

М. В. Петров, О. А. Алексеева, Б. В. Михайлов

ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ ТОНКОСТЕННЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК СРЕДНЕЙ ДЛИНЫ ПРИ ПРЯМОМ ИЗГИБЕ

Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, Чебоксары, Россия

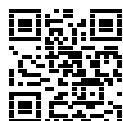
Аннотация. Теоретически и экспериментально исследован процесс потери устойчивости тонкостенных цилиндрических оболочек средней длины при прямом изгибе в зонах максимальных нормальных и касательных напряжений. Рекомендован график зависимости критических сил от длины цилиндрической оболочки для определения потери устойчивости в зонах максимальных нормальных и касательных напряжений. Экспериментально потеря устойчивости при прямом изгибе в большинстве случаев наблюдалась в зоне максимальных нормальных напряжений. По мере укорочения длины оболочек средней длины, влияние поперечной силы увеличивается, что сказывается на потере местной устойчивости в виде одновременно появления вмятин в зонах максимальных нормальных и касательных напряжений. При дальнейшем нагружении тонкостенной цилиндрической оболочки средней длины происходит полная потеря устойчивости. Потеря устойчивости происходит образованием впадин, расположенных по полуокружности в один ряд в обе стороны к растянутой зоне.

Ключевые слова: цилиндрическая оболочка, прямой изгиб, устойчивость, начальные несовершенства, поправочные коэффициенты, ожидаемая критическая сила, радиус срединной поверхности.

Петров Михаил Васильевич, доктор технических наук, профессор, профессор кафедры строительных конструкций; e-mail: 21pmv@mail.ru; <https://orcid.org/0000-0002-7355-8553>; AuthorID: 831162

Алексеева Олеся Анатольевна, аспирант кафедры строительных конструкций; e-mail: aask21@yandex.ru; <https://orcid.org/0009-0001-1155-8013>; AuthorID: 1250072

Михайлов Борис Васильевич, кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры строительных конструкций; e-mail: boris.mihaylov.63@mail.ru; <https://orcid.org/0000-0001-6511-6985>; AuthorID: 780012



для цитирования: Петров М. В., Алексеева О. А., Михайлов Б. В. Теоретическое и экспериментальное исследование потери устойчивости тонкостенных цилиндрических оболочек средней длины при прямом изгибе // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2026. № 1(67). С. 99–112. DOI: 10.37972/chgpu.2026.67.1.007. EDN: MRYKNN

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0).

M. V. Petrov, O. A. Alekseeva, B. V. Mikhailov

THEORETICAL AND EXPERIMENTAL STUDY OF THE LOSS OF STABILITY OF THIN-WALLED CYLINDRICAL SHELLS OF MEDIUM LENGTH UNDER DIRECT BENDING

I.N. Ulianov Chuvash State University, Cheboksary, Russia

Abstract. The process of loss of stability of thin-walled cylindrical shells of medium length under direct bending in the zones of maximum normal and tangential stresses is theoretically and experimentally investigated. A graph of the dependence of critical forces on the length of a cylindrical shell is recommended to determine the loss of stability in the zones of maximum normal and tangential stresses. In most cases, the loss of stability during straight bending was experimentally observed in the zone of maximum normal stresses. As the length of the medium-length shells decreases, the effect of the lateral force increases, resulting in the loss of local stability in the form of simultaneous indentation in the zones of maximum normal and tangential stresses. Further loading of the medium-length thin-walled cylindrical shell leads to a complete loss of stability. The loss of stability occurs through the formation of depressions arranged in a single row along the semi-circle in both directions towards the stretched zone.

Keywords: cylindrical shell, straight bending, stability, initial imperfections, correction factors, expected critical force, and radius of the middle surface.

Mikhail V. Petrov, Doctor of Technical Sciences, Professor; e-mail: 21pmv@mail.ru;
<https://orcid.org/0000-0002-7355-8553>; AuthorID: 831162

Olesya A. Alekseeva, Postgraduate Student; e-mail: aosk21@yandex.ru;
<https://orcid.org/0009-0001-1155-8013>; AuthorID: 1250072

Boris V. Mikhailov, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor; e-mail: boris.mihaylov.63@mail.ru;
<https://orcid.org/0000-0001-6511-6985>; AuthorID: 780012



to cite this article: Petrov M. V., Alekseeva O. A., Mikhailov B. V. Theoretical and Experimental Study of the Loss of Stability of Thin-Walled Cylindrical Shells of Medium Length under Direct Bending // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2026. No 1(67). p. 99–112. DOI: 10.37972/chgpu.2026.67.1.007

