 B_1 \ln r - \\ &- \frac{q^2 - 4q - 4}{2} C_1 r^{-2} + 2D_1 r^{q-2} + \frac{6(4-3q^2)(q-2)}{q^2(q+2)} A_3 r^q \ln r - \\ &- \frac{3(q-2)(3q^3 - 2q^2 + 8)}{q^3(q+2)} A_3 r^q - \frac{3(q-2)^3}{2q} B_3 \ln^2 r - 3(q-4)B_3 \ln r + \frac{3(q-2)}{q} B_3 - \\ &- \frac{3(4-3q^2)(q^2 - 4q - 4)}{2q(q+2)} C_3 r^{-2} \ln r + \frac{3(3q^5 - 6q^4 - 8q^3 - 24q^2 + 32)}{4q^2(q+2)} C_3 r^{-2} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{6(q-2)}{q} D_3 r^{q-2} \ln r - \frac{6(q-4)(q-1)}{q(q-2)} D_3 r^{q-2} \Big] \\
\sigma'_\theta = B & \left[\frac{q(2-q)}{2} B_3 \theta^4 - \left(q(q-2) B_1 + \frac{6(q-2)(q+1)}{q} A_3 r^q - \frac{3(q-2)^3}{2q} B_3 - \right. \right. \\
& - 3(q-2)^2 B_3 \ln r - \frac{3(3q^2-4)}{2} C_3 r^{-2} - 6(q-1) D_3 r^{q-2} \Big) \theta^2 - \\
& - \frac{2(q-2)(q+1)}{q} A_1 r^q - (q-2)(1-q) B_1 \ln r - \frac{3(3q^2-4)}{2} C_1 r^{-2} + \\
& + 2(q-1) D_1 r^{q-2} + \frac{6(4-3q^2)(q-2)(q+1)}{q^2(q+2)} A_3 r^q \ln r - \\
& - \frac{3(q-2)(3q^4+3q^3-6q^2+8)}{q^3(q+2)} A_3 r^q - \frac{3(q-2)^3}{2q} B_3 \ln^2 r - \\
& - \frac{3(2q^3-9q^2+12q-8)}{q} B_3 \ln r - \frac{3(q-2)}{q} B_3 - \frac{3(3q^2-4)^2}{2q(q+2)} C_3 r^{-2} \ln r + \\
& - \frac{3(3q^5-6q^4-32q^3+24q^2+32q-32)}{4q^2(q+2)} C_3 r^{-2} + \\
& + \frac{6(q-2)(q-1)}{q} D_3 r^{q-2} \ln r - \frac{6(q^3-5q^2+7q-4)}{q(q-2)} D_3 r^{q-2} \Big] \\
\tau'_{r\theta} = B & \left[\left(q(q-2) B_3 + q(q+2) C_3 r^{-2} \right) \theta^3 + \left(q(q-2) B_1 + q(q+2) C_1 r^{-2} + \right. \right. \\
& + \frac{12(q-2)(q+1)}{q(q+2)} A_3 r^q - 3(q-2)^2 B_3 \ln r + \frac{3(q^2-6q+4)}{q} B_3 + \\
& + 3(4-3q^2) C_3 r^{-2} \ln r + \frac{3(3q+4)(q-2)}{(q+2)} C_3 r^{-2} - \frac{12(q-1)}{q} D_3 r^{q-2} \Big) \theta \Big]
\end{aligned}$$

Подставив полученные соотношения в граничные условия (28), (29) и определим коэффициенты

$$A_3 = \frac{pq\alpha(q+2) [c_2 [q(1-\alpha^2) + 2(\alpha^q-1)] + c_1 [q\alpha^{q+1}(1-\alpha^2) + 2\alpha^3(\alpha^q-1)]]}{3B(2-q)(1-\alpha^2) [q^2\alpha^q(\alpha^2-1)^2 - 4\alpha^2(\alpha^q-1)^2]}$$