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение. Устойчивость тонкостенных цилиндрических оболочек при различных видах нагружения теоретически и экспериментально исследованы во многих научных трудах [1–10]. Теоретический и экспериментальный анализ устойчивости цилиндрических оболочек при изгибе приведен в следующих источниках [2, 3]. Влияние геометрических параметров на устойчивость цилиндрических оболочек теоретически и экспериментально исследовалось в [2, 3, 11, 12]. Решение задачи при прямом изгибе (под действием сосредоточенной силы) обусловлено тем, что в зависимости от геометрических и жесткостных параметров оболочки потеря устойчивости может происходить по двум типам: от действия касательных напряжений (по типу кручения) и нормальных напряжений (по типу сжатия-изгиба) [2, 3]. Серьезное влияние на потерю устойчивости тонкостенных оболочек оказывают начальные несовершенства геометрии оболочки и другие факторы [1, 4, 7].

Целью настоящей работы является теоретическое и экспериментальное изучение потери устойчивости тонкостенных цилиндрических оболочек средней длины при прямом изгибе.

1. Теоретическое исследование потери устойчивости тонкостенных цилиндрических оболочек средней длины при прямом изгибе. Для рассмотрения теоретического исследования потери устойчивости тонкостенной цилиндрической оболочки средней длины при прямом изгибе использовали расчетную схему представленную на рис. 1.

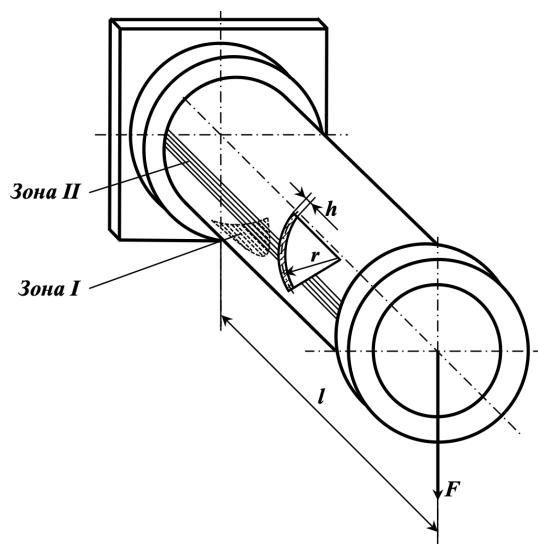


Рис. 1.

При прямом изгибе (рис. 1) создаются в стенке цилиндрической оболочки нормальные и касательные напряжения [7]. Тогда опасными для потери устойчивости будут зоны максимальных нормальных напряжений (зона I) и максимальных касательных напряжений (зона II).

Для исследований использовалась тонкостенная цилиндрическая оболочка из алюминиевого сплава марки 3004 в состоянии Н-19 у которой радиус срединной поверхности $r = 31,48$ мм, толщина оболочки $h = 0,1$ мм, длина оболочки $l = 140$ мм, модуль упругости $E = 0,7 \cdot 10^{11}$ Па [13], коэффициент Пуассона $\nu = 0,33$ [14].

Для тонкостенной оболочки средней длины при прямом изгибе выполняется условие (1) [7]:

$$1,2\sqrt{\frac{h}{r}} < \frac{l}{r} < 3\sqrt{\frac{r}{h}} \quad (1)$$

После подстановки данных в условие (1), получим: $0,068 < 4,45 < 53,23$. Согласно формуле (1), разброс длины рассматриваемой тонкостенной цилиндрической оболочки, у которой отношение радиуса срединной поверхности к толщине данной оболочки равна 314,8, составляет от 2,14 мм до 1675,68 мм.

Приравнивая критическое нормальное напряжение в первой зоне ($\sigma_{икр}$) к критическому напряжению при осевом сжатии ($\sigma_{кр}$) для оболочек средней длины, вычислили ожидаемую критическую силу [7].

Предварительно вычислили критическое нормальное напряжение в первой зоне ($\sigma_{кр}$) с помощью формулы (2) [1, 7].

$$\sigma_{кр} = \frac{E \cdot h}{r \sqrt{3(1 - \nu^2)}} \quad (2)$$

После подстановки значений в формулу (2) получили следующее выражение:

$$\sigma_{кр} = 0,612 \cdot E \frac{h}{r}$$

Тогда [7],

$$\sigma_{икр} = \frac{F_{кр}^{(I)} \cdot l}{\pi \cdot r^2 \cdot h} = 0,612 \cdot E \frac{h}{r};$$

$$F_{кр}^{(I)} = 1,345 \cdot 10^{11} \cdot \frac{h^2 \cdot r}{l} \quad (3)$$

Из формулы (3) определили критическую силу ($F_{кр}^{(I)}$), которая равна $F_{кр}^{(I)} = 302,43$ Н.