$$D_3 = \frac{pq\alpha [c_2 [q(1-\alpha^2) + 2\alpha^2(\alpha^q-1)] + c_1 [q\alpha^{q+3}(1-\alpha^2) + 2\alpha^3(\alpha^q-1)]]}{3B(1-\alpha^2) [q^2\alpha^q(\alpha^2-1)^2 - 4\alpha^2(\alpha^q-1)^2]}$$

$$\begin{aligned}
A_1 = & \frac{q}{2(q-2)\alpha^{q-2}(1-\alpha^2)} \left[B_1 \left((q-2)(q-1)(1-\alpha^{q-2}) - (q-2)^2 \ln \alpha \right) + \right. \\
& + C_1 \frac{(q^2-4q-4)(1-\alpha^q)}{2\alpha^2} + A_3 \left(\frac{3(q-2)(3q^3-2q^2+8)\alpha^{q-2}}{q^3(q+2)} (\alpha^2-1) - \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{6(4-3q^2)(q-2)}{q^3(q+2)}\alpha^q \ln \alpha \Big) + D_3 \frac{6(2-q)}{q} \alpha^{q-2} \ln \alpha + \frac{2p}{B\alpha(1-\alpha^2)} (\alpha^q c_1 \beta_1^2 + c_2 \beta_2^2) \Big] \\
B_1 &= \frac{2p\alpha \left[c_2 (2q\alpha^q(\alpha^2-1) - 4(\alpha^q-1)) + c_1 (2q\alpha^{q+1}(\alpha^2-1) - 4\alpha^q(\alpha^q-1)) \right]}{Bq(2-q)(1-\alpha^2) [q^2\alpha^q(\alpha^2-1)^2 - 4\alpha^2(\alpha^q-1)^2]} \\
C_1 &= \frac{2p\alpha \left[c_2 (2q\alpha^q(1-\alpha^2) - 4\alpha^2(\alpha^q-1)) + c_1 (2q\alpha^{q+3}(1-\alpha^2) + 4\alpha^{q+3}(\alpha^q-1)) \right]}{Bq(2-q)(1-\alpha^2) [q^2\alpha^q(\alpha^2-1)^2 - 4\alpha^2(\alpha^q-1)^2]} \\
D_1 &= \frac{1}{2\alpha^{q-2}(1-\alpha^2)} \left[B_1 ((q-2)(q-1)(1-\alpha^q) - (q-2)^2 \ln \alpha) + \right. \\
& + C_1 \frac{(q^2-4q-4)}{2\alpha^2} (1-\alpha^{q+2}) + A_3 \left(\frac{6(q-2)(3q^2-4)}{q^3(q+2)} \alpha^q \ln \alpha + \right. \\
& + D_3 \left(\frac{6(q^2-5q+4)}{q(q-2)} \alpha^{q-2}(\alpha^2-1) - \frac{6(q-2)}{q} \alpha^{q-2} \ln \alpha \right) + \\
& \left. \left. - \frac{2p}{B\alpha(1-\alpha^2)} (\alpha^{q+3} c_1 \beta_1^2 + c_2 \beta_2^2) \right] \right]
\end{aligned}$$

Для упругого материала $k = 1$ и $q = 0$. Следовательно соотношения (24) и (25) примут вид

$$\nabla_1 = r^4 \frac{\partial^4}{\partial r^4} + 2r^3 \frac{\partial^3}{\partial r^3} - r^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} + r \frac{\partial}{\partial r} \quad (37)$$

$$\nabla_2 = 2r^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} - 2r \frac{\partial}{\partial r} + 4 \quad (38)$$

Решение уравнения (23), ищем в виде (34) и определяются соотношениями

$$R_3 = A_3 r^2 \ln r + B_3 r^2 + C_3 \ln r + D_3$$

$$\begin{aligned}
R_1 &= A_1 r^2 \ln r + B_1 r^2 + C_1 \ln r + D_1 - A_3 r^2 \ln^3 r - 3B_3 r^2 \ln^2 r + \\
& + 3B_3 r^2 \ln r - \frac{3}{2} B_3 r^2 - C_3 \ln^3 r - 3D_3 \ln^2 r
\end{aligned} \quad (39)$$