Для определения критической силы при потере устойчивости во второй зоне ($F_{кр}^{(II)}$), приравнивали касательное напряжение при изгибе ($\tau_{икр}$) критическому касательному напряжению при кручении ($\tau_{кр}$) для оболочек средней длины.

Предварительно определили критическое напряжение при кручении ($\tau_{кр}$) для оболочек средней длины, у которых выполняется условие (4) [7].

$$3\sqrt{\frac{h}{r}} < \frac{l}{r} < 9\sqrt{\frac{r}{h}}. \quad (4)$$

После подстановки данных в условие (4), получим: $0,169 < 4,45 < 159,69$. Согласно формуле (4), разброс длины рассматриваемой тонкостенной цилиндрической оболочки, у которой отношение радиуса срединной поверхности к толщине данной оболочки равна 314,8, составляет от 5,32 мм до 5027,04 мм.

С учетом выполнения условия (4) определили критическое напряжение при кручении ($\tau_{кр}$) с помощью формулы (5) [1, 7].

$$\tau_{кр} = \frac{0,74 \cdot E \cdot h}{r(1 - \nu^2)^{5/8}} \cdot \sqrt[4]{\frac{h \cdot r}{l^2}}. \quad (5)$$

После подстановки значений в формулу (5) получили следующее выражение:

$$\tau_{кр} = 0,796 \cdot E \cdot \frac{h}{r} \cdot \sqrt[4]{\frac{h \cdot r}{l^2}}.$$

Тогда [7],

$$\begin{aligned} \tau_{икр} &= \frac{F_{кр}^{(II)} \cdot l}{\pi \cdot r \cdot h} = 0,796 \cdot E \cdot \frac{h}{r} \cdot \sqrt[4]{\frac{h \cdot r}{l^2}}; \\ F_{кр}^{(II)} &= 0,557 \cdot 10^{11} \cdot h^2 \cdot \sqrt[4]{\frac{h \cdot r}{l^2}}; \end{aligned} \quad (6)$$

Из формулы (6) определили критическую силу ($F_{кр}^{(II)}$), которая равна $F_{кр}^{(II)} = 197,64 \text{ Н}$.

В качестве расчетного значения критической силы принимали минимальное значение ($F_{кр}$) с учетом поправочных коэффициентов [7] по формуле (7)

$$F_{кр} = \min \begin{cases} 1,2 \cdot \alpha_c \cdot F_{кр}^{(I)}; \\ \alpha_k \cdot F_{кр}^{(II)}, \end{cases} \quad (7)$$

где α_c – поправочный коэффициент на начальные непрямолинейности [7]; α_k – поправочный коэффициент на начальные отклонения при кручении [7].

Коэффициент α_c для отношения радиуса срединной поверхности вышеуказанной цилиндрической оболочки к толщине цилиндрической оболочки равной 314,8 определили интерполяцией из табличных данных источника [7], который равен $\alpha_c = 0,282$.

После подстановки значений в формулу (7) определили ожидаемую критическую силу из условия устойчивости в первой зоне, которая равна $F_{кр} = 102,34 \text{ Н}$.

Значение поправочного коэффициента на начальные отклонения при кручении α_k так же определили интерполяцией из табличных данных источника [7], который равен $\alpha_k = 0,774$.

После подстановки значений в формулу (7) определили ожидаемую критическую силу из условия устойчивости во второй зоне, которая равна $F_{кр} = 152,97 \text{ Н}$.

Исходя из вышеприведенных расчетов окончательно выбирали минимальную ожидаемую критическую силу, т.е. $F_{кр} = 102,34 \text{ Н}$.

В связи с тем, что при прямом изгибе разброс длины рассматриваемой тонкостенной цилиндрической оболочки, у которой отношение радиуса срединной поверхности к толщине данной оболочки равна 314,8, составляет от 5,32 мм до 1675,68 мм необходимо исследовать потерю устойчивости в первой и во второй зонах. Для этого из формул (3) и (6), рассмотрели функции $F_{кр}^{(I)} = f(l)$ и $F_{кр}^{(II)} = f(l)$ и построили их графики зависимости (рис. 2).