Из соотношения (39), (34) и (19)-(22) находим

$$\begin{aligned}
\sigma'_r &= B \left[-A_3 \theta^4 + \left(-2A_1 + 6A_3 (\ln^2 r + \ln r - 1) + 12B_3 \ln r + \right. \right. \\
& + \frac{6C_3}{r^2} (\ln r + 1) + \frac{6D_3}{r^2} \Big) \theta^2 + 2A_1 (\ln^2 r + \ln r - 1) + 2B_1 (2 \ln r - 1) + \\
& + \frac{2C_1}{r^2} (\ln r - 1) + \frac{2D_1}{r^2} - A_3 \ln^2 r (\ln^2 r + 2 \ln r + 3) - B_3 (4 \ln^3 r - 3 \ln r + 3) -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{2C_3 \ln^2 r}{r^2}(\ln r - 3) - \frac{6D_3 \ln r}{r^2}(\ln r - 2) \Big] \\
\sigma'_\theta = & B \left[\left(-2A_1 + 12B_3(\ln r + 1) - \frac{6D_3}{r^2} \right) \theta^2 + \right. \\
& + 2A_1(\ln^2 r + 3 \ln r + 1) + 2B_1(2 \ln r + 1) - \frac{2C_1}{r^2}(\ln r - 1) - \frac{2D_1}{r^2} - \\
& \left. - B_3(4 \ln^3 r + 12 \ln^2 r - 3) + \frac{6D_3 \ln r}{r^2}(\ln r - 2) \right] \\
\tau'_{r\theta} = & B \left[\left(2A_3 - \frac{2C_3}{r^2} \right) \theta^3 + \left(2A_1 - \frac{2C_1}{r^2} - 6A_3 \ln r(\ln r + 2) - \right. \right. \\
& \left. \left. - 6B_3(2 \ln r + 1) + \frac{6C_3 \ln r}{r^2}(\ln r - 2) + \frac{12D_3}{r^2}(\ln r - 1) \right) \theta \right] \quad (40)
\end{aligned}$$

Коэффициенты $A_3, B_3, C_3, D_3, A_1, B_1, C_1, D_1$ определяются из граничных условий (28), (29) и принимают вид $A_3 = C_3 = 0$

$$\begin{aligned}
B_3 = & \frac{-pc_1\alpha^2(\alpha^2 - 2\alpha^2 \ln \alpha - 1) - pc_2\alpha(\alpha^2 - 2 \ln \alpha - 1)}{3B(1 - \alpha^2) \left[(1 - \alpha^2)^2 - 4\alpha^2 \ln^2 \alpha \right]} \\
D_3 = & \frac{-pc_1\alpha^4(1 - \alpha^2 + 2 \ln \alpha) - pc_2\alpha(1 - \alpha^2 - 2\alpha^2 \ln \alpha)}{3B(1 - \alpha^2) \left[(1 - \alpha^2)^2 - 4\alpha^2 \ln^2 \alpha \right]} \\
C_1 = & \frac{-4pc_1\alpha^4 \ln^2 \alpha - pc_2\alpha \ln \alpha(1 - \alpha^2)}{B(1 - \alpha^2) \left[(1 - \alpha^2)^2 - 4\alpha^2 \ln^2 \alpha \right]} \\
A_1 = & \frac{-pc_1\alpha^2(1 - \alpha^2 - 4\alpha^2 \ln^2 \alpha + 2\alpha^2 \ln \alpha) - pc_2\alpha(1 - \alpha^2 + 2\alpha^2 \ln \alpha)}{B(1 - \alpha^2) \left[(1 - \alpha^2)^2 - 4\alpha^2 \ln^2 \alpha \right]} \\
B_1 = & \frac{-\alpha^2}{(1 - \alpha^2 + 2\alpha^2 \ln \alpha)B(1 - \alpha^2) \left[(1 - \alpha^2)^2 - 4\alpha^2 \ln^2 \alpha \right]} \cdot \\
& \cdot \left(-pc_1 \left[-\frac{8}{3}\alpha^2 \ln^3 \alpha(\alpha^2 \ln \alpha + \alpha^2 - 1) + 2\alpha^2 \ln \alpha(\alpha^2 \ln \alpha - \alpha^2 + 1) + \frac{1}{2}(1 - \alpha^2)^2 \right] - \right. \\
& - pc_2 \left[-\frac{4}{3}\alpha \ln^3 \alpha(\alpha^2 - 1 + \ln \alpha) + \alpha^3 \ln \alpha(\ln \alpha - 1) + \frac{1}{2}(2 \ln^2 \alpha + 2 \ln \alpha + 1 + \alpha^4 - 2\alpha^2)/\alpha \right] - \\
& \left. - \left[(1 - \alpha^2)^2 - 4\alpha^2 \ln^2 \alpha \right] (pc_1\beta_1^2 + pc_2\beta_2^2/\alpha) \right) \\
D_1 = & \frac{-\alpha^2}{(1 - \alpha^2 + 2\alpha^2 \ln \alpha)B(1 - \alpha^2) \left[(1 - \alpha^2)^2 - 4\alpha^2 \ln^2 \alpha \right]} \cdot \\
& \cdot \left(-pc_1 \left[-\frac{8}{3}\alpha^2 \ln^3 \alpha(\alpha^2 \ln \alpha + \alpha^2 - 1) - 4\alpha^2 \ln \alpha \right] - \right.
\end{aligned}$$