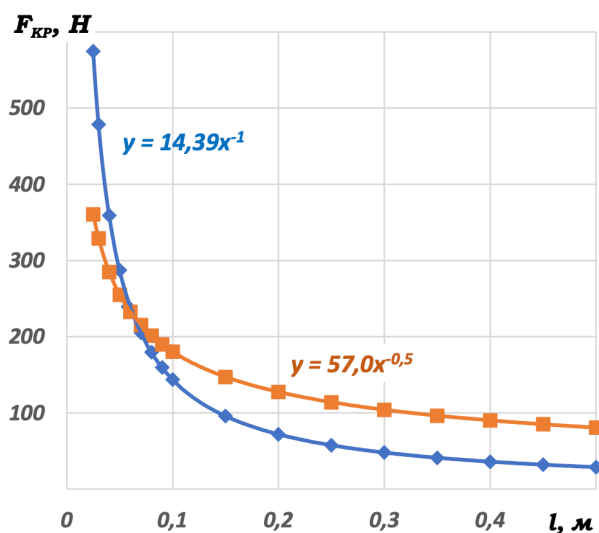


Рис. 2. График зависимости критических сил в первой и во второй зонах от длины цилиндрической оболочки.

Функция $y = 14,39 \cdot x^{-1}$ – график зависимости критической силы из условия устойчивости в первой зоне. Функция $y = 57,0 \cdot x^{-0,5}$ – график зависимости критической силы из условия устойчивости во второй зоне. Точка пересечения вышеуказанных функций имеет следующие координаты $F_{кр} = 224,84 \text{ Н}$, $l = 0,064 \text{ м}$.

Анализ графиков зависимости приведенных на рис.2 указывает на то, что при длине от 0,00532 м до 0,064 м ожидаемая потеря устойчивости должна происходить во второй зоне, а при длине от 0,064 м до 1,676 м ожидаемая потеря устойчивости должна происходить в первой зоне. Для проверки вышеуказанного анализа графиков нами были проведены серии опытов с образцами длиной 40 мм и 140 мм.

2. Экспериментальное исследование потери устойчивости тонкостенных цилиндрических оболочек средней длины при прямом изгибе. Для определения потери устойчивости при изгибе тонкостенной цилиндрической оболочки из алюминиевого сплава марки 3004 в состоянии Н-19 изготовлена и собрана специальная экспериментальная установка рис.3а. Исследуемые образцы (1) одним концом жестко закреплялись к оправке (2). В свою очередь, оправка жестко закреплялась к станине (3). Для контроля прогиба свободного конца оправки установлен высококачественный микронный цифровой индикатор (4). Для измерения прогиба свободного конца образца установлен так же высококачественный микронный цифровой индикатор (5). Для придания жесткости на свободный конец испытываемого образца, закреплялось жесткое кольцо (6), к которому прикреплялся крючок (7). Соосность центра оправки и центра свободного конца цилиндрической оболочки контролировали с помощью лазерного уровня (нивелира) рис.3б. На крючок устанавливался подвес (8).

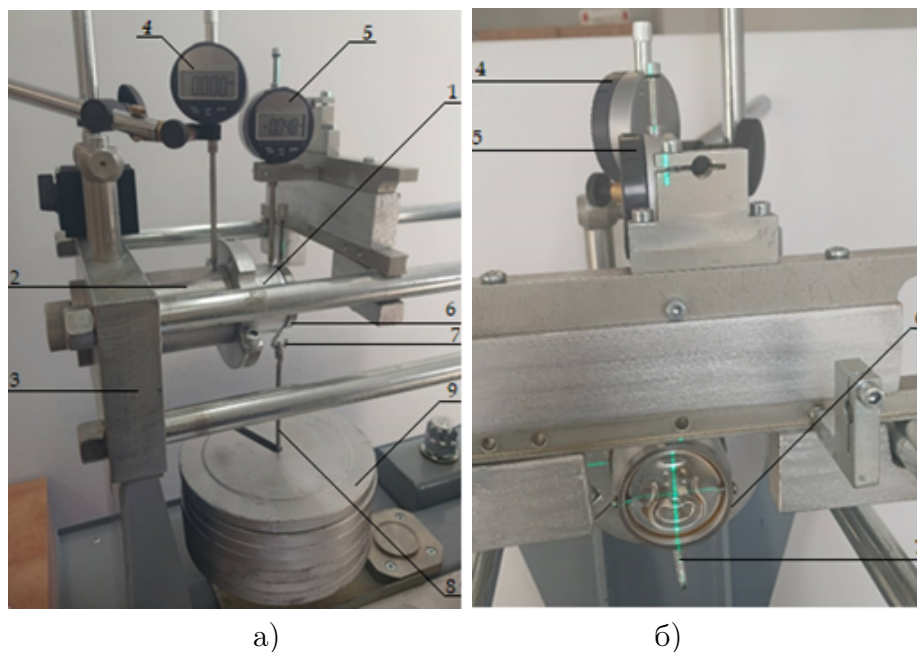


Рис. 3. Специальная экспериментальная установка

Испытуемый образец из алюминиевого сплава 3004 в состоянии Н19 имел следующие размеры: внешний диаметр $D = 63,05$ мм, внутренний диаметр $d = 62,85$ мм, расчетные длины образцов $l = 40$ мм и 140 мм, толщина стенки $h = 0,1$ мм.

После сборки специальной экспериментальной установки (рис. 3а) до нагружения показания высококачественных микронных цифровых индикаторов (4) и (5) устанавливали на “0”. Затем на подвес (8) устанавливали груз (9), который

создавал изгибающий момент. После этого нагружали образец вначале большими, а затем малыми ступенями, отмечая после каждой ступени нагружения вертикальное перемещение на свободном конце образца (1). Ступени малых нагружений выбирали так, чтобы до достижения потери устойчивости было не менее пяти ступеней малых нагружений. После потери устойчивости фиксировались данные критической нагрузки и показания микронных цифровых индикаторов (4) и (5), которые записывали в журнал испытаний. Размеры образцов приведены в табл. 1.

В каждой серии испытывались по десять образцов с последующей статистической обработкой результатов [15]. В первой серии испытаний образец терял устойчивость в две стадии: первая – потеря местной устойчивости, вторая – полная потеря устойчивости образца.

Серия испытаний	Радиус срединной поверхности r , мм	Толщина оболочки h , мм	Длина оболочки l , мм	$\frac{l}{r}$
1	31,48	0,1	40	1,27
2	31,48	0,1	140	4,45

Таблица 1. Размеры испытываемых образцов

В первой стадии местная потеря устойчивости наблюдалась в нескольких вариантах. Один из вариантов – появление вмятины между зоной максимальных напряжений прямого изгиба (зона I) и максимальных касательных напряжений (зона II) рис. 4а. Затем при дальнейшем нагружении образца одновременно появляются вмятина в первой зоне рис. 4а, 4б и во второй зоне рис. 4в. Другой вариант одновременное появление вмятин в первой и во второй зонах. Во второй зоне, где действуют максимальные касательные напряжения появились впадины, наклоненные под углом к образующей тонкостенной цилиндрической оболочки рис. 4в.

При дальнейшем нагружении наступала вторая стадия – полная потеря устойчивости образца. Образец первой серии испытаний после полной потери устойчивости приведен на рис. 5а. Количество впадин в образцах первой серии испытаний 11 впадин, одна впадина в центре первой зоны и по пять впадин наклоненные под углом к образующей тонкостенной цилиндрической оболочки с одной и другой стороны. Из этих пяти впадин с одной и другой стороны одна впадина № 4 (рис. 5а) в центре зоны 2 на всю длину тонкостенной цилиндрической оболочки.

Во второй серии испытаний образец терял устойчивость в одну стадию – полная потеря устойчивости образца. Оболочки средней длины при прямом изгибе теряют устойчивость с образованием одного ряда впадин [9]. Образец второй серии испытаний после полной потери устойчивости приведен на рис. 5б. Образцы второй серии теряют устойчивость, образуя впадины, расположенные