$$-pc_2 \left[-\frac{4}{3} \alpha \ln^3 \alpha (\alpha^2 - 1 + \ln \alpha) + \alpha^3 \ln^2 \alpha + \frac{1}{2} (\alpha \ln^2 \alpha + 1 - 4\alpha^2 \ln^2 \alpha) / \alpha \right] - \\ - \left[(1 - \alpha^2)^2 - 4\alpha^2 \ln^2 \alpha \right] (pc_1 \beta_1^2 \alpha^2 (1 - 2 \ln \alpha) + \frac{1}{2} pc_2 \beta_2^2) \Bigg)$$

ДОПОЛНИТЕЛЬНО

Вклад авторов. 100%.

Конфликт интересов. Автор декларирует отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

Источник финансирования. Авторы заявляют об отсутствии внешнего финансирования при проведении исследования.

ADDITIONAL INFORMATION

Authors' contribution. 100%.

Competing interests. The author declare that they have no competing interests.

Funding. This study was not supported by any external sources of funding.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тимошенко С. П. Теория упругости. – Москва : Наука, 1937. – 452 с.
2. Ивлев Д. Д., Ершов Л. В. Метод возмущений в теории упругопластических деформаций. – Москва : Наука, 1978. – 208 с.
3. Захарова Т. Л. Об образовании шейки при растяжении идеально пластической изотропной полосы // ДАН. – 1998. – Т. 358, № 3. – С. 340–342.
4. Михайлова М. В., Петров Н. И. Применение полиномиальных решений линеаризированных уравнений теории малых упругопластических деформаций к задаче о трубе из упругого материала // Известия ИТА ЧР. – 1997–1998. – 3(8)–2(11). – С. 61–67.
5. Ильюшин А. А. Пластичность. – Москва : Гостехиздат, 1948. – 376 с.

REFERENCES

1. *Timoshenko S. P.* Theory of Elasticity. – Moscow : Nauka, 1937. – 452 p.
2. *Ivlev D. D., Ershov L. V.* Perturbation Method in the Theory of Elastic-Plastic Deformations. – Moscow : Nauka, 1978. – 208 p.
3. *Zakharova T. L.* On Neck Formation in Tension of an Ideally Plastic Isotropic Strip // *Doklady Akademii Nauk.* – 1998. – Vol. 358, no. 3. – P. 340–342.
4. *Mikhaylova M. V., Petrov N. I.* Application of Polynomial Solutions of the Linearized Equations of the Theory of Small Elastic-Plastic Deformations to the Problem of a Tube Made of Elastic Material // *Izvestiya ITA ChR.* – 1997–1998. – 3(8)–2(11). – P. 61–67.
5. *Ilyushin A. A.* Plasticity. – Moscow : Gostekhizdat, 1948. – 376 p.