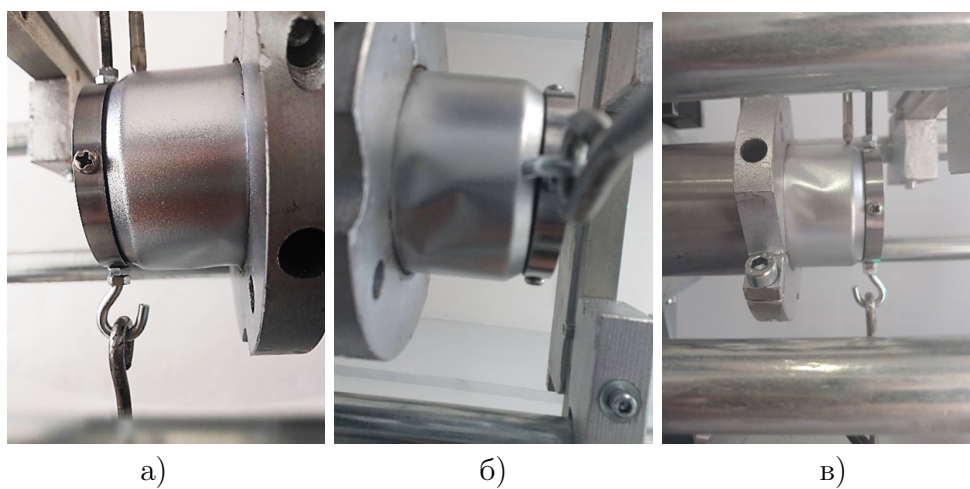


Рис. 4. Этапы местной потери устойчивости первой серии испытаний

по полуокружности в один ряд в обе стороны к растянутой зоне. При этом в первой зоне образуются мелкие впадины с большой глубиной, глубина впадин уменьшается по полуокружности при приближении к растянутой зоне (рис.5б).



Рис. 5. Образцы первой и второй серий испытаний после полной потери устойчивости

Результаты статистической обработки испытаний с доверительной вероятностью $P = 0,95$ приведены в таблице 2.

Серии испытаний	Значение критической силы $F_{кр}^{exp}$, Н	Среднее квадратическое отклонение, Н	Доверительный интервал, Н	Коэффициент вариации, ν , %	Коэффициент асимметрии, S_μ	Коэффициент эксцесса, E_x	Средняя квадратическая ошибка асимметрии, S_A^2	Средняя квадратическая ошибка эксцесса, S_E^2
1 серия испытаний: местная потеря устойчивости	264,28	46,23	$(264,28 \pm 33,04)$	17,49	-1,146	0,664	0,377	0,569
1 серия испытаний: полная потеря устойчивости	328,39	19,92	$(328,39 \pm 14,24)$	6,07	0,548	-0,483	0,377	0,569
2 серия испытаний: полная потеря устойчивости	106,83	14,11	$(106,83 \pm 10,08)$	13,21	-0,738	-0,804	0,377	0,569

Таблица 2. Результаты статистической обработки испытаний

По данным статистической обработки испытаний проверили, подчиняются ли они нормальному закону распределения при помощи неравенств (8) и (9) [15].

$$|S_\mu| \leq 3 \cdot \sqrt{S_A^2} \quad (8)$$

$$\text{где } S_A^2 = \frac{6 \cdot (n-1)}{(n+1) \cdot (n+3)}$$

$$|E_x| \leq 5 \cdot \sqrt{S_E^2}, \quad (9)$$

$$\text{где } S_E^2 = \frac{24 \cdot n \cdot (n-2) \cdot (n-3)}{(n+1)^2 \cdot (n+3) \cdot (n+5)}$$

Подставив значения в формулу (8), проверили соблюдение условий:

- 1 серия испытаний, местная потеря устойчивости $|-1,146| \leq 3 \cdot \sqrt{0,377}$;
- 1 серия испытаний, полная потеря устойчивости $|0,548| \leq 3 \cdot \sqrt{0,377}$;
- 2 серия испытаний, полная потеря устойчивости $|-0,738| \leq 3 \cdot \sqrt{0,377}$.

Подставив значения в формулу (9), проверили соблюдение условий:

- 1 серия испытаний, местная потеря устойчивости $|0,664| \leq 5 \cdot \sqrt{0,569}$;
- 1 серия испытаний, полная потеря устойчивости $|-0,483| \leq 5 \cdot \sqrt{0,569}$;
- 2 серия испытаний, полная потеря устойчивости $|-0,804| \leq 5 \cdot \sqrt{0,569}$.

Вышеуказанные условия соблюдаются, т.е. асимметрия и эксцесс несущественны, вызваны влиянием случайных факторов. Следовательно, приведенные в табл.2 результаты подчиняются нормальному закону распределения.

Значение критической силы в первой серии испытаний для местной потери составило $F_{кр}^{exp} = 264,28$ Н. Согласно графику зависимости критических сил во второй зоне от длины цилиндрической оболочки (рис. 2) ожидаемая критическая сила имеет значение $F_{кр} = 285$ Н. Несоответствие экспериментального значения критической силы с ожидаемой критической силой составило 7,27%.

Значение критической силы в первой серии испытаний для полной потери составило

$F_{кр}^{exp} = 328,39$ Н. Согласно графику зависимости критических сил в первой зоне от длины цилиндрической оболочки (рис.2) ожидаемая критическая сила имеет значение $F_{кр} = 359,75$ Н. Несоответствие экспериментального значения критической силы с ожидаемой критической силой составило 8,72%.

Значение критической силы во второй серии испытаний для полной потери составило $F_{кр}^{exp} = 106,83$ Н. Согласно графику зависимости критических сил в первой зоне от длины цилиндрической оболочки (рис. 2) ожидаемая критическая сила имеет значение $F_{кр} = 102,79$ Н. Несоответствие экспериментального значения критической силы с ожидаемой критической силой составило 3,78%.

В целом наблюдается хорошее соответствие результатов критической силы по теоретическим и экспериментальным исследованиям.

Закключение. По результатам проведенных теоретических исследований рекомендован график зависимости критических сил от длины цилиндрической оболочки для определения потери устойчивости оболочек средней длины в зонах максимальных нормальных и касательных напряжений. Анализ результатов экспериментальных исследований показал, что приведенные результаты статистической обработки испытаний значения критической силы подчиняются нормальному закону распределения и эксперименты выполнены с доверительной вероятностью $P = 0,95$. Расхождение теоретических и экспериментальных значений критических сил составило от 3,78 % до 8,72 %, что подтверждает удовлетворительное соответствие результатов теоретических и экспериментальных исследований.

ДОПОЛНИТЕЛЬНО

Вклад авторов. М.В. Петров – постановка задачи, написание текста рукописи, согласование финальной версии рукописи, О.А. Алексеева – обзор литературы, постановка и проведение экспериментов, обработка данных, Б.В. Михайлов – постановка и проведение экспериментов, обработка данных, анализ результатов, оформление таблиц и рисунков.

Конфликт интересов. Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

Источник финансирования. Авторы заявляют об отсутствии внешнего финансирования при проведении исследования.

ADDITIONAL INFORMATION

Authors' contribution. M.V. Petrov – formulation of the task, writing of the manuscript text, coordination of the final version of the manuscript, O.A. Alekseeva – literature review, formulation and execution of experiments, data processing, B.V. Mikhailov – formulation and execution of experiments, data processing, analysis of results, and design of tables and figures.

Competing interests. The authors declare that they have no competing interests.

Funding. This study was not supported by any external sources of funding.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вольмир А. С. Устойчивость деформируемых систем. В 2 частях. Ч. 2. – 3-е изд. – Москва : Издательство Юрайт, 2025. – 480 с. – (Высшее образование). – Учебник для вузов.
2. Маневич А. И., Пономаренко Е. А., Прокопало Е. Ф. Устойчивость ортотропных цилиндрических оболочек при изгибе поперечной силой. Сообщение 1. Теория // Проблемы прочности. – 2013. – № 1. – С. 101–111.
3. Маневич А. И., Пономаренко Е. А., Прокопало Е. Ф. Устойчивость ортотропных цилиндрических оболочек при изгибе поперечной силой. Сообщение 2. Эксперимент // Проблемы прочности. – 2013. – № 2. – С. 114–120.
4. Теоретическое и экспериментальное исследование потери устойчивости и закритического поведения тонкостенной цилиндрической оболочки при изгибе / В. Г. Баженов [и др.] // Проблемы прочности и пластичности. – 2009. – № 71. – С. 77–83.
5. Гоник Е. Г., Петров М. В., Федорова Т. Г. Экспериментальное исследование потери устойчивости консольно закрепленных цилиндрических тонкостенных оболочек при поперечном изгибе // Проблемы прочности и пластичности. – 2016. – Т. 78, № 2. – С. 228–235.
6. Петров М. В., Федорова Т. Г., Гоник Е. Г. Экспериментальное исследование потери устойчивости тонкостенных оболочек при чистом изгибе // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2015. – № 2. – С. 119–125.
7. Биргер И. А., Шорр Б. Ф., Иосилевич Г. Б. Расчет на прочность деталей машин: Справочник. – 4-е изд. – Москва : Машиностроение, 1993. – 640 с.
8. Сысоев О. Е., Намоконов А. Н., Сысоев Е. О. Численные исследования колебаний тонкостенной цилиндрической оболочки в пластической зоне деформации // Вестник Чувашского государственного университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2025. – 4(66). – С. 173–184. – DOI: 10.37972/chgru.2025.66.4.012. – EDN: ESVEFT.
9. Вольмир А. С., Григорьев Ю. П., Станкевич А. И. Соппротивление материалов. – Москва : Дрофа, 2007. – 591 с. – Учебник для вузов.
10. Ильюшин А. А., Огибалов П. М. Упругопластические деформации полых цилиндров. – Москва : Изд-во Моск. ун-та, 1960. – 227 с.
11. *Rotter J. M., Sadowski A. J.* Full plastic resistance of tubes under bending and axial force: exact treatment and approximations // Structures. – 2016. – Vol. 10. – P. 30–38. – DOI: 10.1016/j.istruc.2016.11.004.

12. Stability and supercritical behavior of large size tankers for transportation of loose goods / V. G. Bazhenov [et al.] // J. Mach. Manuf. Reliab. – 2015. – Vol. 44, no. 5. – P. 422–427. – DOI: 10.3103/S1052618815050039.
13. URL: <https://ru.mfgrobots.com/material/metal/1010037377.html>. – (Дата обр. 02.03.2026).
14. URL: <https://www.makeitfrom.com/material-properties/3004-H19-Aluminum>. – (Visited on 03/02/2026).
15. Золотухин Ю. Д. Испытание строительных конструкций. – Минск : Выш. школа, 1983. – 208 с. – Учебное пособие для вузов по специальности «Промышленное и гражданское строительство».

REFERENCES

1. *Volmir A. S.* Stability of Deformable Systems. In 2 Parts. Part 2. – 3rd ed. – Moscow : Yurayt Publishing House, 2025. – 480 p. – (Higher Education). – Textbook for universities.
2. *Manevich A. I., Ponomarenko E. A., Prokopalo E. F.* Stability of orthotropic cylindrical shells under bending by a transverse force. Part 1. Theory // Strength Mater. – 2013. – No. 1. – P. 101–111.
3. *Manevich A. I., Ponomarenko E. A., Prokopalo E. F.* Stability of orthotropic cylindrical shells under bending by a transverse force. Part 2. Experiment // Strength Mater. – 2013. – No. 2. – P. 114–120.
4. Theoretical and experimental study of the loss of stability and the post-critical behavior of a thin-walled cylindrical shell under bending / V. G. Bazhenov [et al.] // Problems of Strength and Plasticity. – 2009. – No. 71. – P. 77–83.
5. *Gonik E. G., Petrov M. V., Fedorova T. G.* Experimental study of the loss of stability of cantilevered cylindrical thin-walled shells under transverse bending // Problems of Strength and Plasticity. – 2016. – Vol. 78, no. 2. – P. 228–235.
6. *Petrov M. V., Fedorova T. G., Gonik E. G.* Experimental study of the loss of stability of thin-walled shells during pure bending // Vestnik Chuvash State Pedagogical University I.Ya. Yakovlev. Series: Mechanics of the Limit State. – 2015. – No. 2. – P. 119–125.
7. *Birger I. A., Shorr B. F., Iosilevich G. B.* Strength Calculation of Machine Parts: Handbook. – 4th ed. – Moscow : Mechanical Engineering, 1993. – 640 p. – Revised and expanded edition.
8. *Sysoev O. E., Namokonov A. N., Sysoev E. O.* Numerical study of vibrations of a thin-walled cylindrical shell in the plastic strain zone // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva. Ser.: Mekh. Pred. Sost. – 2025. – 4(66). – P. 173–184. – DOI: 10.37972/chgpu.2025.66.4.012.
9. *Volmir A. S., Grigoriev Y. P., Stankevich A. I.* Resistance of Materials. – Moscow : Drofa, 2007. – 591 p. – Textbook for universities.
10. *Ilyushin A. A., Ogibalov P. M.* Elastoplastic Deformations of Hollow Cylinders. – Moscow : Moscow University Press, 1960. – 227 p.
11. *Rotter J. M., Sadowski A. J.* Full plastic resistance of tubes under bending and axial force: exact treatment and approximations // Structures. – 2016. – Vol. 10. – P. 30–38. – DOI: 10.1016/j.istruc.2016.11.004.

12. Stability and supercritical behavior of large size tankers for transportation of loose goods / V. G. Bazhenov [et al.] // J. Mach. Manuf. Reliab. – 2015. – Vol. 44, no. 5. – P. 422–427. – DOI: 10.3103/S1052618815050039.
13. URL: <https://ru.mfgrobots.com/material/metal/1010037377.html>. – (Visited on 03/02/2026) ; Electronic resource.
14. URL: <https://www.makeitfrom.com/material-properties/3004-H19-Aluminum>. – (Visited on 03/02/2026) ; Electronic resource.
15. *Zolotukhin Y. D.* Testing of Building Structures. – Moscow : Higher School, 1983. – 208 p. – Textbook for universities.